

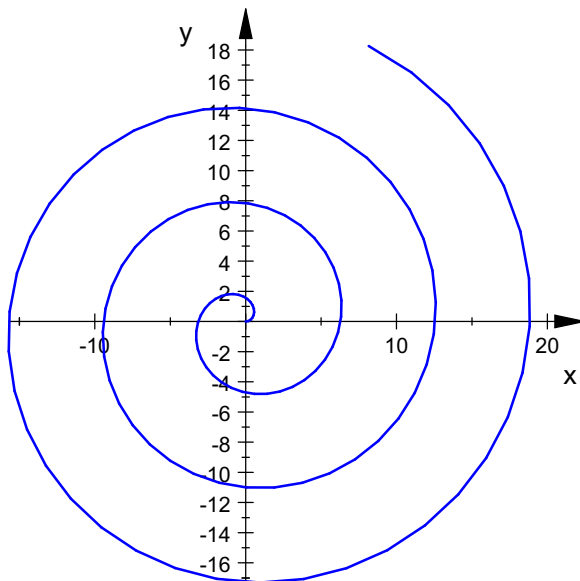
Archimidische Spirale als CD-Spur

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, mit MuPAD, Mrz. 07 nach eine Emailanfrage von M.Thewes

Web: www.mathematik-verstehen.de

<http://haftendorn.uni-lueneburg.de>

```
arch:=plot::Polar([t,t], t=0..20):plot(arch)
```



Bei der Archimedischen Spirale $r = a \cdot t$ ist der Abstand der Spiralarms $a \cdot 2 \cdot \pi$.
Bei einer CD mit der beschriebenen Spurbreite g und der Zwischenraumbreite g gilt

$$a \cdot 2 \cdot \pi = 2 \cdot g$$

$$2 \cdot \pi \cdot a = 2 \cdot g$$

Die CD-Spirale ist also:

$$r = t \rightarrow g / \pi \cdot t$$

$$t \rightarrow \frac{g}{\pi} \cdot t$$

Bogenlänge in Polarkoordinaten ist dann

$$\text{hold}(\text{int}(\sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}, t))$$

$$\int \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt$$

$$r(t)^2 + r'(t)^2$$

$$\frac{g^2 \cdot t^2}{\pi^2} + \frac{g^2}{\pi^2}$$

$$L := g / \pi \cdot \text{int}(\sqrt{t^2 + 1}, t)$$

$$\frac{g \cdot \left(\frac{\text{arcsinh}(t)}{2} + \frac{t \cdot \sqrt{t^2 + 1}}{2} \right)}{\pi}$$

Als bestimmtes Integral:

$$LCD := g / \pi \cdot \text{int}(\sqrt{t^2 + 1}, t = 0 \dots k \cdot 2 \cdot \pi)$$

$$\frac{g \cdot \left(\frac{\text{arcsinh}(2 \cdot \pi \cdot k)}{2} + \pi \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 \cdot k^2 + 1} \right)}{\pi}$$

$$\frac{g \cdot \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(2 \cdot \pi \cdot k)}{2} + \pi \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 \cdot k^2 + 1} \right)}{\pi}$$

Eine CD sei von einem Radius von 2.1 cm bis zu einem Radius von 5.8 cm bespielt.
Das sind folgende Anzahlen Spiralenrunden:

2.1/0.00032

6562.5

5.8/0.00032

18125.0

float(0.00016/PI*int(sqrt(t^2+1), t=6562*2*PI..
(18125)*2*PI))

286971.4511

Dieses ist also die Länge der CD-Spirale.

Abschätzung:

Die CD-Spur hat also etwa 11000 Windungen und fängt recht weit außen an,
daher ist sie im Verhältnis zu ihrer Dicke von $2g=2 \cdot 0.00016$ cm kaum gekrümmt.
Daher könnte man sie zum Rechteck aufbiegen. Diese Rechteck hat folgende Fläche:
einerseits $A = \text{Spurlänge} \cdot \text{Gesamtspurbreite}$
andererseits = Fläche des beschriebenen Kreisrings der CD

$A := \pi \cdot (ra^2 - ri^2)$

$\pi \cdot (ra^2 - ri^2)$

Damit ergibt sich für die Länge der Spur:

$3.1416 \cdot (5.8^2 - 2.1^2) / 0.00032$

286965.525

Beweis der Abschätzung mit einer Abschätzung der obigen Integration:
Der Sinushyperbolicus ist eine e-Funktion, Arkussinushyperbolicus also für
große Argumente etwa eine ln_funktion, wächst also kaum:

float(arcsinh(6562*2*PI));
float(arcsinh((18125)*2*PI));

11.32007496

12.33607173

g und die Division durch $2 \cdot \pi$ machen diesen Termteil winzig:

float(0.00016/2/PI*(-arcsinh(6562*2*PI)+arcsinh(18125*2*PI)));

0.0000258721452

2

Die 1 unter der Wurzel kann für k im Tausenderbereich vernachlässigt werden)

$LCD := g \cdot 2 \cdot \pi \cdot ka^2 - g \cdot 2 \cdot \pi \cdot ki^2$

$$\text{LCD} := g^2 \cdot \pi \cdot k_a^2 - g^2 \cdot \pi \cdot k_i^2$$

$$2 \cdot \pi \cdot g \cdot k_a^2 - \pi \cdot g \cdot k_i^2 \cdot 2$$

Nun ist

$$r_i = 2 \cdot g \cdot k_i;$$

$$r_a = 2 \cdot g \cdot k_a;$$

$$r_i = 2 \cdot g \cdot k_i$$

$$r_a = 2 \cdot g \cdot k_a$$

Also folgt

$$\text{LCD} := \pi \cdot r_i \cdot (r_i / (2 \cdot g)) - \pi \cdot r_a \cdot (r_a / (2 \cdot g));$$

$$\frac{\pi \cdot r_i^2}{2 \cdot g} - \frac{\pi \cdot r_a^2}{g \cdot 2}$$

und das ist genauso wie die obige Abschätzung.