In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

3.2.1 Gerade Strophoide

Aufgabe 3.4 Der Höhenschnittpunkt wandert

Der Text bezieht sich auf folgendeDort sind die Bezeichnungen so gewählt, dass ein Beweis dann leicht fällt. Es ergibt sich eine Strophoide in der Scheitel-Lage. Mit dem

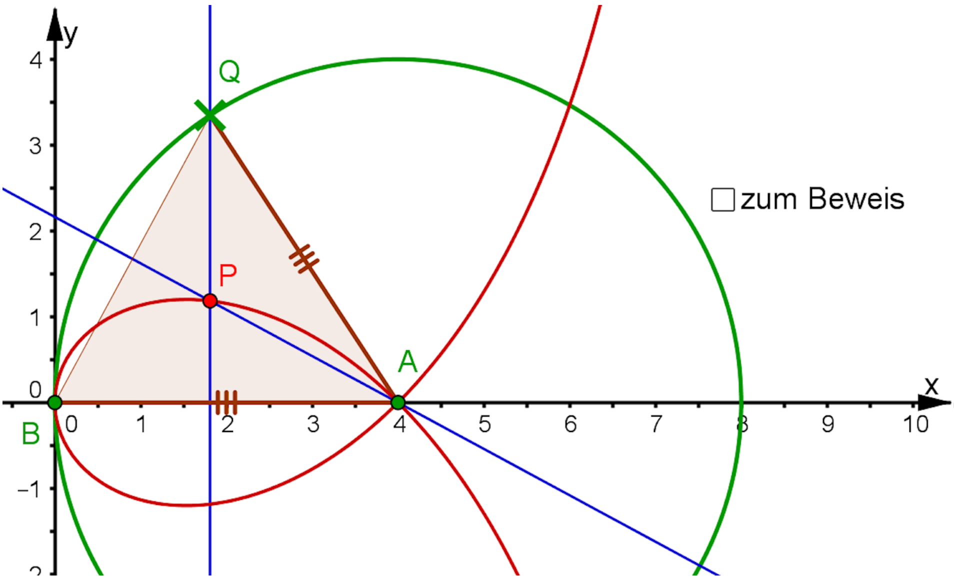

Abb. 3.4 Höhenschnittpunkt im Dreieck
Setze die Punkte $B = (0, 0)$ und $A(a, 0)$ mit beliebigem a.
Schlage um A einen Kreis mit dem Radius $\overline{BA}$ und setze darauf Q zugfest.
Zeichne das Dreieck BAQ und konstruiere zu ihm zwei Höhengeraden.
Gesucht ist die Ortslinie des Höhenschnittpunktes P, wenn Q auf dem Kreis wandert.

Eintragen der Gleichung $(2a - x)y^2 = x(x - a)^2$ $\quad (Gl.3.8)$können Sie das bestätigen. Beweisen Sie es auch geometrisch durch zusätzliches Eintragen von Konstruktionselementen in obiger Abb.
Beweisen Sie es durch Aufstellen der Gleichung für die so erzeugte Kurve.

Hinweis

Für den geometrischen Beweis ist es hilfreich, Q und die von dort ausgehende Höhe an der Geraden $x = a$ zu spiegeln. Für den algebraischen Beweis verfolgt man die Schritte in Abschnitt 3.1.1.4und noch die Tipps in Abschnitt 3.2.1.2. Beide Beweise findet man hier unten, aber versuchen Sie es erst selbst! ◀

Lösung: Die GeoGebra-Datei ist bei der Strophoiden im Menu verlinkt. Für den geometrischen Beweis folgen Sie dem Hinweis. Es ergibt sich das folgende Bild. Der Winkel $\gamma = \angle QAB$ ist der Spitzenwinkel des offensichtlich gleichschenkligen Dreiecks QAB.

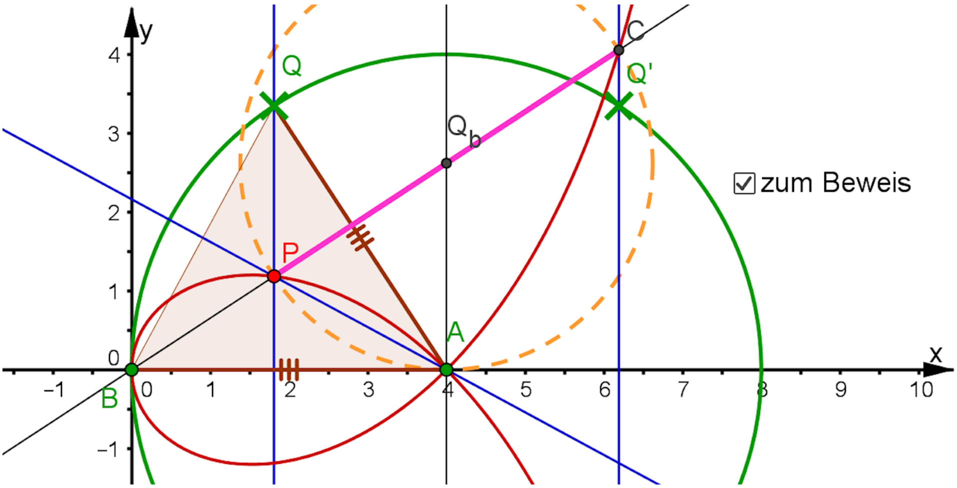

Abb. 3.5 **Höhenschnittpunkt im Dreieck mit Beweiselementen**

Dieser Winkel taucht in der Zeichnung nochmals als $\gamma = \angle PQ_bA$ auf, denn die Schenkel dieser Winkel stehen senkrecht aufeinander. Zu zeigen bleibt, dass das Dreieck PQ_bA auch gleichschenklig ist. Also: in dem kleinen Viereck, in dem $\overline{BP}$ Diagonale ist, gilt $\gamma+\varepsilon+\alpha = \pi$, wenn man $\alpha = \angle ABQ$ und $\varepsilon = \angle APQ_b$ bezeichnet. Weiter gilt $2\alpha+\gamma = \pi$. Führt man das zusammen, folgt $\varepsilon = \alpha$ und damit die Behauptung.

Nun existiert der gelbe Kreis, der der Konstruktionskreis aus der Definition der geraden Strophoide ist.

Herleitung der Gleichung Weg von $Q = (u, v)$ ist $(u - a)^2 + v^2 = a^2$ (Gleichung 1). Sei $M = (\frac{u}{2}, \frac{v}{2})$ die Mitte von $\overline{BQ}$, dann gilt für die Gerade AP: $y = -\frac{\frac{v}{2}}{a-\frac{u}{2}}(x - a)$ (Gleichung 2). Die Senkrechte durch Q bringt $x = u$ (Gleichung 3). Gleichung 3 in 1 ergibt Gl. 4: $x^2 - 2ax + v^2 = 0$ und in 2 wird nach Quadrieren Gl. 5: $y^2(2a - x)^2 = v^2(x - a)^2$. Eliminieren wir nun noch v^2, folgt $y^2(2a - x)^2 = x(2a - x)(x - a)^2$. Weil $u = x = 2a$ kein Dreieck mehr ergeben kann, dürfen wir durch (2a-x) dividieren und erhalten $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$, die Strophoidengleichung 3.8. q.e.d.

GeoGebra-Datei stropho-hoehen-bew.ggb