Verhältnisse als bijektive Abbildungen

Zahlenverhältnisse

Man erklärt zunächst für **natürliche** Zahlen:

Def. 1 Sind a, b natürliche Zahlen, V(a) und V(b) die Mengen ihrer positiven Vielfachen, so ist das *Verhältnis a : b* (gelesen "a zu b") die bijektive Abbildung f:

$$V(a) \rightarrow V(b) \quad \text{mit } f(x) = (x : a) \cdot b \quad \text{für alle x aus } V(a).$$

Man beachte, dass $x : a$ hierbei stets erklärt ist.

Ist ggt (a, b) ≠ 1, so kann man in naheliegender Weise kürzen und erhält das "*Grundverhältnis*" a* : b*. Der Definitionsbereich V(a*) der zugehörigen Abbildung f* ist Obermenge von V(a).

Die Abbildung f ist, extensional gedeutet, eine Menge von geordneten Zahlenpaaren (x, f(x)). Man kann also umgekehrt auch erweitern. Jedes derartige Paar *repräsentiert* das gegebene Verhältnis.

Fasst man die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen auf und repräsentiert sie durch Mengen, so entspricht Definition 1 exakt einer der beiden von Mitschka angegebenen Deutungen und elementaren Darstellungen des Verhältnisbegriffs, nämlich dem Sprachgebrauch "zwei *zu* drei".

Man kann dann sogar das "Zu-Null-Verhältnis" als Sonderfall in dieser Weise deuten. Bei "5 : 0" hat man dann eine Abbildung mit einem einelementigen Definitionsbereich und einem einelementigen Wertebereich. Es gibt kein Erweitern oder Kürzen, weil es nur eine leere Menge gibt bzw. weil die "Vielfachenmenge" von 0 einelementig ist.

Auch die zweite bei Mitschka angegebene anschauliche Deutung eines Verhältnisses durch Zerlegung der Gesamtmenge in gleichmächtige Teilmengen hat eine Entsprechung in der Umgangssprache, nämlich "zwei Teile ..., drei Teile...".

Für **rationale** Zahlen gilt:

Def. 2 Sind a, b positive rationale Zahlen, V(a) und V(b) die Mengen ihrer positiven Vielfachen, so ist das *Verhältnis a : b* die bijektive Abbildung f: $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$\text{mit } f(x) = (x : a) \cdot b \quad \text{für alle x } \mathbb{Q}.$$

Man beachte: Die Definition gleicht weitgehend der für natürliche Zahlen. Aber: Nicht nur Definitions- und Wertebereich der Abbildung sind jetzt die

Menge der rationalen Zahlen, auch die "Verhältniszahlen" a, b können rational sein. In gewissen Sachzusammenhängen kann es sinnvoll sein zu sagen "60,4 zu 90,6 wie 1 zu 1,5".

Die Einschränkung auf *positive* rationale Zahlen entspricht dem praktischen Gebrauch des Verhältnisbergriffs. (Mir ist nicht bekannt, ob negative Verhältnisse irgendwo sinnvoll angewendet werden.)

Da rationale Zahlen jedoch beliebig teilbar sind, gibt es hier kein *Grundverhältnis*.

Die Abbildung f kann wiederum extensional verstanden werden als Klasse geordneter Paare (x, f(x)), wobei diese Zahlen nun rational sein können. Doch gibt es offenbar stets ein zu (a, b) äquivalentes Paar positiver *ganzer* Zahlen, so dass das Verhältnis als Abbildung wie im Falle von natürlichen Zahlen als Klasse von Paaren natürlicher Zahlen aufgefasst werden und durch ein einzelnes derartiges Zahlenpaar repräsentiert werden kann.

Größenverhältnisse

Man kann zunächst für kommensurable Größen *eines* Größenbereichs analog zum Vorgehen bei natürlichen und rationalen Zahlen erklären:

Def. 3 Sind g und h Größen desselben Größenbereichs $(\mathbb{G}, +, <)$ und sind die Größen g und h kommensurabel, also darstellbar als Vielfache einer Größe e aus $\mathbb{G}$ mit $g = \mathrm{m} \cdot e$ und $h = \mathrm{n} \cdot e$, sind ferner $\mathrm{V}(g)$ und $\mathrm{V}(h)$ die Mengen der Vielfachen von g und h, *so* ist das *Größenverhältnis g : h* die bijektive Abbildung f: $\mathrm{V}(g) \to \mathrm{V}(h)$

$$\text{mit } \mathrm{f}(x) = (x : \mathrm{m}) \cdot \mathrm{n} \quad \text{für alle } x \text{ aus } \mathrm{V}(x).$$

Das Größenverhältnis zweier kommensurabler Größen desselben Größenbereichs ist als Abbildung also eindeutig definiert durch das Zahlenverhältnis der Maßzahlen zweier einander zugeordneter Größen.

Man beachte: In $\mathbb{G}$ gibt es keine Multikplikation. Das Vervielfachen muss (und kann) rekursiv definiert werden.

Wichtig ist ferner: In jedem Größenbereich gilt das Lösbarkeitsgesetz, d. h. für $g < h$ muss die Gleichung $g + x = h$ stets eindeutig lösbar sein. Dies garantiert, dass mit dem Verfahren der so genannten Wechselwegnahme analog zum Euklidischen Algorithmus für natürliche Zahlen die gemeinsame Maßeinheit e für kommensurable Größen stets nicht nur existiert, sondern auch in endlich vielen Schritten bestimmt werden kann.

Man liest leider bis hin zu Examens- und Bachelorarbeiten z. B. immer wieder "Beweise" der Strahlensätze, bei denen die übliche Strahlensatzfigur in eine "passende" Parallelenschar eingebettet wird, ohne auch nur ein Wort darüber zu verlieren, wie man sie findet und somit ob es sie - vom Problem der Inkommensurabilität einmal abgesehen - überhaupt gibt.

Die Einschränkung des Definitionsbereichs der Abbildung in Def. 3 auf die Vielfachen von g ist notwendig, weil nicht alle Größenbereiche die so genannte Teilbarkeitseigenschaft haben. Stückzahlen, die meisten Münz- und Gewichtsysteme, auch die natürlichen Zahlen selbst, haben die allgemeine Struktur eines Größenbereichs, nicht aber die Teilbarkeitseigenschaft:

> Ein Größenbereich $\mathbb{G}$ heißt **divisibel**, wenn es zu jeder Größe g aus $\mathbb{G}$ und jeder natürlichen Zahl n eine Größe h in $\mathbb{G}$ gibt mit $\mathrm{n} \cdot h = g$.

Für divisible Größenbereiche gilt dann in Analogie zu Defition 2:

Def. 3 Sind g und h Größen desselben Größenbereichs $(\mathbb{G}, +, <)$, ist $\mathbb{G}$ divisibel und sind die Größen g und h kommensurabel, also darstellbar als Vielfache einer Größe e aus $\mathbb{G}$ mit $g = \mathrm{m} \cdot e$ und $h = \mathrm{n} \cdot e$, so ist das *Größenverhältnis* $g : h$ die bijektive Abbildung $\mathrm{f}: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$

$$\text{mit } \mathrm{f}(x) = (x : \mathrm{m}) \cdot \mathrm{n} \quad \text{für alle } x \text{ aus } \mathbb{G}.$$

Beide bei Mitschka für endliche Mengen gegebenen Deutungen des Verhältnisbegriffs sind im Einklang mit dem deutschen Sprachgebrauch auch für Größen sinnvoll.

Am Beispiel der Längen: Man sagt "Länge zu Breite wie drei *zu* zwei." und beschreibt durch das Längenverhältnis der Seiten ein Rechteck, unabhängig von seinen Abmessungen. Die *Verkettung* "Länge *zu* Breite *zu* Höhe" ist sinnvoll, wenn Verhältnisse als bijektive *Abbildungen* aufgefasst werden.

Zerlegt man hingegen eine einzelne Strecke in gleichlange Abschnitte - Längen haben die Teilbarkeitseigenschaft - so könnte man sagen "Drei rote, zwei blau Teilstücke usw." Dies entspricht bei den endlichen Mengen einer Zerlegung der Gesamtmenge in gleichmächtige Teilmengen.

Nicht kommensurable Größen desselben Größenbereichs

Hier kann man (leider) wie bei den irrationalen Zahlenverhältnissen "nur" auf Näherungsverfahren wie z. B. Intervallschachtelungen verweisen.
Aber: Es bleibt festzuhalten, dass das Größenverhältnis gerade in diesen Fällen eine bijektive Abbildung des ganzen Größenbereichs auf sich ist.
Beispiel: Das (irrationale) Verhältnis des goldenen Schnitts ordnet *jeder* Länge eine ganz bestimmte Länge zu. Wir sprechen von einer Teilung im Verhältnis des goldenen Schnitts wiederum *unabhängig* von der Größe der gerade betrachteten Figur.

Verhältnisse bei Größen verschiedener Größenbereiche - Proportionalitäten

Man spricht von der Ware-Preis-*Relation*, und die umgangssprachliche Redeweise von einem "festen" Verhältnis deutet schon darauf hin, dass dies im Alltag eher die Ausnahme ist. Gleichwohl ist der Verhältnisbegriff nicht nur theoretisch auch für die Beziehung zwischen verschiedenen Größenbereichen von zentraler Bedeutung. Hier gilt:

Def. 4 Eine Abbildung f eines Größenbereichs $\mathbb{G}_1$ in einen Größenbereich $\mathbb{G}_2$ heißt *Proportionalität* genau dann, wenn für alle Größen g, h aus $\mathbb{G}_1$ gilt

$$f(g + h) = f(g) + f(h)$$
(Additionsbedingung)

sowie für jede Größe g aus $\mathbb{G}_1$ und jeder natürliche Zahl m

$$f(m\ g) = m\ f(g)$$
(Multiplikationsbedingung)

Additions- und Multiplikationsbedingung sind gleichwertig. Der Nachweis ist aber nicht ganz trivial. Man braucht vollständige Induktion.

Die Definition der Proportionalität zeigt auf den ersten Blick keine Verwandtschaft mit den Verhältnisdefinitionen 1 bis 3, doch sind in ihr gleich mehrere Aussagen über Verhältnisse bei den durch eine Proportionalität einander zugeordneten Größenbereichen enthalten:

1. Es muss gelten:

$$g : h = f(g) : f(h)$$

Beide Verhältnisse sind Größenverhältnisse im Sinne von Def. 3. Das linke, $g : h$, bezieht sich auf den Größenbereich $\mathbb{G}_1$, das rechte auf $\mathbb{G}_2$. Die Gleichsetzung ist aber legitim, weil in der Gleichung eine Aussage über die Gleichheit der *Maßzahlverhältnisse* gemacht wird.

2. Die Abbildung f ordnet den Größen von $\mathbb{G}_1$ Größen von $\mathbb{G}_2$ zu, Warenmengen Preise, Wegstrecken Zeiten und so fort. Wenn man bei einer solchen Zuordnung mitunter vom "Ware-Preis-Verhältnis" spricht, so ist eine solche Ausdrucksweise nur sinnvoll, wenn man "Verhältnis" als Abbildung auffasst. Ein Zahlenverhältnis muss nicht, aber kann - je nach Kontext - als Quotient aufgefasst werden. Eine Division "Ware : Preis" oder "Wegstrecke : Zeitspanne" hingegen ist zunächst einmal sinnlos. Wohl aber gilt:

> Bei einer Proportionalität bilden die Maßzahlen einander zugeordneter Größen quotientengleiche Zahlenpaare.

Auf diesem Satz beruht das Rechnen mit dem so genannten *Proportionalitätsfaktor*, also mit Ausdrücken wie "Euro pro Liter", und mit abgeleiteten Größen wie z. B. Geschwindigkeit oder Verbrauch in Liter pro 100 km, denn man kann zeigen, dass sich für Proportionalitätsfaktoren und damit auch für abgeleitete Größen jeweils wiederum die Struktur eines Größenbereichs ergibt.

Hierzu wie überhaupt zu Verhältnis und Proportionalität ausführlicher in: Grundprobleme des Sachrechnens, Freiburg, 1979, 101 ff. und 160 ff. Ob man in der heutigen Physik mit solchem Rechnen mit (abgeleiteten) Größen auskommt, überblicke ich allerdings nicht.

Anmerkungen zu Terminologie und Sprache

Abschließend noch kurz zu Punkten, die ich in unserer Diskussion zur Terminologie unnötig verwirrend fand:

Teil-Teil-Verhältnis, Teil-Ganzes-Verhältnis: Dies ist eine klare und sofort verständliche Unterscheidung.

internes, externes Verhältnis: Dies hingegen finde ich nicht hilfreich - und sei es auch von Freudenthal - weil man diese Unterscheidung auf Teil-Teil/Teil-Ganzes, auf den Sachzusammenhang Jungen/Mädchen (obwohl es in beiden Fällen um Anzahlen geht), auf innere und äußere Teilung in der Geometrie oder auf vieles sonst beziehen könnte.

Es scheint mir einfacher zu sein, stattdessen genauer von Zahlen- oder von Größenverhältnissen zu sprechen und wo erforderlich anzufügen, ob mehrere Größenbereiche oder mehre Sachbereiche oder aber nur ein Größenbereich angesprochen sind.

Bruch und Verhältnis - Oberbegriff und Aspekt

Ich habe die Literaturstellen (Padberg / Führer), die hier schematisch einander gegenübergestellt wurden, nicht nachprüfen können, habe aber den Eindruck, dass hier in Bezug auf Begriff und Oberbegriff einerseits und Aspekt andererseits etwas durcheinanderging: Da Verhältnisse Teil-Teil- oder aber Teil-Ganzes-Verhältnisse sein können, während es sich bei Bruch und Bruchzahl - jedenfalls in ihrer zentralen Bedeutung - stets um eine Teil-Ganzes-Beziehung handelt, ist der Verhältnisbegriff zweifellos allgemeiner. "Aspekt" ist aber nicht gleich "Spezialfall" oder "Unterbegriff", sondern bedeutet schon vom Wort her so viel wie "im Blick auf", "ein Gesichtspunkt von". Und dann sind die Verhältnisse in der Tat ein Aspekt des Bruchzahlbegriffs, weil Bruchzahlen benutzt werden können, um ein Verhältnis zu charakterisieren.