In: **Kurven erkunden und verstehen**
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

3.2.4 Noch allgemeinere Strophoiden

Aufgabe 3.6 Kreis-Strophoiden
Bei den Pascal'schen Schnecken regt Aufgabe 3.3das Nachdenken über *wesentliche* Veränderungsmöglichkeiten an. Hier könnten B und A feste Punkte sein und die Form der Strophoide hängt dann von der Lage und Größe des Wanderkreises ab. Nur wegen der Gesamtgröße des Bildes ist in Abb. 3.7 dennoch a variiert.

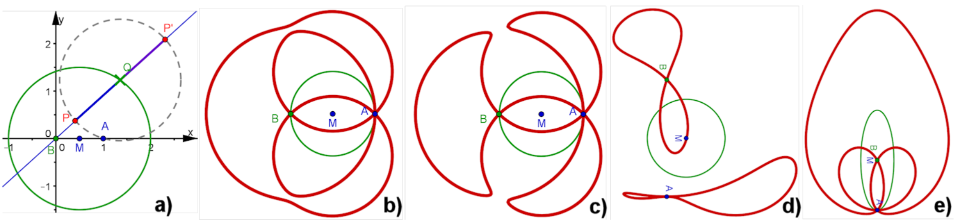

Abb. 3.7 Buch Abb. 3.15 **Strophoide zu Kreisen**
Setze die Punkte $B = (0,0) = O$ und $A(a, 0)$ mit beliebigem a.
Weiter gibt es einen Kreis um ein M. Zunächst ist M die Mitte von Strecke BA. Setze Q zugfest auf den Kreis und schlage um Q einen Kreis mit dem Radius $\overline{QA}$.
Die Schnittpunkte der Geraden BQ und des Kreises sind die gesuchten Punkte P und P'. Deren Ortskurve ist die gesuchte Strophoide. Statt des Kreises ist bei e) eine Ellipse genommen.

1. In Abb. 3.7 ist B im Ursprung und $A = (a, 0)$. Der Parameter a, der Mittelpunkt M des Wanderkreises und der Radius ϱ erfüllen bei b) $a = 4$, $M = (1.99, 0)$, $\varrho = 2$, bei c) $a = 4$, $M = (2.01, 0)$, $\varrho = 2$ und bei d) $a = 3$, $M = (1.5, 0.5)$, $\varrho = 1$. Dabei sind c) und d) um 90^o gedreht dargestellt. Bauen Sie die Konstruktion mit fein steuerbaren Schiebereglern für die Parameter nach und lassen Sie sich von der Formenvielfalt überraschen.
2. Machen Sie sich klar, dass es Geraden gibt, die diese Strophoiden sechsmal schneiden. Also muss die algebraische Gleichung mindestens den Grad 6 haben. Aufstellung einer Gleichung ist mit „Eliminate" möglich – siehe Website – aber der Aufwand lohnt nicht recht. *Hinsehen ist besser.*
3. Der Sonderfall $M = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\varrho = \frac{a}{2}$ zeigt als Ortslinie nur zwei Kreise, sehen Sie sich das an. Die zugehörige Gleichung ist:
$(x^2 + y^2 - a(x + y)) \cdot (x^2 + y^2 - a(x - y)) = 0$. Sie **zerfällt in zwei Faktoren**. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich die beiden Kreise sind, die man sieht. Sehen Sie sich aber auch an, dass nicht P den einen Kreis und P' den anderen Kreis erzeugt.
Mehr zu Gleichungen, die in Produkte zerfallen, finden Sie vor allem in Abschnitt 5.3.3.
4. Zeigen Sie durch ein einfaches geometrisches Argument, dass sich mit $M = A$ **immer allgemeine Kreis-Konchoiden** ergeben und dass diese für $\varrho = a$ Pascal'sche Schnecken sind.

Lösung: GeoGebra-Datei Strophoide-kreis.ggb Hiermit erreichen Sie vor allem Figuren wie oben b) und c). Aber bei Beachtung von Top 3. und 4. können Sie auch die dort genannten Phänomene sehen. Diese zeigt die folgende Abbildung. Obige Abbildungen d) und e) sind um 90^o gedreht und mit einen Dateien im Menu untergebracht.

Zu 2.: Denken Sie die sechsmal schneidenden Geraden. Wenn Sie auf die Rechnung sehen wollen, sie diese von Mathematica geliefert:

$\mathbf{eins} = \boldsymbol{(u - m)\hat{}2 + v\hat{}2 == \rho\hat{}2}$

$(-m+u)^2 + v^2 == \rho^2$

$\mathbf{zwei} = \boldsymbol{(-u+x)^2 + (-v+y)^2 == (a-u)\hat{}2 + v^2}$

$\mathbf{drei} = \boldsymbol{yu == xv}$

$(-u+x)^2 + (-v+y)^2 == (a-u)^2 + v^2$

$uy == vx$

$\mathbf{lo} = \mathbf{Eliminate}[\{\mathbf{eins}, \mathbf{zwei}, \mathbf{drei}\}, \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}]//\mathbf{Simplify}$

$4\left(a^3mx^2 + am(2m-x)x\left(x^2+y^2\right) + \left(-ax+x^2+y^2\right)^2\rho^2\right) == a^4\left(x^2+y^2\right) + \left(x^2+y^2\right)^2\left(4m^2 - 4m\right.$
$a^2\left(4m^2x^2 + 4mx\left(x^2+y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right)^2\right)$

$\mathbf{li} = \mathbf{Subtract@@(lo) == 0}$

$-a^4\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)^2\left(4m^2 - 4mx + x^2 + y^2\right) - a^2\left(4m^2x^2 + 4mx\left(x^2+y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right)^2\right) +$
$4\left(a^3mx^2 + am(2m-x)x\left(x^2+y^2\right) + \left(-ax+x^2+y^2\right)^2\rho^2\right) == 0$

$\mathbf{lo//FullSimplify}$

$4\left(amx\left(a^2x + (2m-x)\left(x^2+y^2\right)\right) + \left(-ax+x^2+y^2\right)^2\rho^2\right) == a^4\left(x^2+y^2\right) +$
$\left(x^2+y^2\right)^2\left((-2m+x)^2+y^2\right) + a^2\left(4m^2x^2 + 4mx\left(x^2+y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right)^2\right)$

Das zweite Produkt auf der rechten Seite hat tatsächlich den Grad 6.

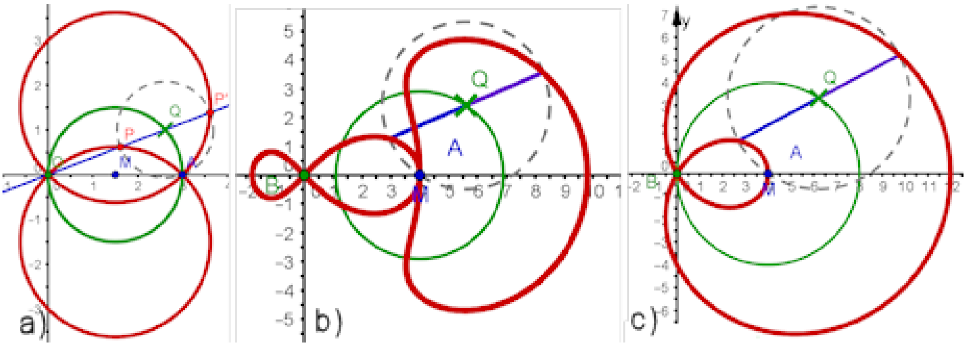

Abb. 3.8 Strophoide: 2 Kreise + Konchoide
a) Sonderfall: Top 3. zwei Kreise, b) Top 4. für $M = A$ Kreiskonchoide, c) Top 4. für $\varrho = a$ Pascal'sche Schnecke

Zu 3.: Überzeugen Sie sich in der GeoGebra-Datei „Sonderfall" unten auf der Strophoiden-Seite im Menu, dass zwei Kreise entstehen. Sie sehen sie auch hier in der Abb. 3.8 a)
Die Rechnung ist:

$$\textbf{eins} = \boldsymbol{(u - a/2)\hat{}2 + v\hat{}2 == a\hat{}2/4}$$

$$\left(-\frac{a}{2} + u\right)^2 + v^2 == \frac{a^2}{4}$$

$$\textbf{zwei} = \boldsymbol{(-u + x)^2 + (-v + y)^2 == (a - u)\hat{}2 + v^2}$$

$$\textbf{drei} = \boldsymbol{yu == xv}$$

$$(-u + x)^2 + (-v + y)^2 == (a - u)^2 + v^2$$

$$uy == vx$$

$$\textbf{lo} = \textbf{Eliminate}[\{\textbf{eins}, \textbf{zwei}, \textbf{drei}\}, \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}]//\textbf{Simplify}$$

$$a\left(a^3\left(x^2 - y^2\right) - 2a^2x\left(x^2 + y^2\right) + 2ay^2\left(x^2 + y^2\right) + 2x\left(x^2 + y^2\right)^2\right) == \left(x^2 + y^2\right)^3$$

$$\textbf{li} = \textbf{Subtract@@(lo)} == \textbf{0}$$

$$-\left(x^2 + y^2\right)^3 + a\left(a^3\left(x^2 - y^2\right) - 2a^2x\left(x^2 + y^2\right) + 2ay^2\left(x^2 + y^2\right) + 2x\left(x^2 + y^2\right)^2\right) == 0$$

li//Factor

$$-\left(-a^2+x^2+y^2\right)\left(-ax+x^2-ay+y^2\right)\left(-ax+x^2+ay+y^2\right)==0$$

Das sind drei Kreise als Produkt. Der vordere aber entsteht nur, weil die blaue Ursprungsgerade gar nicht definiert ist, wenn Q in den Ursprung gewandert ist. Darum entfällt dieser Kreis als Lösung und die beiden roten Kreise im Abb.3.8 a) bleiben übrig.

Zu 4.: Abb. 3.8 b) zeigt, dass $\overline{AQ}$ in der Stellung $M = A$ konstant ist. Damit diese Strecken als **feste** Leine auffassbar und es handelt sich um eine Hundekurven-Konstruktion, bei der der „Herr“ auf einem Kreis läuft. Es ist also eine Konchoide, bei der der Baum nicht auf dem Kreis-Weg steht.
Bei Abb.3.8 c) dagegen steht der Baum auf dem Kreis, wie es für die Pascal'schen Schnecken gefordert ist. Übrigens: erreicht man alle Pascal'schen Schnecken mit dieser allgemeinen Strophoiden-Konstruktion?