Werden bei EAN oder ISBN Zahlendreher erkannt?

www.mathematik-verstehen.de **Prof. Dr. Dörte Haftendorn 2005/2008**

Erinnerung: Die EAN hat 13 Ziffern. die ersten 12 werden abwechselnd mit 1 und 3 malgenommen, die Summe wird von der Prüfziffer zum nächsten Zehner ergänzt.
Im Schulunterricht lässt man zuerst frei suchen und probieren, planvolle Listen erstellen. (Klasse 4 bis 7) Ein Beweis ist dann oft nicht nötig, ab Klasse 7 oder 8 aber hübsch.
Vertauschung der benachbarten Ziffern a und b, also ab soll es sein und ba wird geschrieben.
In die Gesamtsumme wird also statt $3a+b$ nun $a+3b$ eingebracht oder umgekehrt.
Der Zahlendreher wird genau dann nicht gemerkt, wenn $3a+b=a+3b+n\cdot 10$, also wenn gilt $2a-2b=n\cdot 10$, also $2(a-b)=n\cdot 10 \Leftrightarrow a-b=n\cdot 5$ mit einer ganzen Zahl n. Ist n=0, so ist a=b und es ist gar kein Zahlendreher.
Für n=1 ergeben sich für Zahlendreher die Paare (94..49; 83..38; 72..27; 61..16; 50..05), die also nicht von der Prüfziffer entdeckt werden. n=2 u.s.w. ist mit Ziffer a und b nicht möglich.
Alle anderen Zahlendreher werden von der Prüfziffer entdeckt.
Entscheidend ist, dass diese Panne nur passieren konnte, weil die 10 durch 2 teilbar ist.

Übrigens werden **Einzelfehler**, Ziffer x statt y, immer erkannt. Da muss man aber mehrere Fälle betrachten. Am 1-Platz ist alles klar, da man mit einer einzigen Ziffernänderung keinen Fehler von 10 machen kann. Am 3-Platz bei der EAN hat man eine Änderung von 3*(x-y) und das ergibt keinen Zehner, weil 3 nicht 10 teilt. Zwei Einzelfehler können sich aber aufheben. (Beispiele suchen und finden!). Einzelfehler bei der ISBN an Platz k führen zu k*(x-y)=n*11 und das ist wegen der prim-Eigenschaft von 11 auch nicht erfüllbar.

Erinnerung: Die ISBN hat 10 Ziffern.
Methode 1: Die ersten 9 werden nacheinander mit 10,9,8,....2 malgenommen, die Summe wird von der Prüfziffer zum nächsten Elfer ergänzt. Die Ergänzung 10 wird als Prüfziffer X geschrieben.
Methode 2: Die ersten 9 Ziffern werden nacheinander mit 1,2,3,...,9 malgenommen und die Produkte zur Summe S addiert. Dann ist die Prüfziffer der Rest von S beim Teilen durch 11.
Für Kenner: S mod 11= p.
Wie oben folgt hier eine Gleichung $k\cdot a+(k+1)\cdot b=k\cdot b+(k+1)\cdot a+n\cdot 11$, also $k\cdot a+k\cdot b+b=k\cdot b+k\cdot a+a+n\cdot 11$, also $b-a=n\cdot 11$, wieder mit ganzzahligem n. n=0 ist wieder trivial, und für n=1 oder n=-1 ist die Gleichung nicht mit Ziffern erfüllbar, erst recht nicht mit (betragsmäßig) größeren n. **Damit ist die ISBN sicher gegen Zahlendreher.**
D**ie ISBN erkennt sogar jede Ziffernvertauschung, auch wenn die Ziffern nicht Nachbarn sind.**
Beweis $k\cdot a+(k+j)\cdot b=k\cdot b+(k+j)\cdot a+n\cdot 11$, also $j\cdot(b-a)=n\cdot 11$.
Da 11 aber nun eine Primzahl ist, müsste sie j oder die Klammer teilen, beides geht nicht. q.e.d.
Für Kenner: $j\cdot(b-a)=0 \bmod 11$ ist unmöglich, da $(\mathbb{Z}_{11},\cdot)$ Gruppe ist, keine Nullteiler hat.