

Gozinto original

GoZinto-Verflechtungs-Aufgabe (Üb 9 Didaktik) Haftendorn www.mathematik-verstehen.de

Die folgende Aufgabe ist hier in Problem 1 so gelöst, wie sich das die Autoren vorgestellt haben.
 In Problem 2 folgt die Lösung, die die Mengen Bruchteile umrechnet. (ob. Site bei Wirtschaft)

Aus Bohner-Ihlenburg-Ott: Mathematik für berufliche Gymnasien, Lineare Algebra, Wirtschaftliche Anwendungen, Merkur-Verlag Rinteln 2005 ISBN 3-8120-05551-4 S. 52

3. Ein Betrieb fertigt aus den Materialien R_1, R_2, R_3 und R_4 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 . Diese werden dann zu den Endprodukten E_1, E_2 und E_3 verarbeitet. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch folgende Tabellen gegeben:

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	3	4
Z_2	1	2	2
Z_3	2	1	3

	E_1	E_2	E_3
R_1	12	14	21
R_2	12	13	21
R_3	11	12	19
R_4	6	6	10

a) Wie viel ME von jedem Rohstoff werden benötigt, damit 8 ME von Z_1 , 12 ME von Z_2 und 14 ME von Z_3 hergestellt werden können?
 b) Ein Geschäftspartner bestellt 150 ME von E_3 und von E_2 die dreifache Menge von E_1 . Wie viel ME der Endprodukte werden geliefert, wenn vom Zwischenprodukt Z_3 10 ME mehr als von Z_2 benötigt wird.
 c) Laut Inventur sind von Rohstoff R_1 4530 ME, von R_2 4410 ME und von R_3 4030 ME am Lager. Wie viel ME von R_4 sind anzufordern, damit dieser Lagerbestand vollständig zu Endprodukten verarbeitet werden kann. Wie viel ME von jedem Endprodukt werden dann hergestellt?

Im Problem 2 prozentual!

1.1

GoZinto-Aufgabe von Seite 1, das Verfahren der Autoren

$ze := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \end{bmatrix}$ Probe $rz \cdot ze = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \end{bmatrix}$

a) Es gilt $rz \cdot ze = re$, also $rz = re \cdot ze^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rohstoffe nach Zwischenprodukten

Bestellung Zwischenprodukte $aa := \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 82 \\ 86 \\ 52 \end{bmatrix}$ Rohstoffe, die benötigt werden.

b) $ba := \begin{bmatrix} be1 \\ 3 \cdot be1 \\ 150 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} be1 \\ 3 \cdot be1 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \cdot be1 + 600 \\ 7 \cdot be1 + 300 \\ 5 \cdot be1 + 450 \end{bmatrix}$ $ze \cdot ba = \begin{bmatrix} 11 \cdot be1 + 600 \\ 7 \cdot be1 + 300 \\ 5 \cdot be1 + 450 \end{bmatrix}$ $zeba := \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z2+10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z2+10 \end{bmatrix}$

$solve(ze \cdot ba = zeba, be1, z1, z2) \rightarrow be1=70$ and $z1=1370$ and $z2=790$

$ba/be1=70 \rightarrow \begin{bmatrix} 70 \\ 210 \\ 150 \end{bmatrix}$ Endprodukte werden geliefert.

1.2

c) $gls := re \cdot \begin{bmatrix} e1c \\ e2c \\ e3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4530 \\ 4410 \\ 4030 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \cdot e1c + 14 \cdot e2c + 21 \cdot e3c = 4530 \\ 12 \cdot e1c + 13 \cdot e2c + 21 \cdot e3c = 4410 \\ 11 \cdot e1c + 12 \cdot e2c + 19 \cdot e3c = 4030 \\ 6 \cdot e1c + 6 \cdot e2c + 10 \cdot e3c = r4 \end{bmatrix}$

$loc := solve(gls, e1c, e2c, e3c, r4) \rightarrow e1c=80$ and $e2c=120$ and $e3c=90$ and $r4=2100$

Probe $gls|loc \rightarrow \begin{bmatrix} true \\ true \\ true \\ true \end{bmatrix}$ Man braucht R_4 2100 ME, es werden hergestellt $\begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 90 \end{bmatrix}$ E_1, E_2, E_3

Anderer Ansatz, bei dem annähernd gleich viel E_1, E_2 und E_3 hergestellt wird.

Rohstoffeinsatz=Zeilensummen $re \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 47 \\ 46 \\ 42 \\ 22 \end{bmatrix} = \frac{4530}{47} \cdot 96,383 \frac{4410}{46} \cdot 95,8696$

$\frac{4030}{42} \cdot 95,9524$ $bc := \begin{bmatrix} 96 \\ 95 \\ 95 \end{bmatrix}$ Bestellung, für die R_1, R_2 und R_3 reichen. $re \cdot bc = \begin{bmatrix} 4477 \\ 4382 \\ 4001 \\ 2096 \end{bmatrix}$ Es

werden 2096 ME von R_1 gebraucht. Es bleiben übrig: 53 ME von R_1 , 28 ME von R_2 , und 29 ME von R_3 .

1.3

Problem mit dem hier leider üblichen Begriff ME (Mengeneinheit):

$rz \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = rz \cdot ze = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \text{gegeben: } re = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

Zunächst seien alle Rohstoffe in Litern angeben.
 Dann haben Endprodukte $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot re = \begin{bmatrix} 41 & 45 & 71 \end{bmatrix}$ Liter (jeweils Spaltensummen).
 und die die Zwischenprodukte $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot rz = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 11 \end{bmatrix}$ Liter.
 Die Das Volumen der Endprodukte ist dann in Litern $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot rz \cdot ze = \begin{bmatrix} 41 & 45 & 71 \end{bmatrix}$
 Das passt, aber der ME "Mengeneinheit" ist unsinnig. Also nenne ich die Zwischenprodukte "Dickflasche Z1" "Eimer Z2" und "Eimer Z3", letztere sind nur zufällig gleich groß.
 Die Endprodukte nenne ich "Ballon E1", "Kanister E2" und "Fass E3"
 Dann heißen die Aufgaben: a) Wieviele Liter von jedem Rohstoff werden benötigt, damit 8 Dickflaschen Z1, 12 Eimer Z2 und 14 Eimer Z3 hergestellt werden können.
 b) Ein Kunde bestellt 150 Fässer E3 von von E2 dreimal so viele Kanister, wie er von E1 Ballone bestellt. "Die dreifache Menge" ist eine grob falsche Formulierung.wenn Eimer....
 c) Liter am Lager.... Wieviele Ballone, Kanister und Fässer werden dann hergestellt?

Wenn die Rohstoffe "Ampullen, Flaschen, Gläser, Töpfe" wären wären die Spaltensummen unsinnig und man hätte dann z.B. in einem Kanister 14 Ampullen R_1 , 13 Flaschen R_2 , 12 Gläser R_3 und 6 Töpfe R_4 .

1.4

Gozinto anteilig

Gozinto-Aufgabe mit "Schüttgütern" ist nur mit Buchteilen oder Prozenten sinnvoll.
 Übung 9 Aufgabe 3 Umgerechnet in relative Abgaben. Spaltensummen sind 1

$$ze := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{realt} := \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{realt} = \begin{bmatrix} 41 & 45 & 71 \\ 41 & 45 & 71 \\ 41 & 45 & 71 \\ 41 & 45 & 71 \\ 41 & 45 & 71 \\ 41 & 45 & 71 \end{bmatrix}$$

$$re := \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 41 & 45 & 71 \\ 12 & 13 & 21 \\ 41 & 45 & 71 \\ 11 & 12 & 19 \\ 41 & 45 & 71 \\ 6 & 6 & 10 \\ 41 & 45 & 71 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 41 & 45 & 71 \\ 12 & 13 & 21 \\ 41 & 45 & 71 \\ 11 & 12 & 19 \\ 41 & 45 & 71 \\ 6 & 6 & 10 \\ 41 & 45 & 71 \end{bmatrix} \quad \text{Es gilt } rz \cdot ze = re \quad rz = re \cdot ze^{-1} = \begin{bmatrix} 11597 & 17576 & 771 \\ 43665 & 43665 & 2911 \\ 17419 & 5932 & 771 \\ 43665 & 43665 & 2911 \\ 3777 & 3981 & 799 \\ 14555 & 14555 & 2911 \\ 1106 & 2738 & 570 \\ 14555 & 14555 & 2911 \end{bmatrix}$$

$$rz = \begin{bmatrix} 0.26559 & 0.402519 & 0.264857 \\ 0.398924 & 0.135853 & 0.264857 \\ 0.259498 & 0.273514 & 0.274476 \\ 0.075988 & 0.188114 & 0.195809 \end{bmatrix} \quad \text{Spaltensummen } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot rz = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1

Zwischenprodukte in Litern $aa := \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} \quad rz \cdot aa = \begin{bmatrix} 465598 \\ 43665 \\ 372446 \\ 43665 \\ 133918 \\ 14555 \\ 81604 \\ 14555 \end{bmatrix} \quad rz \cdot aa = \begin{bmatrix} 10.663 \\ 8.52962 \\ 9.20082 \\ 5.6066 \end{bmatrix} \quad \text{erfordert}$

Rohstoffe in Litern. Probe $\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, rz \cdot aa \right) = 34$ Rohstoffe und $\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, aa \right) = 34$ Liter gewünscht.

b) Liter-Bestellung $bb = \begin{bmatrix} bel \\ 3 \cdot bel \\ 150 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} bel \\ 3 \cdot bel \\ 150 \end{bmatrix} \quad ze \cdot bb = \begin{bmatrix} 19 \cdot bel + 290 \\ 10 \cdot 3 \\ 6 \cdot bel + 100 \\ 5 \cdot 3 \\ 9 \cdot bel + 50 \\ 10 \end{bmatrix} \quad zebb = \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z2+10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z2+10 \end{bmatrix}$

$lo := \text{solve}(ze \cdot bb = zebb, bel, z1, z2) = \begin{bmatrix} 200 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{and } bel = \frac{200}{9} \quad \text{and } z1 = \frac{980}{9} \quad \text{and } z2 = 60$

$lo = bel = 22.2222 \text{ and } z1 = 108.889 \text{ and } z2 = 60. \quad \text{Das Ergebnis ist jetzt total anders als in Problem 1}$

2.2

$$bb|lo = \begin{bmatrix} 200 \\ 9 \\ 200 \\ 3 \\ 150 \end{bmatrix} \quad bb|lo = \begin{bmatrix} 22.2222 \\ 66.6667 \\ 150 \end{bmatrix} \quad \text{dotP} \left(bb|lo, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{2150}{9} \quad \text{dotP} \left(bb|lo, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 238.889$$

$$zebb|lo = \begin{bmatrix} 980 \\ 9 \\ 60 \\ 70 \end{bmatrix} \quad \text{dotP} \left(zebb|lo, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{2150}{9} \quad \text{Die Bestellung ist genau so viele Liter, wie man}$$

Zwischenprodukte in Litern verwendet.

$$re \cdot (bb|lo) = \begin{bmatrix} 71.611 \\ 70.1295 \\ 63.8807 \\ 33.2677 \end{bmatrix} \quad rz \cdot zebb|lo = \begin{bmatrix} 71.611 \\ 70.1295 \\ 63.8807 \\ 33.2677 \end{bmatrix} \quad \text{Rohstoffe in Litern auf zwei Arten gerechnet.}$$

$$\text{dotP} \left(re \cdot (bb|lo), \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{2150}{9} \quad \text{und ebenso viele Liter Rohstoffe gehören dazu. Der Begriff}$$

"Mengeneinheit" kann nur einheitlich als einund dieselbe Volumen- oder Masseneinheit aufgefasst werden. Tonnen, Scheffel, Zentner sonst bekommt man Ärger mit der Physik.

2.3

c) $gls := re \cdot \begin{bmatrix} e1c \\ e2c \\ e3c \\ rd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4530 \\ 4410 \\ 4030 \\ rd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \cdot e1c + 14 \cdot e2c + 21 \cdot e3c = 4530 \\ 41 \cdot 45 \cdot 71 \\ 12 \cdot e1c + 13 \cdot e2c + 21 \cdot e3c = 4410 \\ 41 \cdot 45 \cdot 71 \\ 11 \cdot e1c + 4 \cdot e2c + 19 \cdot e3c = 4030 \\ 41 \cdot 15 \cdot 71 \\ 6 \cdot e1c + 2 \cdot e2c + 10 \cdot e3c = rd \\ 41 \cdot 15 \cdot 71 \end{bmatrix}$

$loc := \text{solve}(gls, e1c, e2c, e3c, rd) = \begin{bmatrix} 3280 \\ 5400 \\ 6390 \\ 2100 \end{bmatrix} \quad \text{e1c}=3280 \text{ and } e2c=5400 \text{ and } e3c=6390 \text{ and } rd=2100$

Probe $gls|loc = \begin{bmatrix} true \\ true \\ true \\ true \end{bmatrix} \quad \text{Man braucht R4 2100 liter, herstellt} \quad \begin{bmatrix} e1c \\ e2c \\ e3c \end{bmatrix} | loc = \begin{bmatrix} 3280 \\ 5400 \\ 6390 \end{bmatrix} \quad \text{E1, E2, E3}$

Die Bestellung sind $\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} e1c \\ e2c \\ e3c \end{bmatrix} | loc, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 15070$ Liter und $\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} 4530 \\ 4410 \\ 4030 \\ rd \end{bmatrix} | loc, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 15070$

Rohstoffeinsatz, wieder gleich viele Liter.

2.4