

Kleine Fingerübung mit Indizes zu Gozinto

Es gibt eine Reihe von Rohstoffen r_i , $i = 1, \dots$, von Zwischenprodukten z_j , $j = 1, \dots$ und Endprodukten e_k , $k = 1, \dots$. Rohstoff r_i wird in Ampullen zu je w_i Liter geliefert. Die Zwischenprodukte werden flaschenweise hergestellt, die Endprodukte schließlich in Kübeln.

Die Matrix $R = (r_{ij})$ gibt an, wieviel Stück Ampullen von r_i in eine Flasche von z_j wandern, die Matrix $Z = (z_{jk})$ gibt an, wieviel Stück Flaschen von z_j in einen Kübel von e_k wandern, und die Matrix $E = (e_{ik})$ schließlich gibt an, wieviele Ampullen von r_i auf diese Weise letztlich in einem Kübel von e_k landen. Natürlich gilt $E = R \cdot Z$, ausgeschrieben

$$e_{ik} = \sum_j r_{ij} z_{jk}.$$

Berechnung der Matrizen für die Anteile, mit vielen Indizes

Eine Flasche von z_j enthält $\sum_i w_i r_{ij}$ Liter, davon entfallen $w_i r_{ij}$ Liter auf r_i .

Damit ist

$$\tilde{r}_{jk} = \frac{w_i r_{ij}}{\sum_i w_i r_{ij}}$$

der Anteil von r_i in einem Liter von z_j .

Ein Kübel von e_k enthält $\sum_{i,j} w_i r_{ij} z_{jk}$ Liter, davon entfallen $\sum_i w_i r_{ij} z_{jk}$ Liter auf z_j . Damit ist

$$\tilde{z}_{jk} = \frac{\sum_i w_i r_{ij} z_{jk}}{\sum_{i,j} w_i r_{ij} z_{jk}}$$

der Anteil von z_j in einem Liter von e_k .

Ein Kübel von e_k enthält $\sum_j w_i r_{ij} z_{jk}$ Liter von r_j . Damit ist

$$\tilde{e}_{jk} = \frac{\sum_j w_i r_{ij} z_{jk}}{\sum_{i,j} w_i r_{ij} z_{jk}}$$

der Anteil von r_i in einem Liter von e_k .

Im nun Folgenden muss man beachten, dass Indizes, über die summiert wird, beliebig umbenannt werden dürfen und der Übersichtlichkeit halber auch manchmal müssen.

Die Matrix $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})$ gibt an, welcher Anteil von r_i in einem Liter von z_j steckt, ebenso gibt die Matrix $\tilde{Z} = (\tilde{z}_{jk})$ an, welcher Anteil von z_j in einem Liter von e_k steckt, und schließlich gibt die Matrix $\tilde{E} = (\tilde{e}_{ik})$ an, welcher Anteil von r_i in einem Liter von e_k steckt.

Natürlich muss gelten $\tilde{E} = \tilde{R} \cdot \tilde{Z}$, ausgeschrieben

$$\tilde{e}_{ik} = \sum_j \tilde{r}_{ij} \tilde{z}_{jk}.$$

Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \sum_j \tilde{r}_{ij} \tilde{z}_{jk} &= \sum_j \left(\frac{w_i r_{ij}}{\sum_a w_a r_{aj}} \cdot \frac{\sum_b w_b r_{bj} z_{jk}}{\sum_{a,b} w_a r_{ab} z_{bk}} \right) = \left(\sum_j \frac{w_i r_{ij}}{\sum_a w_a r_{aj}} \cdot \frac{z_{jk} \sum_b w_b r_{bj}}{\sum_{a,b} w_a r_{ab} z_{bk}} \right) \\ &= \sum_j \frac{w_i r_{ij} z_{jk}}{\sum_{a,b} w_a r_{ab} z_{bk}} = \frac{\sum_j w_i r_{ij} z_{jk}}{\sum_{i,j} w_i r_{ij} z_{jk}} = \tilde{e}_{ik} \end{aligned}$$

Ohne Index-Salat geht es auch

Dazu braucht man noch den Vektor der Ampullengrößen in Liter, $w = (w_i)$, als Zeilenvektor. Mit der Operation Diag , die aus einem Zeilenvektor $x = (x_i)$ die Diagonalmatrix $\text{Diag}(x)$ macht, die als Diagonalelemente gerade die Komponenten von x und sonst Nullen hat,

$$\text{Diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

kann man schreiben

$$\tilde{R} = \text{Diag}(w) \cdot R \cdot (\text{Diag}(w \cdot R))^{-1}$$

Die Flaschengrößen der Zwischenprodukte in Liter sind gegeben durch den Vektor $g = w \cdot R$. Damit wird entsprechend

$$\tilde{Z} = \text{Diag}(g) \cdot Z \cdot (\text{Diag}(g \cdot Z))^{-1}$$

Schließlich wird direkt mit der Matrix E wie für die Matrix R

$$\tilde{E} = \text{Diag}(w) \cdot E \cdot (\text{Diag}(w \cdot E))^{-1}$$

Nun sollte wieder gelten $\tilde{E} = \tilde{R} \cdot \tilde{Z}$. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \tilde{R} \cdot \tilde{Z} &= \text{Diag}(w) \cdot R \cdot (\text{Diag}(w \cdot R))^{-1} \text{Diag}(g) \cdot Z \cdot (\text{Diag}(g \cdot Z))^{-1} \\ &= \text{Diag}(w) \cdot R \cdot (\text{Diag}(w \cdot R))^{-1} \text{Diag}(w \cdot R) \cdot Z \cdot (\text{Diag}(w \cdot R \cdot Z))^{-1} \\ &= \text{Diag}(w) \cdot R \cdot Z \cdot (\text{Diag}(w \cdot R \cdot Z))^{-1} = \text{Diag}(w) \cdot E \cdot (\text{Diag}(w \cdot E))^{-1} \\ &= \tilde{E} \end{aligned}$$

Passt!