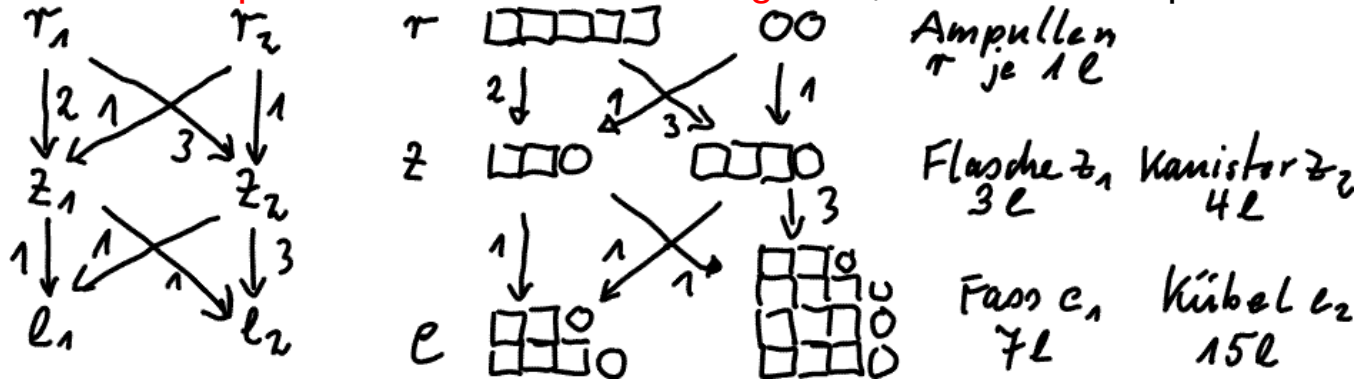


Gozinto-Graphen bei Stück- und Schüttgütern, kritisches Beispiel 1/3



„Gozinto“ ist eine Verballhornung der Worte „goes into“. Der Gozinto-Graph gibt im oberen Teil an, wie viele Stücke des Typs r_1 bzw. r_2 zur Herstellung je eines Stückes des Zwischenproduktes z_1 bzw. z_2 verwendet werden. Im unteren Teil werden aus diesen Zwischenprodukten mit den angegebenen Stückzahlen Endprodukte e_1 bzw. e_2 hergestellt. Die Grafik in der Mitte verdeutlicht diese Zusammenhänge.

Man kann hier abzählen, dass in e_1 5 Karo-Ampullen r_1 und 2 Kreis-Ampullen r_2 stecken, und in e_2 11 Karo-Ampullen r_1 und 4 Kreis-Ampullen r_2 sind.

Dieses Ergebnis kann man durch die Matrix $re = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ beschreiben. Die Zeilen beziehen

sich auf Ausgangsstücke r_1 und r_2 , die Spalten auf die Endprodukte e_1 und e_2 .

Der Bezug zur Mathematiklehre in Schule und Hochschule ist dadurch gegeben, dass re bequem als Matrizenprodukt der Übergangsmatrizen von r nach z und von z nach e berechnet

werden kann: $rz = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $ze = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $re = rz \cdot ze = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Die Matrizenmultiplikation

spiegelt genau die oben in der Mitte gezeigten Zusammenhänge der Stückzahlen wieder:

Stück r_1 in $e_1 = a_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$ // // // // Stück r_1 in $e_2 = a_{12} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$

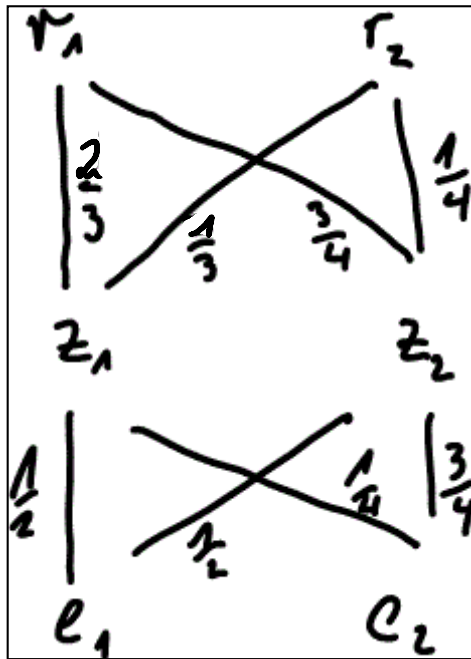
Stück r_2 in $e_1 = a_{21} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$ // // // // Stück r_2 in $e_2 = a_{22} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4$

Gozinto-Graphen und Matrizenrechnung eignen sich uneingeschränkt für Beispiele mit Stückgütern.

Besonders im Wirtschaftsunterricht folgen weitere Rechnungen mit der re -Matrix mit Bestellvektoren, Kostenvektoren, Einnahmevektoren u.s.w..

Sieht man sich die vorgestellten Beispiele aber genauer an, so befinden sich darunter viele, die von **Rohstoffen** handeln, die in **Mengeneinheiten** weiter verarbeitet werden.

Die obere Aufgabe bekommt dann z.B. den Text: *Der Graph gibt an, wie viele Tonnen r_1 und r_2 zu einer Tonne z_1 verarbeitet werden.* Also ergeben 2 Tonnen r_1 und 1 Tonne r_2 nur eine Tonne z_1 ? Das kann ja nicht stimmen. (Es geht nicht um Erz und Silber!) Manche Aufgaben-Autoren behelfen sich mit „ME“ für Mengeneinheiten. Dann aber besteht eine ME z_1 aus 2 ME r_1 und 1 ME r_2 , entsprechend ist eine ME z_2 aus 4 ME zusammengesetzt. Schon wenn man die Rohstoffe in derselben ME misst, im obigen Beispiel Liter, bestehen z_1 und z_2 aus verschieden vielen Litern. Darum sind oben die Worte Flasche, Kanister, Fass und Kübel verwendet. Ein Fass enthält also 7 Liter und ein Kübel 15 Liter. Eine Bestellung von 20 ME e_1 und 10 ME e_2 sind dann nicht etwa 30 ME sondern 20 Fässer und 10 Kübel = 140 Liter + 150 Liter, also 290 Liter. Das widerspricht dem aus der Physik gewohnten Begriff **Mengeneinheit**. Auch im weiteren Umgang mit der re -Matrix gibt es nun Probleme. Die Anwender stellen sich ja nun eigentlich Bestellungen in Litern (einer gemeinsamen Mengeneinheit) vor. Wenn man nun nicht noch eine Spaltennormierung vornimmt, kommt schlicht grober Unsinn heraus.



Gozinto-Graphen bei Schüttgütern, Problemlösung 2/3

Eine **Lösung des Problems** ist, den obigen Gozintographen anteilig zu deuten oder schon die Aufgabenformulierung und die Beschriftung des Gozinto-Graphen auf Anteile zu beziehen (wie links). Für obiges Beispiel wäre das:

$$\tilde{r}z = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}e = \tilde{r}z \cdot \tilde{z}e = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & \frac{35}{15} \\ \frac{7}{24} & \frac{13}{48} \end{pmatrix}.$$

Dieses lässt sich direkt erklären: Z.B. geht r2 über z1 zu $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ in e2 ein und über z2 zu $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$, zusammen also ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{16} = \frac{4}{48} + \frac{9}{48} = \frac{13}{48}$ der Anteil von r2 in e2.

Beim Erfinden von Aufgaben kann man natürlich übersichtliche Kommazahlen wie 0,6 und 0,4 für 60% und 40% usw. wählen, damit lässt sich leicht rechnen und auch erklären. Man muss aber streng

darauf achten, dass die zu einem Zwischen- oder Endprodukt **hinführenden Pfeile Summe 1** ergeben. Das drückt sich dann in den **Spaltensummen 1 der Matrizen** aus.

Hierbei ist also wieder die Matrizenmultiplikation das passende Werkzeug, aber eine Normierung am Ende ist nicht mehr nötig, alle vorkommenden Matrizen sind von allein spaltennormiert und bei der Deutung gibt es kein Problem. Alle Angaben für Rohstoffe, Zwischenprodukte und Endprodukte sind in der einheitlichen Mengeneinheit deutbar. Auch weiterführende Aufgaben, wie sie in den Schulbüchern üblich sind, lassen sich so problemlos behandeln:

Z.B. Bestellung von 20 l e1 und 10 l e2 ergibt dann folgenden Rohstoffeinsatz.

$$\tilde{r}e \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & \frac{35}{15} \\ \frac{7}{24} & \frac{13}{48} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21,46 \\ 8,54 \end{pmatrix}, \text{ also } 21,46 \text{ l von } r1 \text{ und } 8,54 \text{ l von } r2.$$

Um das herzustellen braucht man $\tilde{z}e \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,5 \\ 17,5 \end{pmatrix}$, also 12,5 l von z1 und 17,5 l von z2. Das sind natürlich auch wieder 30 l.

Bei Schüttgütern sind Gozinto-Graphen, die sofort Anteile angeben, zu empfehlen.

Am Ende von Seite 3 sind die Ergebnisse zu sehen, die sich bei nachträglicher Spaltennormierung ergeben.

Sie stimmen NICHT mit diesen Ergebnissen über ein.

Das liegt daran, dass die Mischungs"verhältnisse" sich auf verschiedene Grundmengen beziehen. Z.B. sind bei dem Kübel im oberen Bild 3 Kanister z2 und eine Flasche z1 gemischt. Das sind aber nicht 3/4 und 1/4, weil die Kanister größer sind als die Flaschen.

In dem Graphen auf dieser Seite ist wirklich 3/4 l aus z2 und 1/4 l aus z1 gemischt. Die erst im Nachhinein erzeugbare Übergangsmatrix zeigt das 4/5 des Kübels aus z2 stammen und nur 1/5 aus z1. Hier liegt der Grund, warum ich nachträgliche Spaltennormierung **didaktisch ablehne**.

Gozinto-Graphen bei Schüttgütern, ungünstige Problemlösung 3/3

Man muss sich klarmachen, dass spätestens die Beschriftung des Gozintographen eine Modellierung ist. Wie immer ist die mathematische Lösung im Modellierungs-„Kreislauf“ mit der Wirklichkeit zur Passung zu bringen. Wie schon auf Seite 1 unten erläutert, wird in vielen Schulbüchern (besonders aus denen für Berufsschulen) „ungeniert“ bei Schüttgütern dasselbe getan wie bei Stückgütern. Verräterisch sind dann Formulierungen wie „dreimal soviel e1 wie e2“. Sollen das nun dreimal soviel Liter sein, oder dreimal soviele Fässer e1 wie Kübel e2? Nur die 2. Deutung ist ohne weitere Umrechnungen möglich.

Rettungsversuch: Rechnen als Stückgüter, dann Umrechnung auf eine gemeinsame ME, im Beispiel Liter.

Die so erhaltenen Lösungen sind dann aber dennoch andere als auf Seite 2. Was ist richtig? Das entscheidet sich am Herstellungsprozess. (siehe auch Ende S.2) Man rechnet zunächst so wie bei Stückgütern, vollständig mit den am ersten Graphen angegebenen Zahlen. Nun stellt man sich im Fass 7 Liter vor, von denen 5 l Rohstoff r1 und 2 l Rohstoff r2 sind. Im Kübel sind entsprechend 11 l von r1 und 4 l von r2.

Also ist der Anteil r1 in e1 $\frac{5}{7}$ und r2 in e1 $\frac{2}{7}$ entsprechend r1 in e2 $\frac{11}{15}$ und r2 in e2 $\frac{4}{15}$.

Anstelle der Matrix $re = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ muss man also die Matrix $\overline{re} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{11}{15} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$ für weitere

Berechnungen verwenden. Für eine Bestellung von 20 l e1 und 10 l e2, also $b = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$,

könnte dann mit $\overline{re} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{11}{15} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{100}{7} + \frac{110}{15} \\ \frac{40}{7} + \frac{40}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21,62 \\ 8,38 \end{pmatrix}$ der Rohstoffeinsatz von

21,62 l von r1 und 8,38 l von r2 berechnet werden. Das sind natürlich 30 l.

Ebenso kann man **nun** auf übliche Weise mit den Wirtschaftsvektoren umgehen.

Das ist aber eine **andere Lösung**, als wenn man gleich alles in Anteilen rechnet. Der Unterschied ist bei diesem Beispiel zufällig klein. Zudem hat man keine unmittelbare Möglichkeit, den **Bedarf an Zwischenprodukten** auszurechnen, denn man kann die Übergangsmatrizen formal nicht verwenden. Als erste Übergangsmatrix eignet sich

$\overline{rz} := \widetilde{rz} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ aber als zweite Übergangsmatrix muss man wegen $\overline{rz} \cdot \overline{ze} = \overline{re}$ rechnen

$\overline{rz}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{ze} = \overline{rz}^{-1} \cdot \overline{re} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{15} \\ \frac{4}{7} & \frac{12}{15} \end{pmatrix}$. Diese Matrix kann man auch durch

Überlegen an den Skizzen aus Seite 1 erhalten: aus z1 stammen 3 der 7 l im Fass e1 usw. So muss man auch vorgehen, wenn die Invertierung nicht möglich ist.

Für die Bestellung von 20 l e1 und 10 l e2 braucht man also

$\overline{zw} := \overline{ze} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,57 \\ 19,43 \end{pmatrix}$ Also braucht man 10,57 l aus den Flaschen, in

denen z1 ist, und 19,43 l aus den Kanistern, in denen z2 ist. **Fazit: Nachtägliche**

Spaltennormierung ist KEINE didaktisch gute Lösung.