Differential und Integral

Mathematik in wxMaxima www.mathematik-verstehen.de Haftendorn Okt 2010

0.1 Handlinghilfen

0.2 Inhalt

1 Differentialrechnung

1.1 Differential

```
--> f(x):=sin (x^2-1);
```

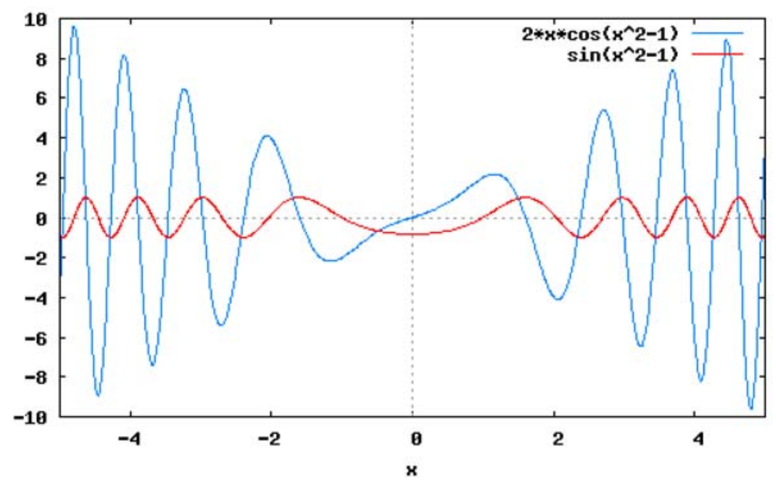
(%o52) $f(x):=\sin\left(x^2-1\right)$

Für diese Funktion werden zwei Arten der Ableitungsdefinition vorgestellt.
Zuerst die "naheliegende":

```
--> foo(x) := diff(sin (x^2-1), x);
```

(%o29) $foo(x):=\operatorname{diff}\left(\sin\left(x^2-1\right),x\right)$

```
--> wxplot2d([foo(x),f(x)], [x,-5,5])$
```

(%t53) 

Das sieht eigentlich ganz gut aus, allerdings ist es nur eine "symbolische" Angabe für foo. Man kann nun nicht ohne Weiteres für x einen Wert einsetzen, das ergibt eine Fehlermeldung:

```
--> foo(3);
```

diff : second argument must be a variable; found 3
#0: foo(x=3)
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Das geht nicht, weil nun vesucht wird in den sinus schon 3 einzusetzen und d
nach 3 abzuleiten. Das geht natürlich nicht.
Man muss das Auswerten des Term erzwingen, dass macht man mit doppelt geschr
'' (nicht " !!!!! im Schriftbils der Eingabeschrift sieht das leider gleich
Dieses tut der Plotbefehl intern noch nachträglich.

```
--> fs(x) := ''(diff(sin (x^2-1), x));
```

(%o32) $\mathrm{fs}(x):=2\,x\cos\left(x^2-1\right)$

```
--> fs(3);
```

(%o33) $6\cos(8)$

Wenn man, wie meist üblich die Ableitung, ihrerseits als Funktion untersuche
muss!!!! man so vorgehn.

1.2 Nullstellen der Ableitungen

```
--> solve(fs(x)=0,x);
```

solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

(%o78) $\left[x=-\frac{\sqrt{\%pi+2}}{\sqrt{2}},x=\frac{\sqrt{\%pi+2}}{\sqrt{2}},x=0\right]$

```
--> %,numer;
```

(%o79) $[x=-1.60337030245508,x=1.60337030245508,x=0]$

Zweite Ableitung

```
--> fss(x):=''(diff(fs(x),x));
```

(%o82) $\mathrm{fss}(x):=2\cos\left(x^2-1\right)-4\,x^2\sin\left(x^2-1\right)$

1.3 Zweite Ableitung

Die zweite Ableitung kann man bei der nicht empfohlenen Art
nicht als Ableitung der ersten Ableitung bilden.

```
--> foooo:=diff(foo(x),x);
```

Improper function definition:
foooo
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

1.4 Nullstellen mit numerischen Methoden

Nullstellen der zweiten Ableitung

--> solve(fss(x),x);

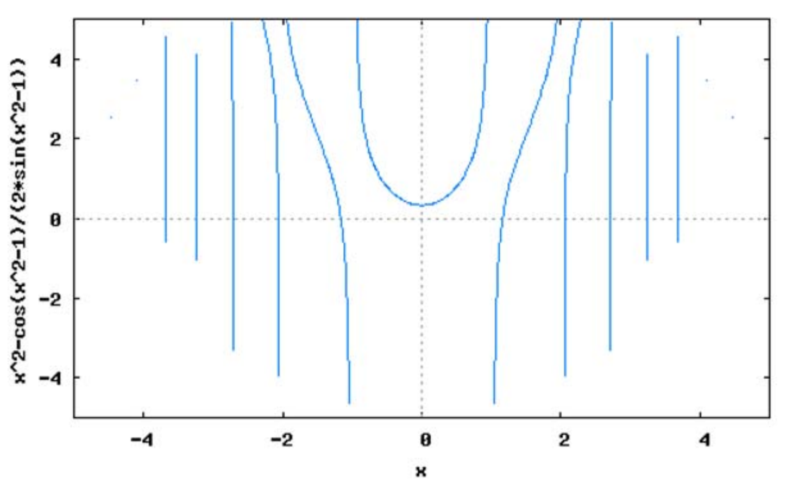
(%o84) $[x^2 = \frac{\cos(x^2-1)}{2\,\sin(x^2-1)}]$

Dieses ist eine transzendente Gleichung, d.h. hier: x steht frei und in
transzendenten Funktionen. Solche Gleichungen sind meist nur numerisch lösba
Darum wird die zweite Ableitung erstmal gezeichnet, damit man sinnvolle Bere

--> wxplot2d([x^2-cos(x^2-1)/(2*sin(x^2-1))], [x,-5,5],[y,-5,5])$

plot2d: some values were clipped.

(%t86)



Bei x=1 ist sicher der Pol, rechts davon sieht man eine Nullstelle

--> find_root(x^2=cos(x^2-1)/(2*sin(x^2-1)),x,1.1,2);

(%o87) 1.163526047086561

find_root arbeitet mit dem Sekantenverfahren, darum muss man ein Intervall a
Es geht auch mit dem Newtonverfahren.

--> load (newton1);

(%o73) *C:/Programme/Maxima-5.20.1/share/maxima/5.20.1/share/numeric/newton1.mac*

--> newton (x^2-cos(x^2-1)/(2*sin(x^2-1)), x, 1.1, 1/100);

(%o88) 1.163497638021661

1.5 Regeln

--> diff(f(x)*g(x),x);

(%o4) $f(x)\left(g(x)\frac{d}{d\,x}\right)+g(x)\left(f(x)\frac{d}{d\,x}\right)$

--> diff(f(x)/g(x),x);

(%o5) $\frac{f(x)\frac{d}{d\,x}}{g(x)}-\frac{f(x)\left(g(x)\frac{d}{d\,x}\right)}{g(x)^2}$

Die Kettenregel kann man nur an Beispielen zeigen.

```
--> f(x):=sin(x)^3;
    diff(f(x),x);
```

(%o15) $f(x):=\sin(x)^3$

(%o16) $3\cos(x)\sin(x)^2$

2 Intergralrechnung

2.1 Unbestimmte Integrale

```
--> integrate(x^2*sin(x^3),x);
```

(%o89) $-\frac{\cos(x^3)}{3}$

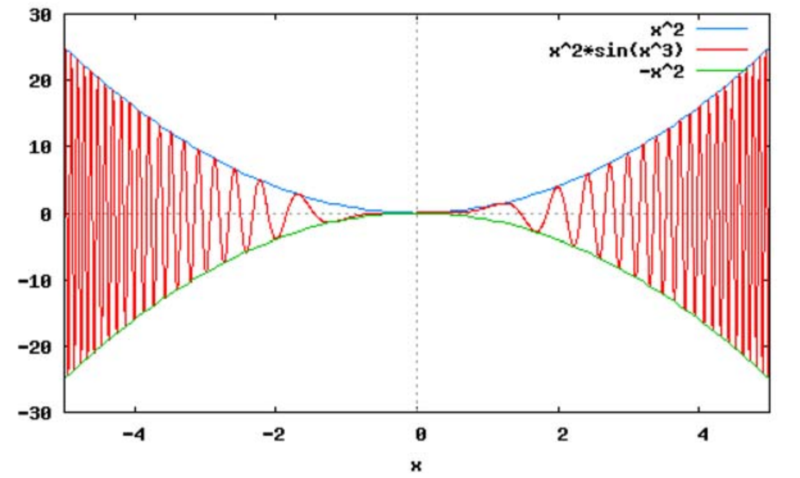
```
--> integrate(1/x,x);
```

(%o90) $\log(x)$

2.2 Bestimmte Integrale

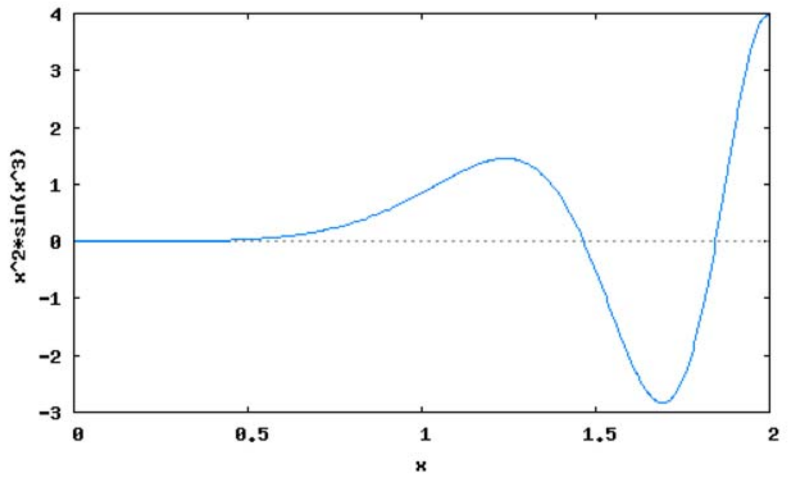
```
--> wxplot2d([x^2,x^2*sin(x^3),-x^2], [x,-5,5])$
```

(%t58)




```
--> wxplot2d([x^2*sin(x^3)], [x,0,2])$
```

(%t18)



--> solve(sin(x^3)=0,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

(%o46) $[x=0]$

Mit Denken, erste Nullstelle rechts des Sinus

--> xd:(%pi)^(1/3);float(%);

(%o52) $\%pi^{1/3}$

(%o53) 1.464591887561523

Numerisch

--> x0:find_root(x^2*sin(x^3),x,1,1.6);

(%o29) 1.464591887561523

--> integrate(x^2*sin(x^3),x,0,x0);

rat: replaced 1.464591887561523 by 7859/5366 = 1.464591874767052
rat: replaced 1.464591887561523 by 7859/5366 = 1.464591874767052
rat: replaced 1.464591887561523 by 7859/5366 = 1.464591874767052
rat: replaced 1.464591887561523 by 7859/5366 = 1.464591874767052
rat: replaced 1.464591887561523 by 7859/5366 = 1.464591874767052
rat: replaced 1.464591887561523 by 7859/5366 = 1.464591874767052
rat: replaced 1.464591887561523 by 7859/5366 = 1.464591874767052
rat: replaced 1.464591887561523 by 7859/5366 = 1.464591874767052
rat: replaced 0.3333333333333333 by 1/3 = 0.3333333333333333

(%o30) $\frac{2}{3}$

Man kann hier erkennen, wie Maxima versucht ein exaktes Ergebnis zu erzeugen.

--> F(x):=''(integrate(x^2*sin(x^3),x));F(x);

(%o40) $F(x):=-\frac{\cos(x^3)}{3}$

(%o41) $-\frac{\cos(x^3)}{3}$

--> F(xd)-F(0);

(%o54) $\frac{2}{3}$

Übrigens zufällig gefunden:
Kann man auch von Hand bestimmen.

--> xz:(%pi/2)^(1/3);

(%o55) $\frac{\%pi^{1/3}}{2^{1/3}}$

```
--> F(xz)-F(0);
```
(%o56) $\frac{1}{3}$

2.3 uneigentliche Integrale

```
--> integrate(1/x^2,x,1,inf);
```
(%o92) 1

```
--> makelist(integrate(1/x^2,x,1,c),c,1,30);
```
(%o95) $[0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\frac{9}{10},\frac{10}{11},\frac{11}{12},\frac{12}{13},\frac{13}{14},\frac{14}{15},\frac{15}{16},\frac{16}{17},\frac{17}{18},\frac{18}{19},\frac{19}{20},\frac{20}{21},\frac{21}{22},\frac{22}{23},\frac{23}{24},\frac{24}{25},\frac{25}{26},\frac{26}{27},\frac{27}{28},\frac{28}{29},\frac{29}{30}]$

```
--> assume(c>2);
```
(%o64) $[c>2]$

```
--> integrate(1/x^2,x,1,c);factor(%);
```
(%o100) $1-\frac{1}{c}$

(%o101) $\frac{c-1}{c}$

```
Achtung, auf die im Folgenden gestellten Fragen
muss man antworten, dann shift enter, damit es weitergeht.
```

```
--> integrate(1/x^a,x,1,c);factor(%);
```
Is $a-1$ *zero or nonzero?*

Is $a-1$ *zero or nonzero?* nonzero;

(%o70) $\frac{1}{a-1}-\frac{c^{1-a}}{a-1}$

(%o71) *nonzero*

```
--> limit(1/(a-1)-c^(1-a)/(a-1),c,inf);
```
Is $a-1$ *positive, negative, or zero?* positive;

(%o65) $\frac{1}{a-1}$

```
--> integrate(tan(x),x,0,%pi/2);
```
defint: integral is divergent.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);