

Gozinto original

Gotinto-Verflechtungs-Aufgabe (Üb 9 Didaktik) **Haftendorn** www.mathematik-verstehen.de

Die folgende Aufgabe ist hier in Problem 1 so gelöst, wie sich das die Autoren vorgestellt haben.

In Problem 2 folgt die Lösung, die die Mengen Bruchteile umrechnet. (ob. Site bei Wirtschaft)

Aus Bohner-Ihlenburg-Ott: Mathematik für berufliche Gymnasien, Lineare Algebra,

Wirtschaftliche Anwendungen, Merkur-Verlag Rinteln 2005 ISBN 3-8120-05551-4 S. 52

3. Ein Betrieb fertigt aus den Materialien R_1 , R_2 , R_3 und R_4 die Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 und Z_3 . Diese werden dann zu den Endprodukten E_1 , E_2 und E_3 verarbeitet. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch folgende Tabellen gegeben:

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	3	4
Z_2	1	2	2
Z_3	2	1	3

	E_1	E_2	E_3
R_1	12	14	21
R_2	12	13	21
R_3	11	12	19
R_4	6	6	10

- Wie viel ME von jedem Rohstoff werden benötigt, damit 8 ME von Z_1 , 12 ME von Z_2 und 14 ME von Z_3 hergestellt werden können?
- Ein Geschäftspartner bestellt 150 ME von E_3 und von E_2 die dreifache Menge von E_1 . Wie viel ME der Endprodukte werden geliefert, wenn vom Zwischenprodukt Z_3 10 ME mehr als von Z_2 benötigt wird.
- Laut Inventur sind von Rohstoff R_1 4530 ME, von R_2 4410 ME und von R_3 4030 ME am Lager. Wie viel ME von R_4 sind anzufordern, damit dieser Lagerbestand vollständig zu Endprodukten verarbeitet werden kann. Wie viel ME von jedem Endprodukt werden dann hergestellt?

Im Problem 2 prozensual!

Gozinto-Aufgabe von Seite 1, das Verfahren der Autoren

$$\mathbf{ze} := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{re} := \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{Probe } \mathbf{rz} \cdot \mathbf{ze} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Es gilt $\mathbf{rz} \cdot \mathbf{ze} = \mathbf{re}$, also $\mathbf{rz} := \mathbf{re} \cdot \mathbf{ze}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rohstoffe nach Zwischenprodukten

Bestellung Zwischenprodukte $\mathbf{aa} := \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \mathbf{rz} \cdot \mathbf{aa} \rightarrow \begin{bmatrix} 98 \\ 82 \\ 86 \\ 52 \end{bmatrix}$ Rohstoffe, die benötigt werden.

b) $\mathbf{ba} := \begin{bmatrix} be1 \\ 3 \cdot be1 \\ 150 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} be1 \\ 3 \cdot be1 \\ 150 \end{bmatrix} \quad \mathbf{ze} \cdot \mathbf{ba} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 \cdot be1 + 600 \\ 7 \cdot be1 + 300 \\ 5 \cdot be1 + 450 \end{bmatrix} \quad \mathbf{zeba} := \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z2 + 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z2 + 10 \end{bmatrix}$

$\text{solve}(\{\mathbf{ze} \cdot \mathbf{ba} = \mathbf{zeba}, be1, z1, z2\}) \rightarrow be1 = 70 \text{ and } z1 = 1370 \text{ and } z2 = 790$

$\mathbf{ba}|_{be1=70} \rightarrow \begin{bmatrix} 70 \\ 210 \\ 150 \end{bmatrix}$ Endprodukte werden geliefert.

c) $\text{gls} := \text{re} \cdot \begin{bmatrix} e1c \\ e2c \\ e3c \\ r4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4530 \\ 4410 \\ 4030 \\ r4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 \cdot e1c + 14 \cdot e2c + 21 \cdot e3c = 4530 \\ 12 \cdot e1c + 13 \cdot e2c + 21 \cdot e3c = 4410 \\ 11 \cdot e1c + 12 \cdot e2c + 19 \cdot e3c = 4030 \\ 6 \cdot e1c + 6 \cdot e2c + 10 \cdot e3c = r4 \end{bmatrix}$

$\text{loc} := \text{solve}(\text{gls}, e1c, e2c, e3c, r4) \rightarrow e1c=80 \text{ and } e2c=120 \text{ and } e3c=90 \text{ and } r4=2100$

Probe $\text{gls}|\text{loc} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{true} \\ \text{true} \\ \text{true} \\ \text{true} \end{bmatrix}$ Man braucht R4 2100 ME, es werden hergestellt $\begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 90 \end{bmatrix}$ E1, E2, E3

Anderer Ansatz, bei dem annähernd gleich viel E1, E2 und E3 hergestellt wird.

Rohstoffeinsatz=Zeilensummen $\text{re} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 47 \\ 46 \\ 42 \\ 22 \end{bmatrix}$ $\frac{4530}{47} \rightarrow 96.383$ $\frac{4410}{46} \rightarrow 95.8696$

$\frac{4030}{42} \rightarrow 95.9524$ $\text{bc} := \begin{bmatrix} 96 \\ 95 \\ 95 \end{bmatrix}$ Bestellung, für die R1, R2 und R3 reichen. $\text{re} \cdot \text{bc} \rightarrow \begin{bmatrix} 4477 \\ 4382 \\ 4001 \\ 2096 \end{bmatrix}$ Es

werden 2096 ME von R1 gebraucht. Es bleiben übrig: 53 ME von R1, 28 ME von R2, und 29 ME von R3.

Problematic mit dem hier leider üblichen Begriff ME (Mengeinheit):

$$\text{rz} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ze} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{rz} \cdot \text{ze} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \text{gegeben: re} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Zunächst seien alle **Rohstoffe in Litern** angeben.

Dann haben Endprodukte $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{re} \rightarrow \begin{bmatrix} 41 & 45 & 71 \end{bmatrix}$ Liter (jeweils Spaltensummen).

und die Zwischenprodukte $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{rz} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 11 & 11 \end{bmatrix}$ Liter.

Die Das Volumen der Endprodukte ist dann in Litern $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{rz} \cdot \text{ze} \rightarrow \begin{bmatrix} 41 & 45 & 71 \end{bmatrix}$

Das passt, aber der **ME "Mengeinheit" ist unsinnig**. Also nenne ich die Zwischenprodukte "Dickflasche Z1", "Eimer Z2" und "Eimer Z3", letztere sind nur zufällig gleich groß.

Die Endprodukte nenne ich "Ballon E1", "Kanister E2" und "Fass E3"

Dann heißen die Aufgaben: a) Wieviele Liter von jedem Rohstoff werden benötigt, damit 8 Dickflaschen Z1, 12 Eimer Z2 und 14 Eimer Z3 hergestellt werden können.

b) Ein Kunde bestellt 150 Fässer E3 von von E2 dreimal so viele Kanister, wie er von E1 Ballone bestellt.

"Die dreifache Menge" ist eine grob falsche Formulierung.wenn Eimer....

c) Liter am Lager.... **Wieviele Ballone, Kanister und Fässer** werden dann hergestellt?

Wenn die **Rohstoffe "Ampullen, Flaschen, Gläser, Töpfe"** wären wären die Spaltensummen unsinnig und man hätte dann z.B. in einem Kanister 14 Ampullen R1, 13 Flaschen R2, 12 Gläser R3 und 6 Töpfe R4.

Gozinto anteilig

Gozinto-Aufgabe mit "Schüttgütern" ist nur mit Buchteilen oder Prozentsinnvoll.

Übung 9 Aufgabe 3 Umgerechnet in relative Abgaben. Spaltensummen sind 1

$$\begin{aligned}
 \mathbf{ze} &:= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{6} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{6} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{6} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{6} & \frac{3}{9} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{6} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{6} & \frac{3}{9} \end{bmatrix} & \mathbf{realt} &:= \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 12 & 13 & 21 \\ 11 & 12 & 19 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad [1 \ 1 \ 1 \ 1] \cdot \mathbf{realt} \rightarrow [41 \ 45 \ 71] \\
 \\
 \mathbf{re} &:= \begin{bmatrix} \frac{12}{41} & \frac{14}{45} & \frac{21}{71} \\ \frac{12}{41} & \frac{13}{45} & \frac{21}{71} \\ \frac{11}{41} & \frac{12}{45} & \frac{19}{71} \\ \frac{6}{41} & \frac{6}{45} & \frac{10}{71} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{12}{41} & \frac{14}{45} & \frac{21}{71} \\ \frac{12}{41} & \frac{13}{45} & \frac{21}{71} \\ \frac{11}{41} & \frac{4}{45} & \frac{19}{71} \\ \frac{6}{41} & \frac{15}{45} & \frac{10}{71} \end{bmatrix} & \text{Es gilt } \mathbf{rz} \cdot \mathbf{ze} = \mathbf{re} & \mathbf{rz} := \mathbf{re} \cdot \mathbf{ze}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{11597}{43665} & \frac{17576}{43665} & \frac{771}{2911} \\ \frac{43665}{17419} & \frac{43665}{5932} & \frac{2911}{771} \\ \frac{3777}{14555} & \frac{3981}{14555} & \frac{799}{2911} \\ \frac{14555}{1106} & \frac{14555}{2738} & \frac{2911}{570} \end{bmatrix} \\
 \\
 \mathbf{rz} &\rightarrow \begin{bmatrix} 0.26559 & 0.402519 & 0.264857 \\ 0.398924 & 0.135853 & 0.264857 \\ 0.259498 & 0.273514 & 0.274476 \\ 0.075988 & 0.188114 & 0.195809 \end{bmatrix} & \text{Spaltensummen } [1 \ 1 \ 1 \ 1] \cdot \mathbf{rz} &\rightarrow [1 \ 1 \ 1]
 \end{aligned}$$

2.1

Zwischenprodukte in Litern $\mathbf{aa} := \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}$ $\mathbf{rz} \cdot \mathbf{aa} \rightarrow \begin{bmatrix} 465598 \\ 43665 \\ 372446 \\ 43665 \\ 133918 \\ 14555 \\ 81604 \\ 14555 \end{bmatrix}$ $\mathbf{rz} \cdot \mathbf{aa} \rightarrow \begin{bmatrix} 10.663 \\ 8.52962 \\ 9.20082 \\ 5.6066 \end{bmatrix}$ erfordert

Rohstoffe in Litern. Probe $\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{rz} \cdot \mathbf{aa} \right) \rightarrow 34$ Rohstoffe und $\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{aa} \right) \rightarrow 34$ Liter gewünscht.

b) Liter-Bestellung $\mathbf{bb} := \begin{bmatrix} be1 \\ 3 \cdot be1 \\ 150 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} be1 \\ 3 \cdot be1 \\ 150 \end{bmatrix}$ $\mathbf{ze} \cdot \mathbf{bb} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{19 \cdot be1}{10} + \frac{200}{3} \\ \frac{6 \cdot be1}{5} + \frac{100}{3} \\ \frac{9 \cdot be1}{10} + 50 \end{bmatrix}$ $\mathbf{zebb} := \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z2+10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z2+10 \end{bmatrix}$

$\mathbf{lo} := \text{solve}(\mathbf{ze} \cdot \mathbf{bb} = \mathbf{zebb}, be1, z1, z2) \rightarrow be1 = \frac{200}{9}$ and $z1 = \frac{980}{9}$ and $z2 = 60$

$\mathbf{lo} \rightarrow be1 = 22.2222$ and $z1 = 108.889$ and $z2 = 60$. **Das Ergebnis ist jetzt total anders als in Problem 1**

2.2

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{bb|lo} \rightarrow \begin{bmatrix} 200 \\ 9 \\ 200 \\ 3 \\ 150 \end{bmatrix} \quad \mathbf{bb|lo} \rightarrow \begin{bmatrix} 22.2222 \\ 66.6667 \\ 150. \end{bmatrix} \quad \text{dotP}\left(\mathbf{bb|lo}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightarrow \frac{2150}{9} \quad \text{dotP}\left(\mathbf{bb|lo}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightarrow 238.889 \\
 \\
 \mathbf{zebb|lo} \rightarrow \begin{bmatrix} 980 \\ 9 \\ 60 \\ 70 \end{bmatrix} \quad \text{dotP}\left(\mathbf{zebb|lo}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightarrow \frac{2150}{9} \quad \text{Die Bestellung ist genau so viele Liter, wie man} \\
 \text{Zwischenprodukte in Litern verwendet.} \\
 \\
 \mathbf{re} \cdot (\mathbf{bb|lo}) \rightarrow \begin{bmatrix} 71.611 \\ 70.1295 \\ 63.8807 \\ 33.2677 \end{bmatrix} \quad \mathbf{rz} \cdot \mathbf{zebb|lo} \rightarrow \begin{bmatrix} 71.611 \\ 70.1295 \\ 63.8807 \\ 33.2677 \end{bmatrix} \quad \text{Rohstoffe in Litern auf zwei Arten gerechnet.} \\
 \\
 \text{dotP}\left(\mathbf{re} \cdot (\mathbf{bb|lo}), \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightarrow \frac{2150}{9} \quad \text{und ebenso viele Liter Rohstoffe gehören dazu. Der Begriff} \\
 \\
 \text{"Mengeneinheit" kann nur einheitlich als ein und dieselbe Volumen- oder Masseneinheit} \\
 \text{aufgefasst werden. Tonnen, Scheffel, Zentner sonst bekommt man Ärger mit der Physik.}
 \end{array}$$

2.3

c) $\text{gls} := \text{re} \cdot \begin{bmatrix} e1c \\ e2c \\ e3c \\ r4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4530 \\ 4410 \\ 4030 \\ r4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot e1c}{41} + \frac{14 \cdot e2c}{45} + \frac{21 \cdot e3c}{71} = 4530 \\ \frac{12 \cdot e1c}{41} + \frac{13 \cdot e2c}{45} + \frac{21 \cdot e3c}{71} = 4410 \\ \frac{11 \cdot e1c}{41} + \frac{4 \cdot e2c}{15} + \frac{19 \cdot e3c}{71} = 4030 \\ \frac{6 \cdot e1c}{41} + \frac{2 \cdot e2c}{15} + \frac{10 \cdot e3c}{71} = r4 \end{bmatrix}$

$\text{loc} := \text{solve}(\text{gls}, e1c, e2c, e3c, r4) \rightarrow e1c=3280 \text{ and } e2c=5400 \text{ and } e3c=6390 \text{ and } r4=2100$

Probe $\text{gls}|\text{loc} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{true} \\ \text{true} \\ \text{true} \\ \text{true} \end{bmatrix}$ Man braucht R4 2100 liter, herstellt $\begin{bmatrix} e1c \\ e2c \\ e3c \end{bmatrix}|\text{loc} \rightarrow \begin{bmatrix} 3280 \\ 5400 \\ 6390 \end{bmatrix}$ E1, E2, E3

Die Bestellung sind $\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} e1c \\ e2c \\ e3c \end{bmatrix}|\text{loc}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightarrow 15070$ Liter und $\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 4530 \\ 4410 \\ 4030 \\ r4 \end{bmatrix}|\text{loc}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightarrow 15070$

Rohstoffeinsatz, wieder gleichviele Liter.

2.4