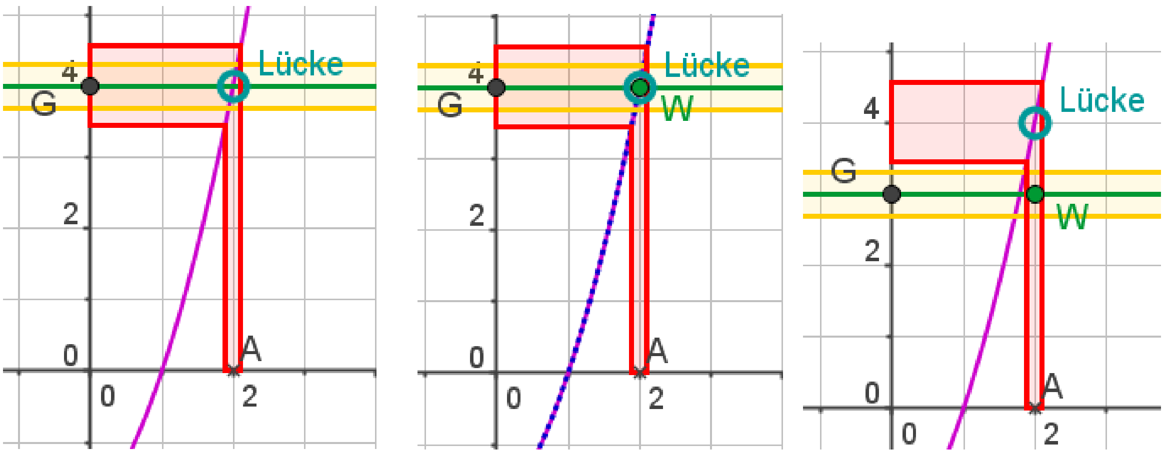
Stetige und unstetige Funktionen

Fortsetzung von“ Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen“

Gegeben ist f mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ und $f(x) = \dfrac{(x^2-4)(x-1)}{x-2}$.

Betrachtet wird auch f_s mit $D_{f_s} = \mathbb{R}$ und $f_s(x) = (x+2)(x-1)$.

Variante ist k mit $D_k = \mathbb{R}$ und $k(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-4)(x-1)}{x-2} & \textit{für} \quad x \neq 2 \\ 3 & \textit{für} \quad x = 2 \end{cases}$.



Die Funktion f hat an der Stelle x=2 eine Definitionslücke.

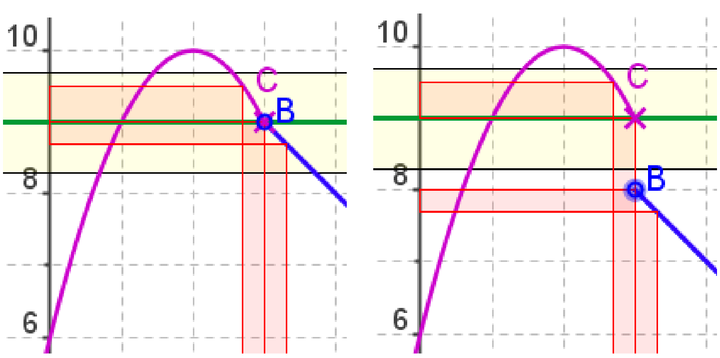
Falsch ist: f ist an der Stelle x=2 unstetig, denn die Stetigkeit ist nur für Stellen aus dem Definitonsbereich definiert.

Der Funktionsterm von f_s geht durch Kürzen aus dem von f hervor.

Die Funktion f_s ist überall stetig, f_s heißt stetige Fortsetzung von f.

Die Funktion k überall definiert, aber sie **ist unstetig an der Stelle x=2.**

Es gilt nämlich $\lim\limits_{x\to 2} k(x) = 4 \neq 3 = k(2)$



$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 10 & \textit{für} \quad x \leq 3 \\ -(x-3) + 9 & \textit{für} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 10 & \textit{für} \quad x \leq 3 \\ -(x-3) + 8 & \textit{für} \quad x > 3 \end{cases}$$

Die Funktion f ist an der Stelle x=3 stetig, denn beide Teilfunktionen haben an der Stelle x=3 denselben Funktionswert. Die untere Teilfunktion hat den Funktionswert der oberen Teilfunktion als Grenzwert. Man braucht nur zu prüfen,

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = -(3-2)^2 + 10 = -1^2 + 10 = 9 \\ (-(x-3)+9)\,|_{x=3} = 9 \end{array}\right\} \textit{ist gleich}.$$

k ist in x=3 unstetig.