Verstehen ist der Schlüssel

Interesse an einem WiMINT-Studium?

Wirtschaft, Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik

Rat bei Interesse am Studium

Überall ist Mathematik drin. Wie soll man das schaffen?

Es brechen so viele Studierende wegen Mathematik ihr Studium ab.

Fragen Sie www.cosh.de oder Ihre Lehrkräfte!

Besuchen Sie in Ihrer Schule **Kurse Mathe +** oder neu eingerichtete **WiMINT-Tutorien**!

Arbeiten Sie selbst auch mit Büchern, die für Sie geschrieben sind!

Kümmern Sie sich um GeoGebra oder andere Software für Mathematik.

Melken Sie das Internet, diskutieren Sie im Tutorium, Freundeskreis oder im Netz!

Es geht um **Ihre Zukunft** und Ihre Freude am **Studium** und am **Beruf!**

Rahmenbedingungen für WiMINT-Tutorien

- In der **Schule**, Jg. 11, 12, 13
- Zusätzlich zum Mathematik-Unterricht
- Realisierbarer zeitlicher Rahmen
- Einsatz von GeoGebra u.a. Mathematik-Tools

Tutoren mit Freude im Herzen:
- Lehrkräfte, auch die, die noch nicht fertig oder längst fertig…..
- Studierende, die an einer Tutorenschulung mitgemacht haben
- Quereinsteiger, die an einer Tutorenschulung mitgemacht haben

Keine Themen des üblichen Lehrplans

Keine Standard-Themen der Hochschulen

Ziele für WiMINT-Tutorien

- Allgemein das Interesse an Mathematik fördern
- Mathematik in unserer Welt aufzeigen
  - Kryptografie,
  - Graphen und Logistik, Knotentheorie
  - Geometrie und Beweise
  - Numerik
- Besondere Aspekte der Analysis(Polynome im Affenkasten….)
- Methoden, die keinen Platz im Lehrplan haben, kennenlernen
  - Polarkoordinaten, auch „gekoppelt“ , Parameterdarstellung
  - Kurven, Kegelschnitte, Implizite Gleichungen
  - 3D-Graphik
  - Komplexe Zahlen, Kreisspiegelung, Zahlaufbau

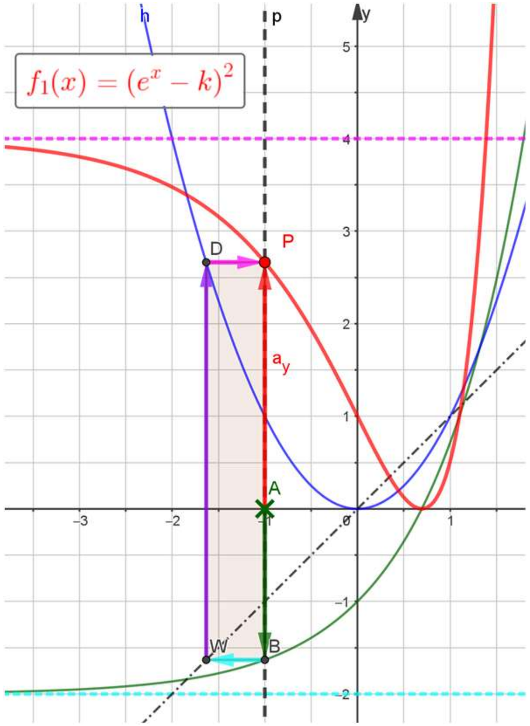
Ich weiß inzwischen von Mathe + Disskussion!!!

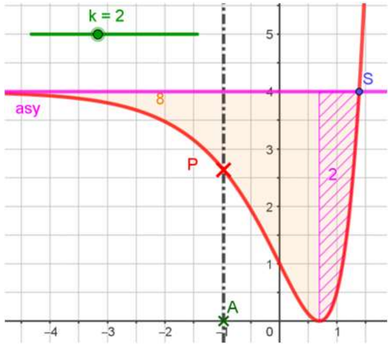
- Freude an Mathematik haben
- Selbst das Vorgehen mitgestalten
- Aktiv sein, Vermutungen aufstellen
- Selbst prüfen mit Mathe-Tools
- Freude haben, wenn das Richtige vorhergesagt ist
- Mit den anderen im Tutorium reden
- Selbstwertgefühl stärken
- Durchhaltevermögen trainieren

- Mathematik als **zentrale Kompetenz der Wissenschaften erahnen oder erfahren**

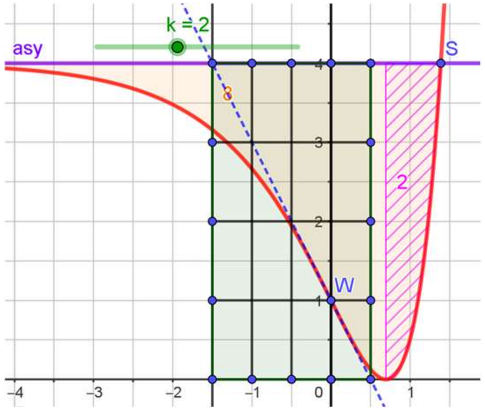
Eulerkasten. Verkettung verstehen, Schlüsse ziehen, Besonderheiten entdecken

$$f_1(x) = (e^x - k)^2$$



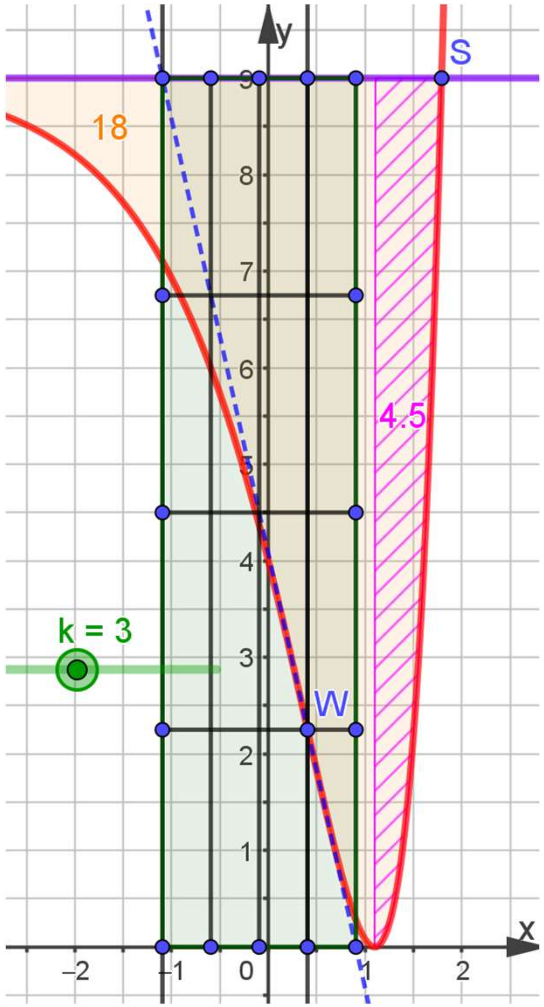


- WKasten = 8
- Zahl
- Int_{links} = 8
- a = -∞
- c = 2
- k = 2



Der WendeKasten ist für jedes k genau zwei Einheiten breit.

- WKasten = 18
- Zahl
- Int_{links} = 18
- a = -∞
- c = 4.5
- k = 3



GeoGebra CAS Erst von Hand rechnen, dann mit CAS prüfen

1	ff(x):=(exp(x)-kk)^2 $\rightarrow\ \mathbf{ff(x)} := (e^x - \mathbf{kk})^2$
2	Löse(ff(x)=0) $\rightarrow\ \{x = \ln(kk)\}$
3	Löse(ff''(x)=0) $\rightarrow\ \left\{x = \ln\left(\frac{kk}{2}\right)\right\}$
4	Wendepunkt(ff(x)) $\rightarrow\ \left\{\left(\ln\left(\frac{1}{2}\ \lvert kk\rvert\right), \frac{kk^2 - 2\ \pi\ \mathrm{sgn}(kk) + 2\ \pi}{4}\right)\right\}$
5	ff'(x)
6	ff'(ln(1/2 kk)) $\rightarrow\ \frac{-1}{2}\ kk^2$
7	Wendesteigung,Wendetangente
8	wt(x):=-1/2 kk^2(x-ln(1/2 kk))+kk^2/4 $\rightarrow\ wt(x) := \frac{-1}{2}\ kk^2\left(-\ln\left(\frac{1}{2}\ kk\right) + x\right) + \frac{1}{4}\ kk^2$

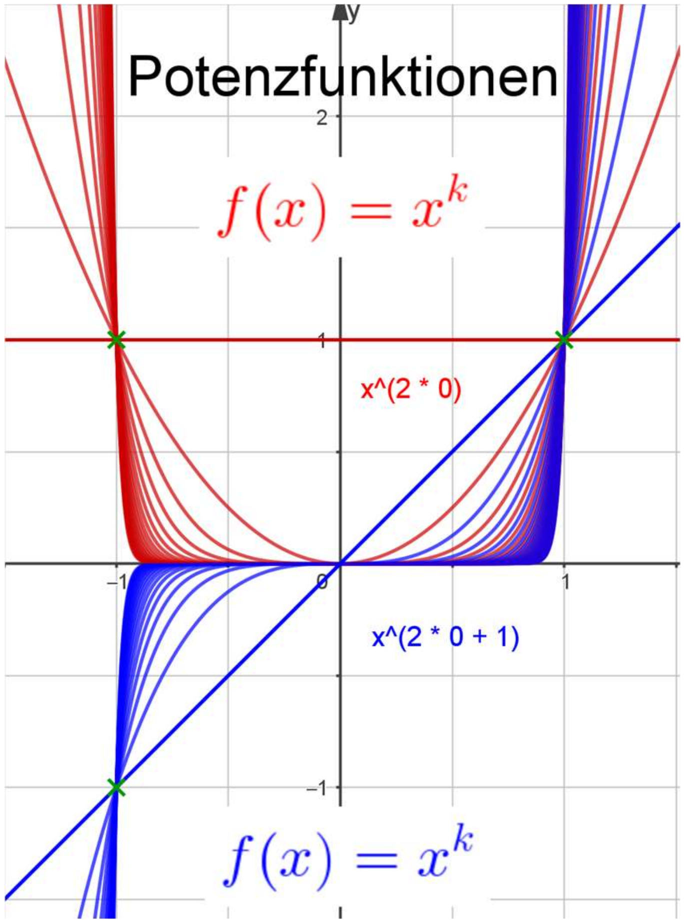
Vom CAS möchte man sicher gern die Aussagen mit dem allgemeinen Parameter k bekommen. Dazu muss man die Objekte im CAS anders benennen. Hier wird der Parameter k als kk bezeichnet. Anderenfalls würde für k gleich die 2 aus dem Grafikfenster genommen. Günstig ist, Doppelbuchstaben zu nehmen.

Einzelne Zeilen spricht man mit $ an. Z.B. $16 holt in $13 die Schnittstelle ab und holt a= $-\infty$ aus dem Grafikfenster.

In $4 wird das Vorzeichen von kk berücksichtigt. Für positive kk steht kk^2/4 für die Ordinate da.

9	Löse(wt(x)=0) $\rightarrow\ \left\{x = \ln\left(\frac{kk}{2}\right) + \frac{1}{2}\right\}$
10	Schnitt asy mit wt
11	Löse(wt(x)=kk^2,x) $\rightarrow\ \left\{x = \ln\left(\frac{kk}{2}\right) - \frac{3}{2}\right\}$
12	Schnitt ff mit asy
13	Löse(ff(x)=kk^2) $\rightarrow\ \{x = \ln(2\ kk)\}$
14	Integrale
15	Integral(kk^2-ff(x),x) $\rightarrow\ 2\ kk\ e^x - \frac{1}{2}\ (e^x)^2 + c_1$
16	Integral(kk² - ff(x), x, a, $13) $\rightarrow\ \frac{1}{2}\ \left(4\ kk\ e^x - (e^x)^2\right) = 2\ kk^2$

Die Vielfachheit von Nullstellen bestimmt die Gestalt und gliedert die Vielfalt



*.ggb $f(x) = x^k$

Der Exponent k gibt die **Vielfachheit** der Nullstelle an.

Je größer der Betrag von k ist, desto dichter ist der Graph in Nullstellennähe an der x-Achse.

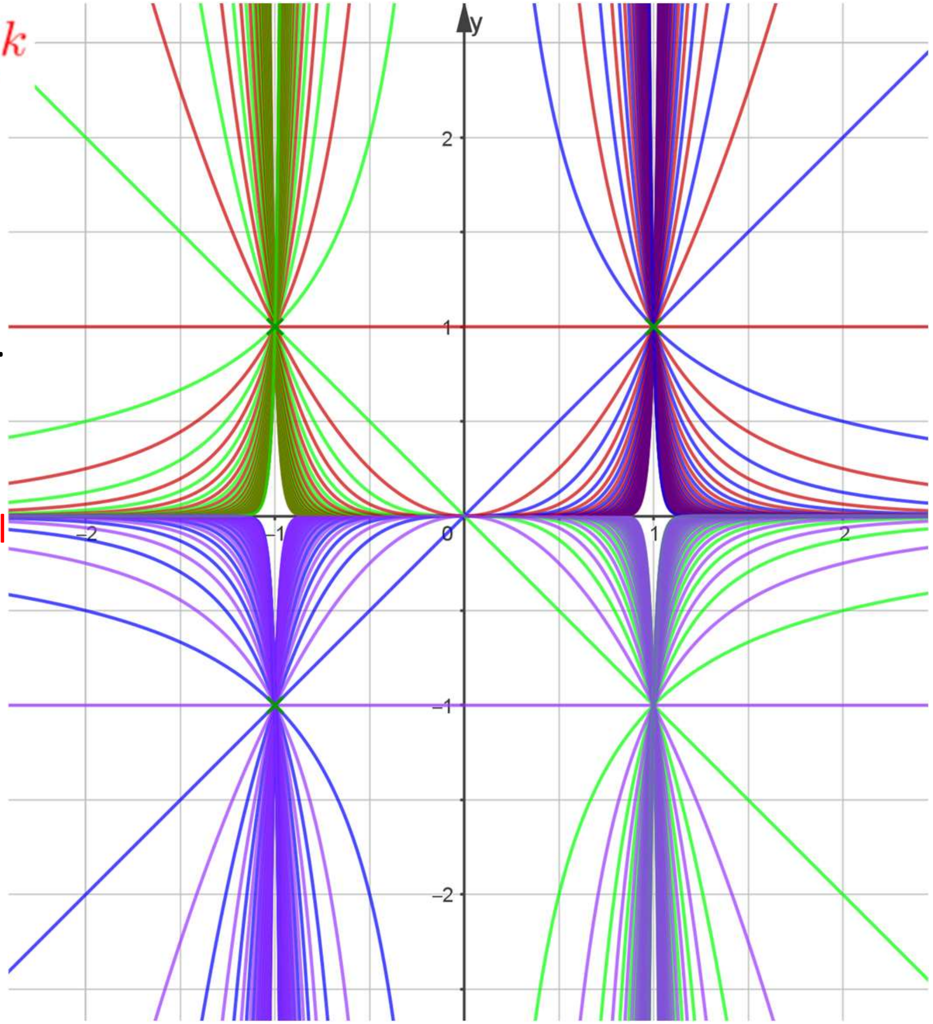
Kein Vorzeichenwechsel für gerade Zahl k.

Pole ohne Vorzeichenwechsel für gerade Zahl k.

$$f(x) = x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$

Vorzeichenwechsel für ungerade Zahl k.

Pole mit Vorzeichenwechsel für ungerade Zahl k.

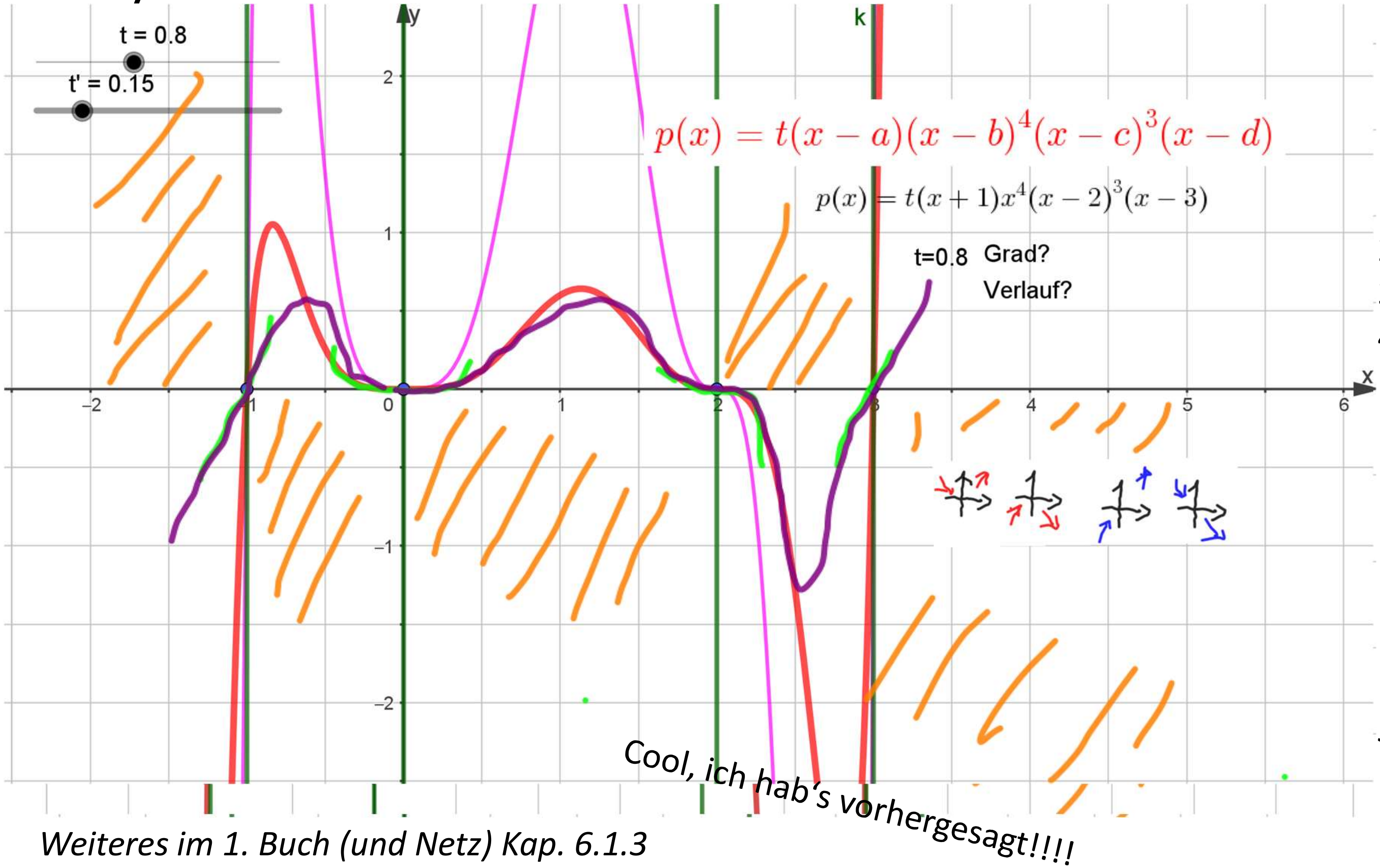


Polynome aus Linearfaktoren Mit Felderabstreichen zu einem qualitativen Graphen gelangen

*.ggb

$$p(x) = t(x-a)(x-b)^4(x-c)^3(x-d)$$

Polynome aus Linearfaktoren Mit **Felderabstreichen** zu einem qualitativen Graphen gelangen

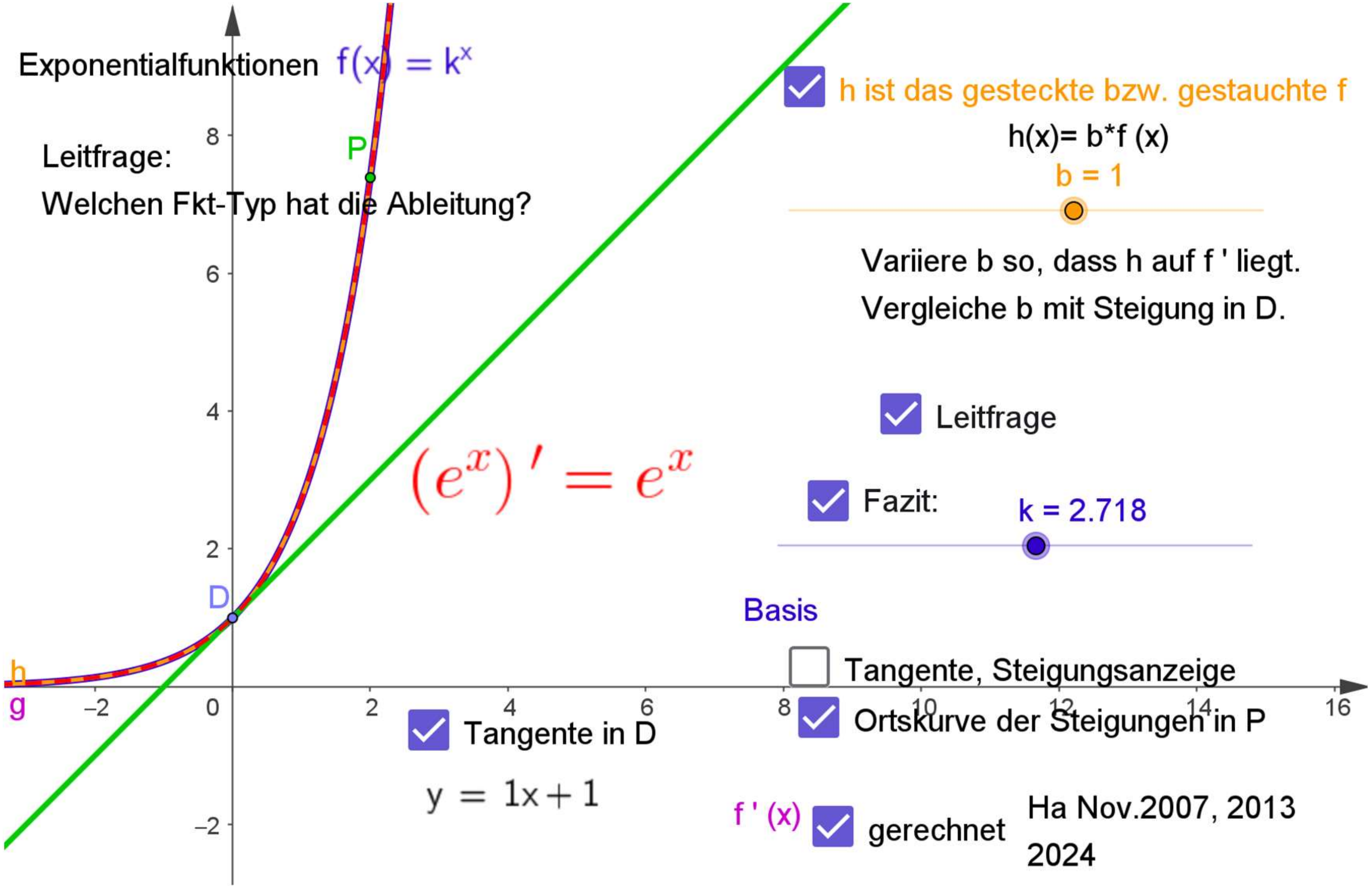


Regeln für das Bewerten von Handzeichnungen:

1. Gesamt-Grad des Polynoms angeben
2. Gesamtverlauf
3. Felder abstreichen (hier Gelb)
4. Nulldurchgänge
   1. Gr=1 schräg
   2. Gr=2 engere (Parabel-)Berührung
   3. Gr=3 engerer Sattel
   4. Gr=4, 6, 8..... breitere Berührungen, *etwa*
   5. Gr=5, 7,9 ….breitere Sättel, *etwa*
5. *i.W. keine anderen „Beulen“ Insbesondere außen keine Biegungen zur x-Achse*

Weiteres im 1. Buch (und Netz) Kap. 6.1.3

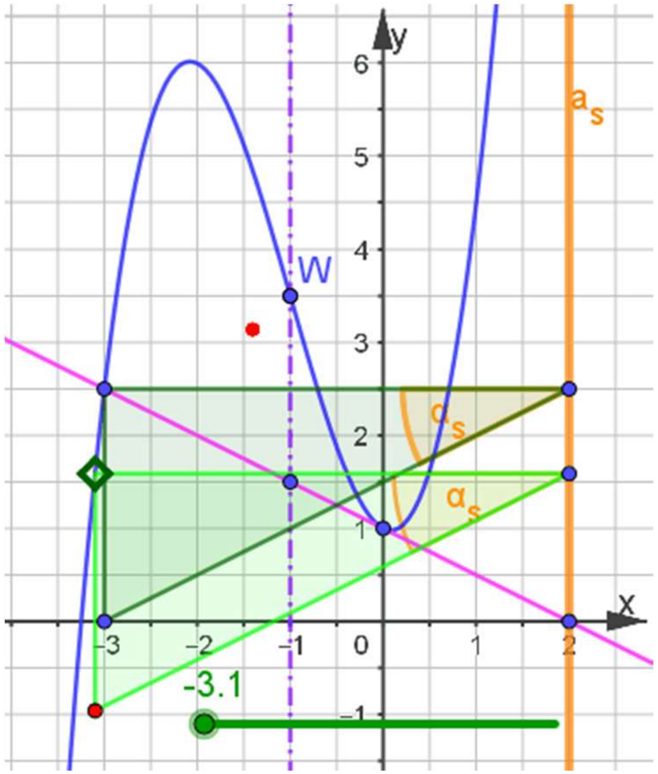
Exponentialfunktionen und ihre Ableitung interaktive Hinführung



*.ggb

*.ggb

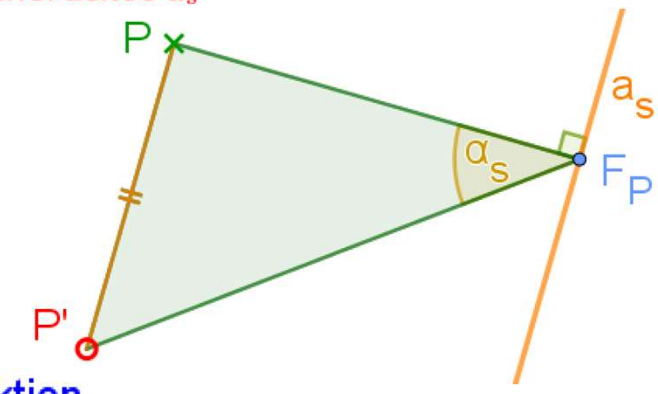
Scherung, das Stiefkind der Analysis und Geometrie



Scherungen sind flächentreu.
Daraus folgen Integral-Aussagen.

Eine Scherung ist definiert durch eine Scherachse a_s und einen Scherwinkel α_s.

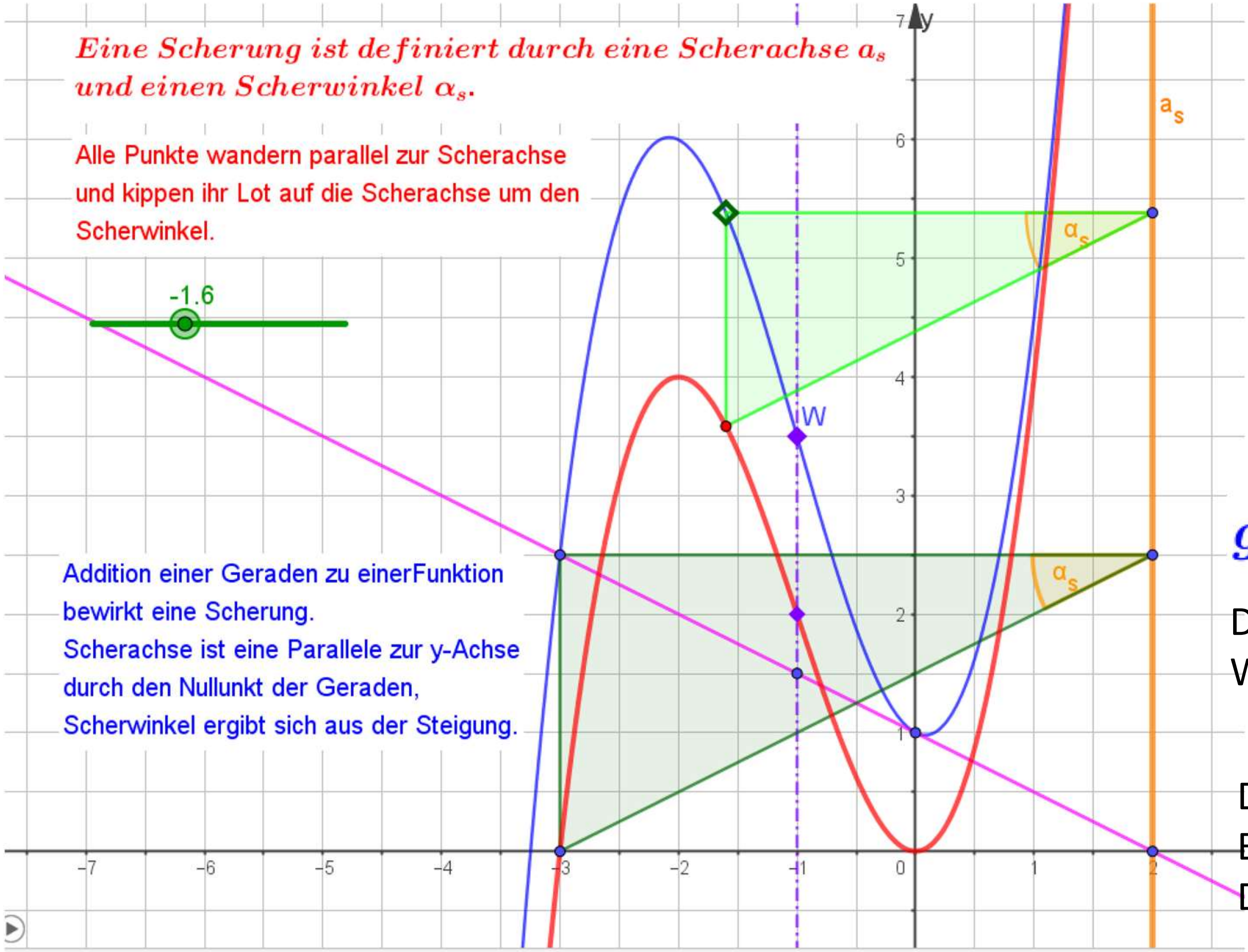
Alle Punkte wandern parallel zur Scherachse und kippen ihr Lot auf die Scherachse um den Scherwinkel.



Addition einer Geraden zu einerFunktion bewirkt eine Scherung.
Scherachse ist eine Parallele zur y-Achse durch den Nullunkt der Geraden,
Scherwinkel ergibt sich aus der Steigung.

Solche Scherungen sind wendestellentreu.
Man kann also bei Funktionen, besonders bei Polynomen, additive Geradenterme weglassen und rechenfreundliche, bequeme Funktionsterme untersuchen. → siehe Polynome im Affenkasten

Polynome aus Linearfaktoren Mit Felderabstreichen zu einem qualitativen Graphen gelangen



*.ggb

Die gescherte Funktion hat eine leicht ablesbare Gleichung:

$$p(x) = t(x+3)x^2$$

Violette Gerade ist $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Das blaue Polynom 3. Grades ist also:

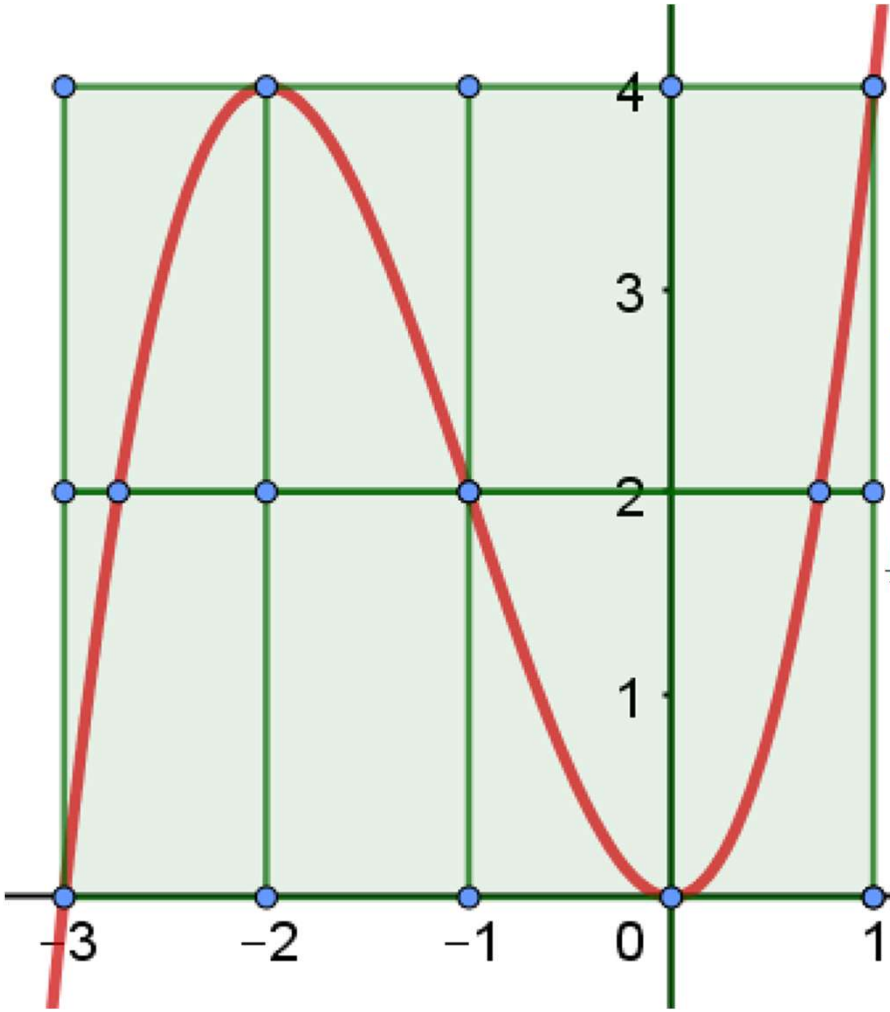
$$g(x) = t(x+3)x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

Die üblichen Rechnungen bestätigen für p
WP=(-1,2), Min=(0,0),Max=(-2,4),

Die violette Gerade ist Tangente im Berührpunkt B=(0,1) und schneidet g in (-3,2.5).
Die Wendestelle von g ist die von P, also W=(-1,4.5).

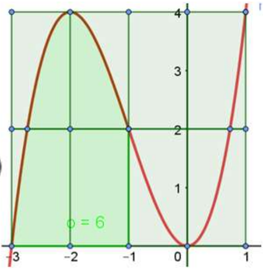
Richtig lohnend wird die Scherung für den Affenkasten.

Affenkasten, alle Polynome 3. Grades haben so einen Kasten



Parabeln haben einen Bärenkasten.
Polynome 4. Grades haben einen Pantherkäfig.

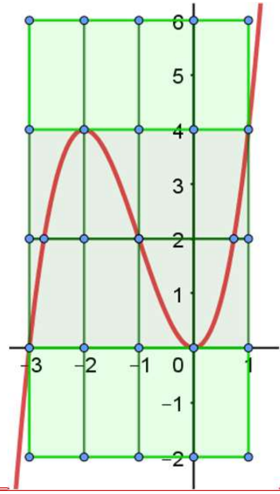
Diese von mir vor 1996 erfundenen **Begriffe sind griffig**, man kann leicht **sprechen** über das, was man untersuchen will oder herausgefunden hat.
Z.B.: die obere rechte Ecke passt immer in das Kastenraster.



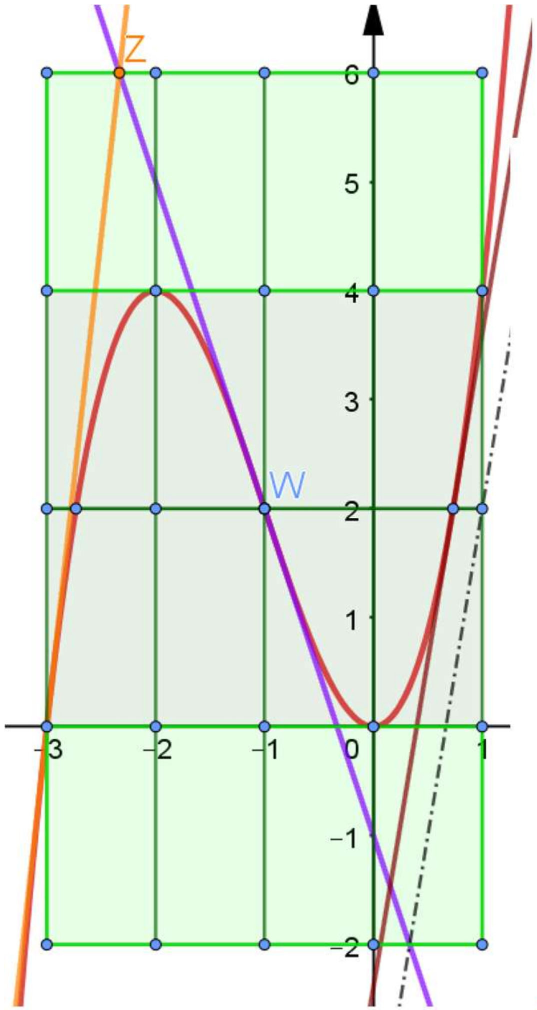
Oder: Die Fläche unter der Kurve in der linken Kastenhälfte ist **genau 3 Zellen groß.**
Oder: Die ganz kleine Zipfelfläche unter der rechten oberen Kastenecke hat die **Fläche einer Achtelzelle**.

*.ggb *.ggb

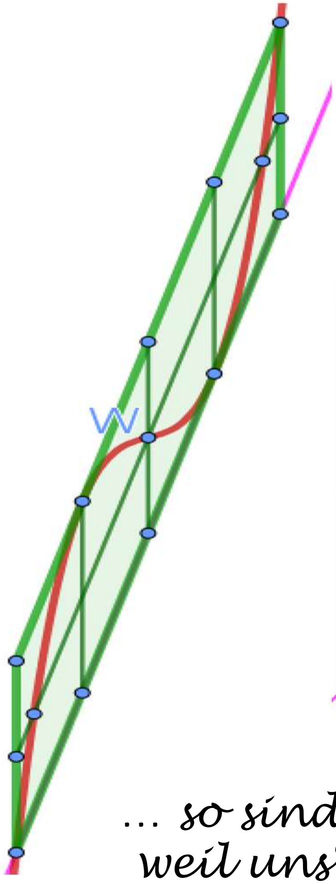
Wenn man den „Doppelkasten“ betrachtet, lohnen sich auch schon Untersuchungen diverser Tangenten.



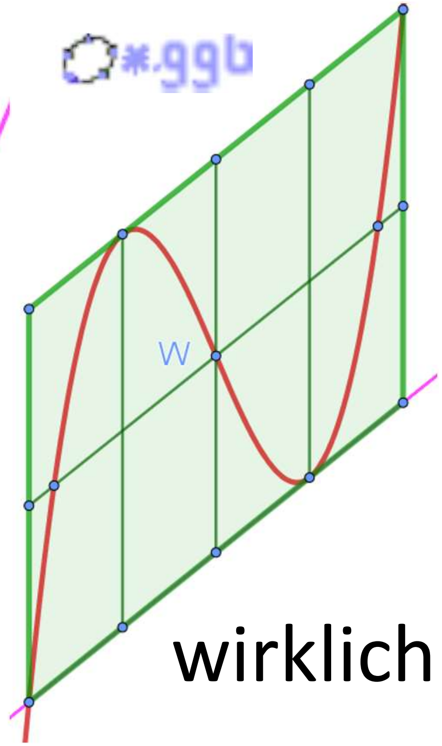
Affenkasten, alle Polynome 3. Grades haben so einen Kasten

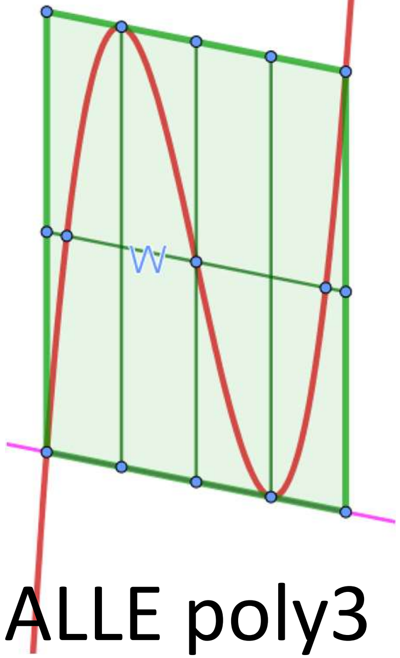


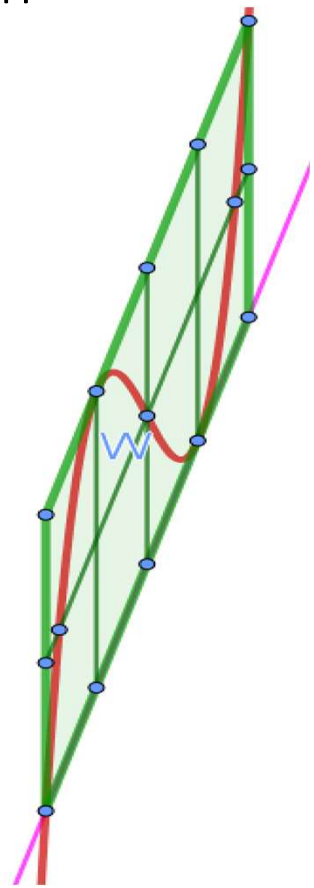
*.ggb Wenn man den „Doppelkasten“ betrachtet, lohnen sich auch schon Untersuchungen diverser Tangenten.



*.ggb







wirklich ALLE poly3 !

… so sind so manc DH1 Sachen, die wir getrost belachen,
weil uns're Augen sie nicht sehn

Folie 12

DH1 Dörte Haftendorn; 04.02.2024

Welche Ziele sind nun angesprochen, welche nicht?

Ziele für WiMINT-Tutorien

- Allgemein das Interesse an Mathematik fördern
- Mathematik in unserer Welt aufzeigen
  - Kryptografie
  - Graphen und Logistik, Knotentheorie
  - Geometrie und Beweise
  - Numerik
- Besondere Aspekte der Analysis(Polynome im Affenkasten….)
- Methoden, die keinen Platz im Lehrplan haben, kennenlernen
  - Polarkoordinaten, auch „gekoppelt“ , Parameterdarstellung
  - Kurven, Kegelschnitte, Implizite Gleichungen
  - 3D-Graphik, Zahlaufbau
  - Komplexe Zahlen, Kreisspiegelung,

steht z.T. im 1. Buch, auch im 3.

steht im Kurven Buch

steht im 3. Buch: Höhere….

- Freude an Mathematik haben
- Selbst das Vorgehen mitgestalten
- Aktiv sein, Vermutungen aufstellen
- Selbst prüfen mit Mathe-Tools
- Freude haben, wenn das Richtige vorhergesagt ist
- Mit den anderen im Tutorium reden
- Selbstwertgefühl stärken
- Durchhaltevermögen trainieren

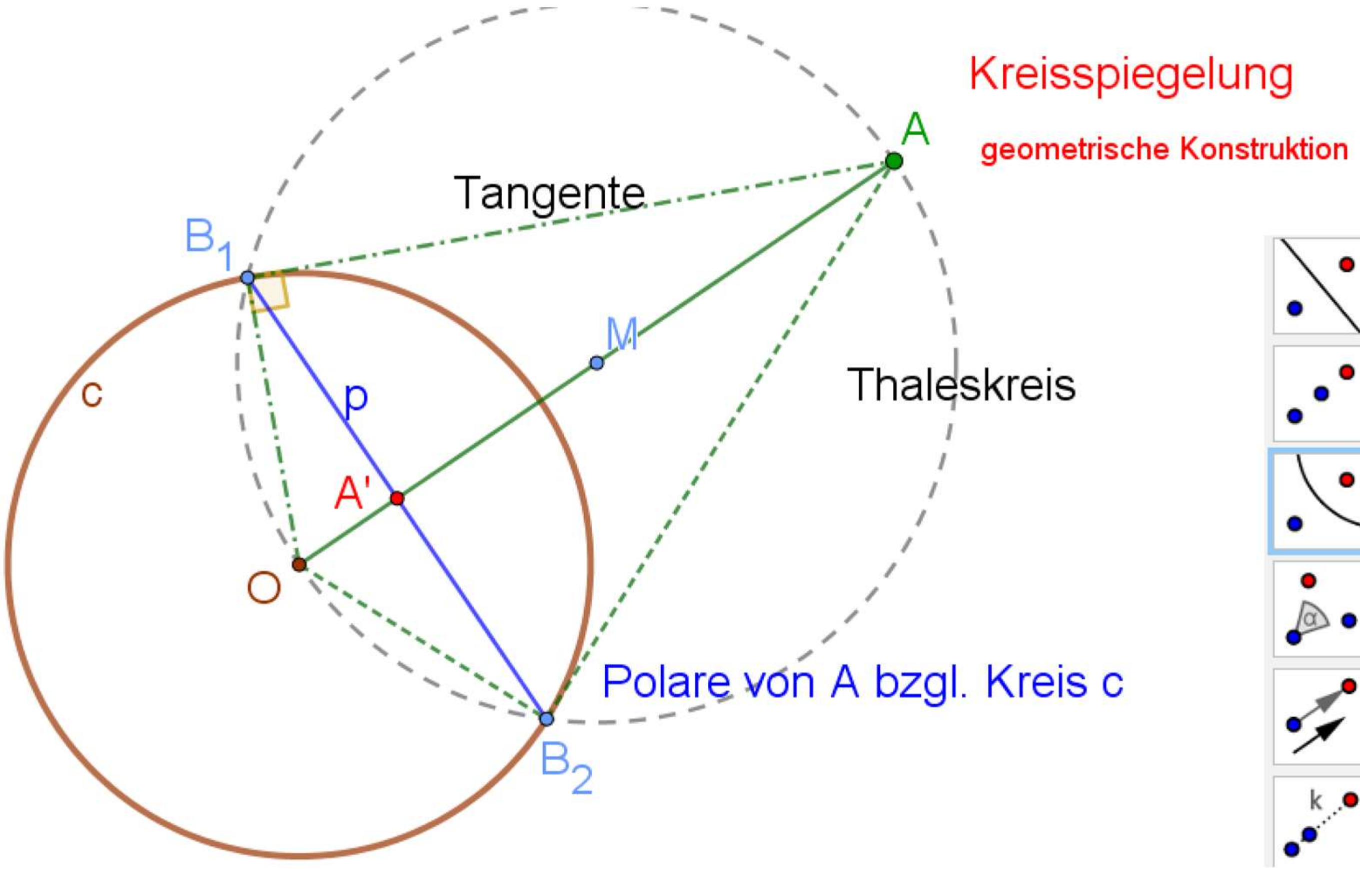
Also: **Inhaltlich** ist noch Etliches **noch nicht** angesprochen.

JETZT gleich NOCH

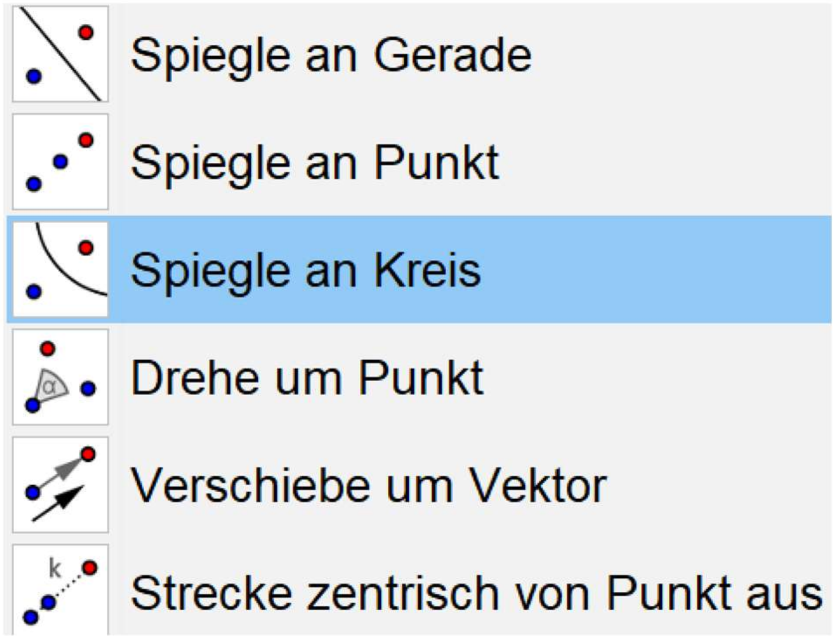
Kreisspiegelung
Strophoide
Polarkoordinaten, auch „gekoppelt“ ,

Kurven, Kegelschnitte, Implizite Gleichungen
Geometrie und Beweise
→ Workshop

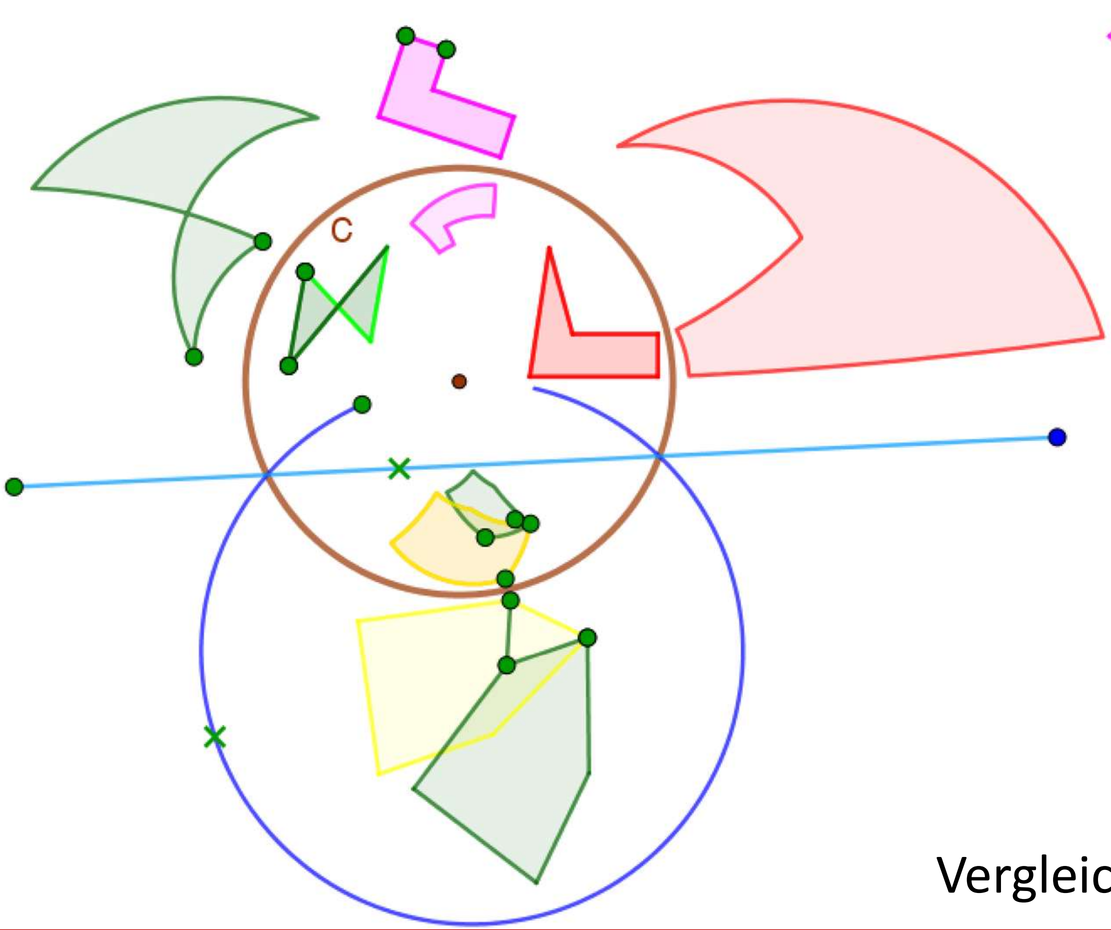
Kreisspiegelung als Konstruktion oder als freie Erkundung

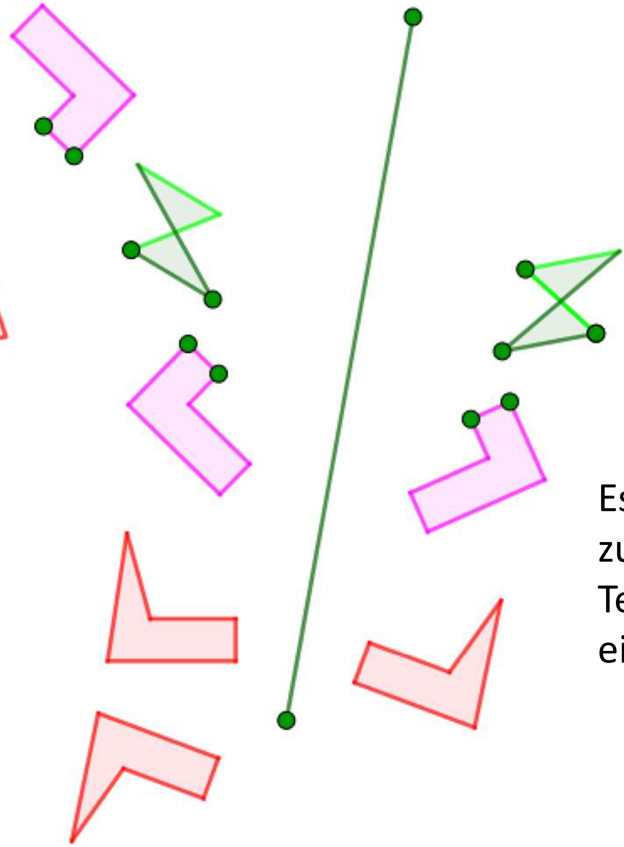


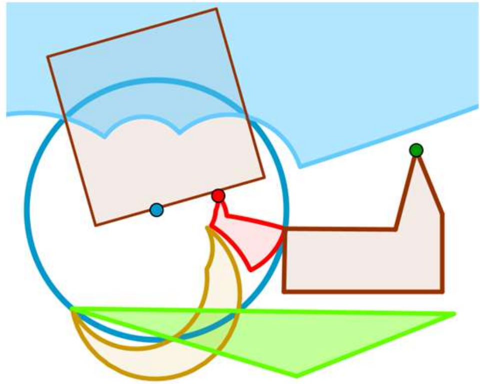
GeoGebra Abbildungs-Menü



Kreisspiegelung frei erkunden mit GeoGebra
Inversion am Kreis



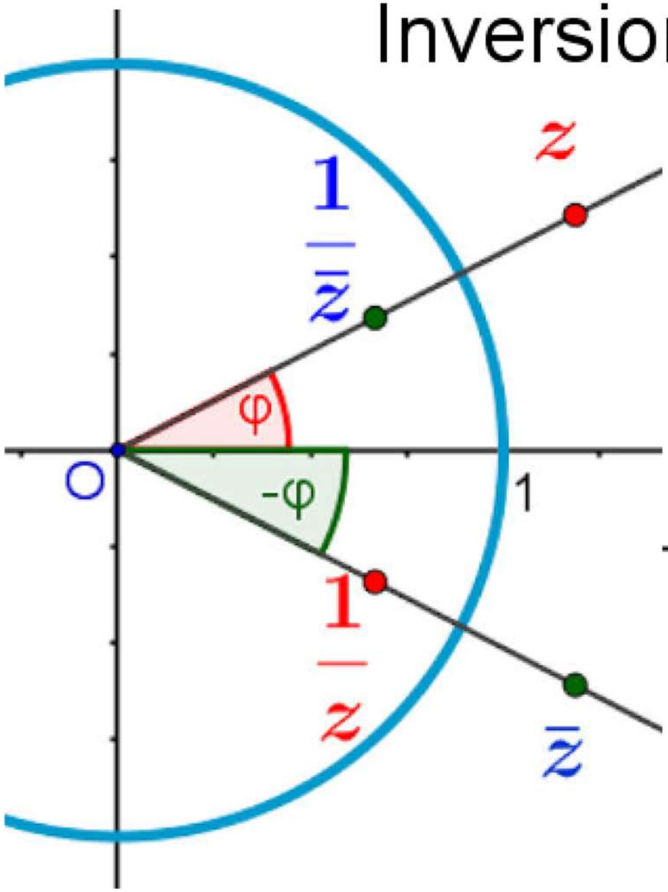


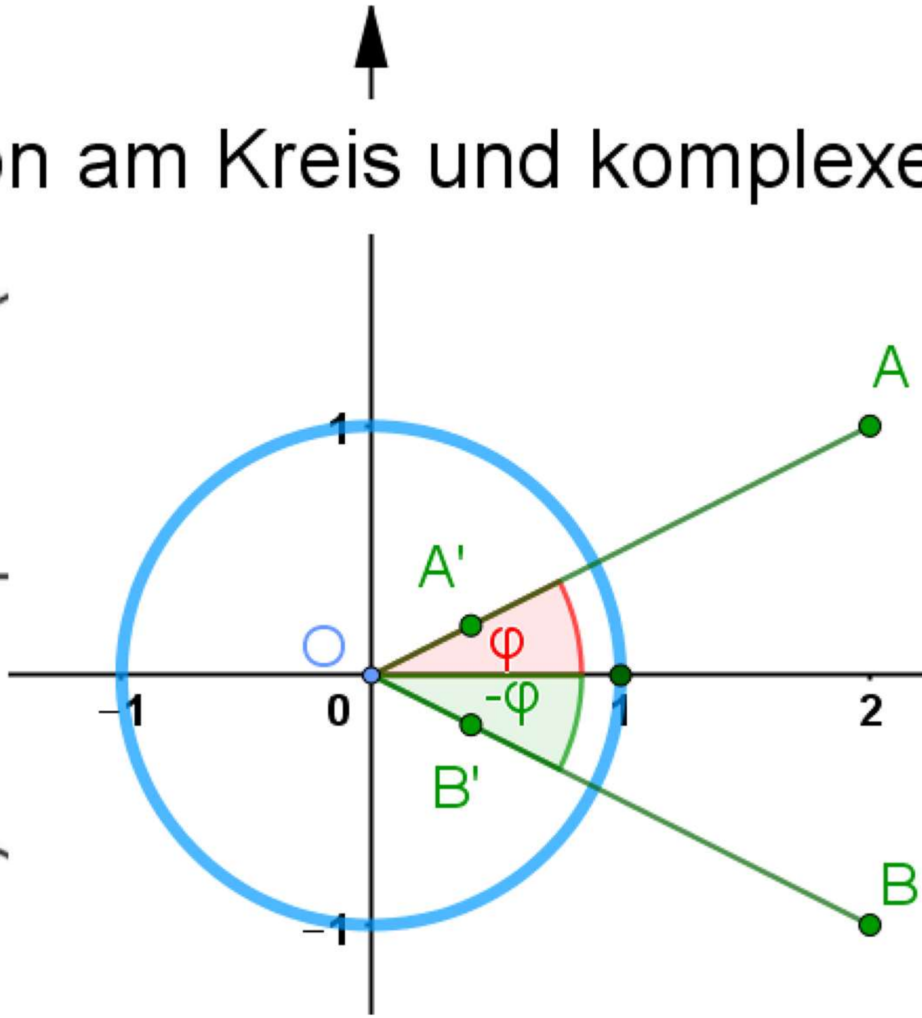


Es ist immer spannend zu diskutieren, welche Teile von Bild und Urbild einander entsprechen.

Vergleich mit Geradenspiegelung und Punktspiegelung

Inversion am Kreis und komplexen Zahlen





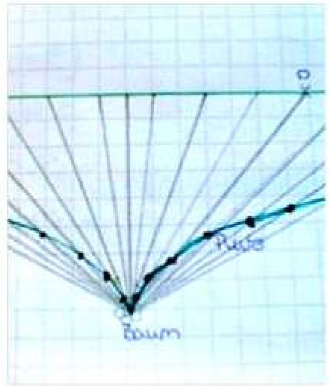
$$z = \sqrt{5}\, e^{i\varphi} = 2 + i$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\, e^{i\varphi} = \frac{2+i}{5}$$

$$\bar{z} = \sqrt{5}\, e^{-i\varphi} = 2 - i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5}}\, e^{-i\varphi} = \frac{2-i}{5}$$

Kurven Mein Buch **Kurven erkunden und verstehen**, Kap. 3.2 ist hier im System verfügbar (12 Seiten).



Mathematik-Projekt 1998
Klasse 8

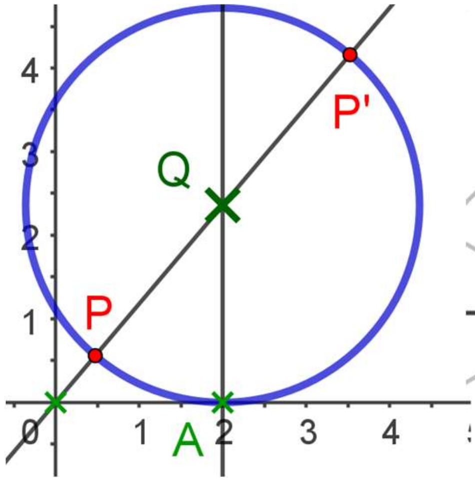
- Handeln
- Geometrie erfassen
- Selbst von Hand zeichnen
- Mit GeoGebra umsetzen
- Alle mgl. Formen finden
- Implizite Geleichungen ausprobieren

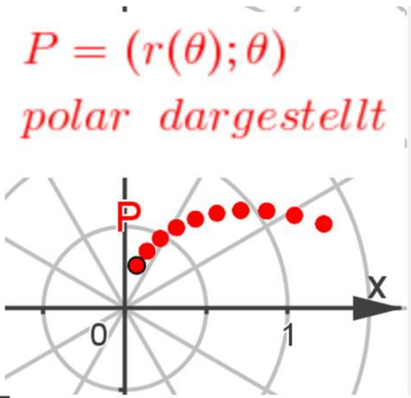
Auf 340 Seiten sind alle (mit schulischen Mitteln erreichbare) Kurven umfassend behandelt.
Das modulare Konzept, erlaubt einzelne Kurvenfamilien und Aspekte herauszugreifen.

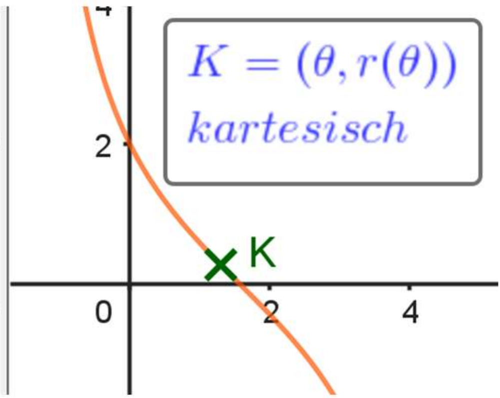
Strophoide

Eine der Konstruktionen und polar-kartesische Darstellung

*.ggb

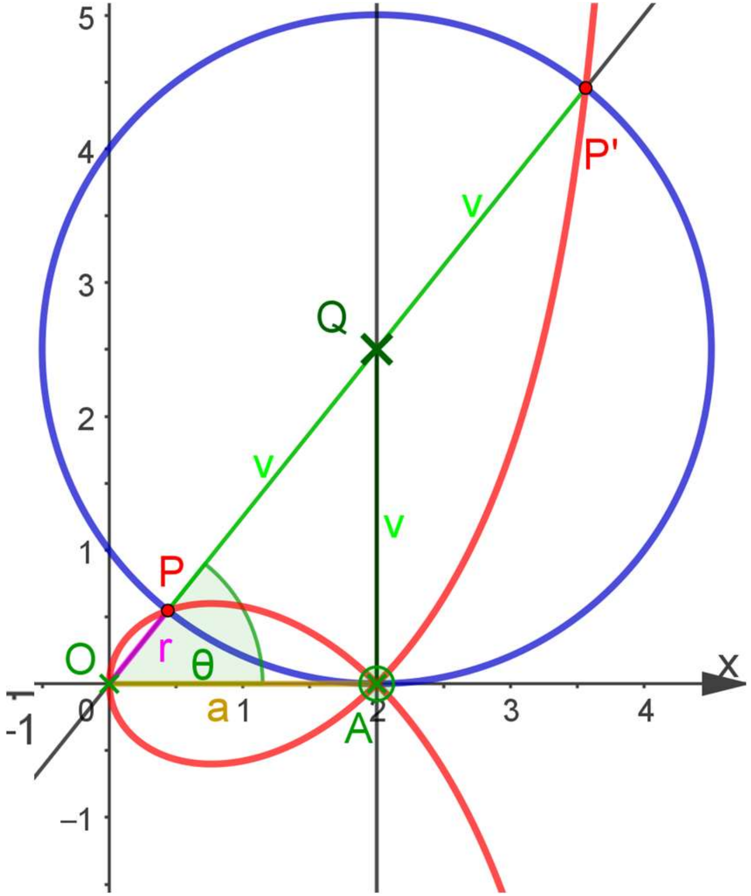






Strophoide konstruiert und polar-kartesisch dargestellt

*.ggb



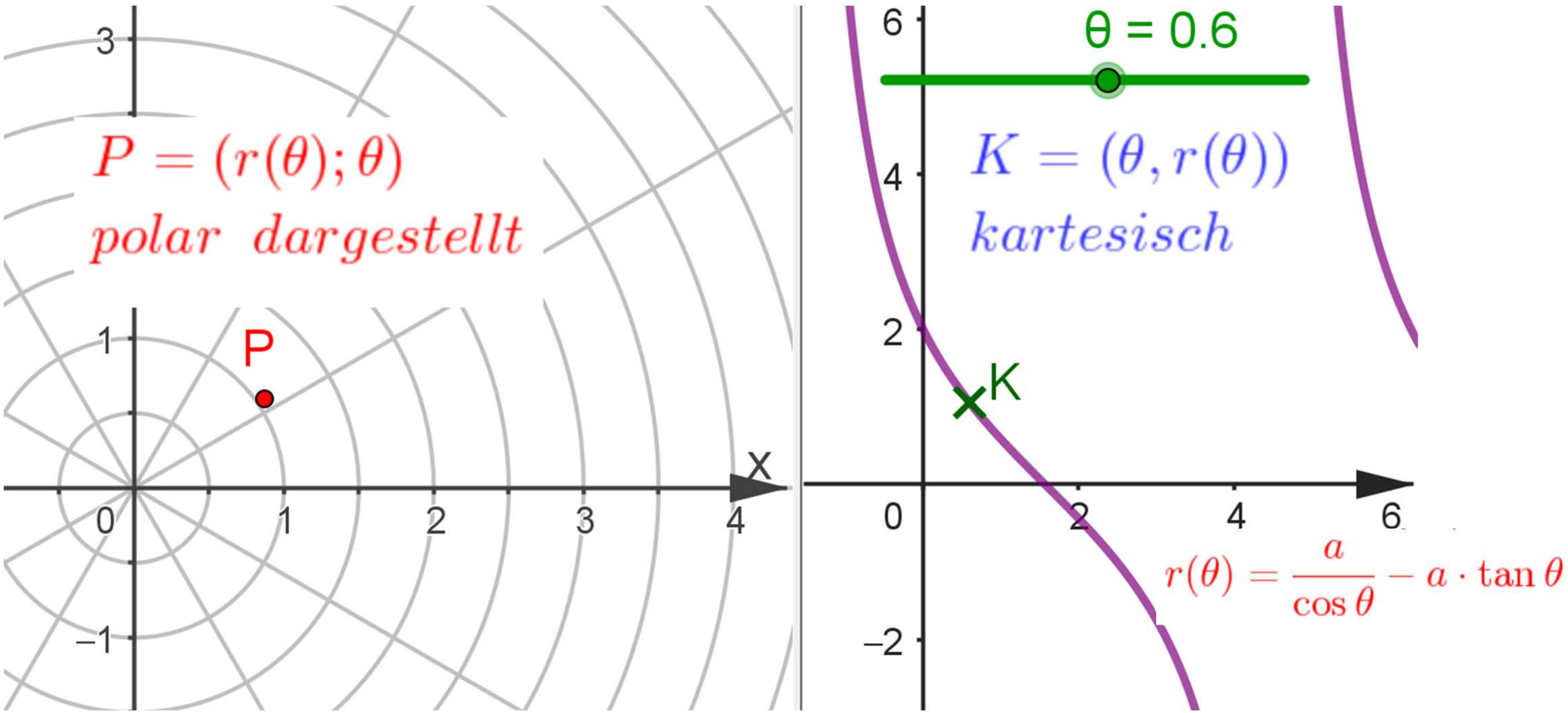
$$\eta = \overline{OQ}$$
$$a = \eta \cdot \cos\theta$$
$$v = \overline{QA} = a \cdot \tan\theta$$
$$r = \eta - v = \frac{a}{\cos\theta} - a \cdot \tan\theta$$

$$r(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} - a \cdot \tan\theta$$

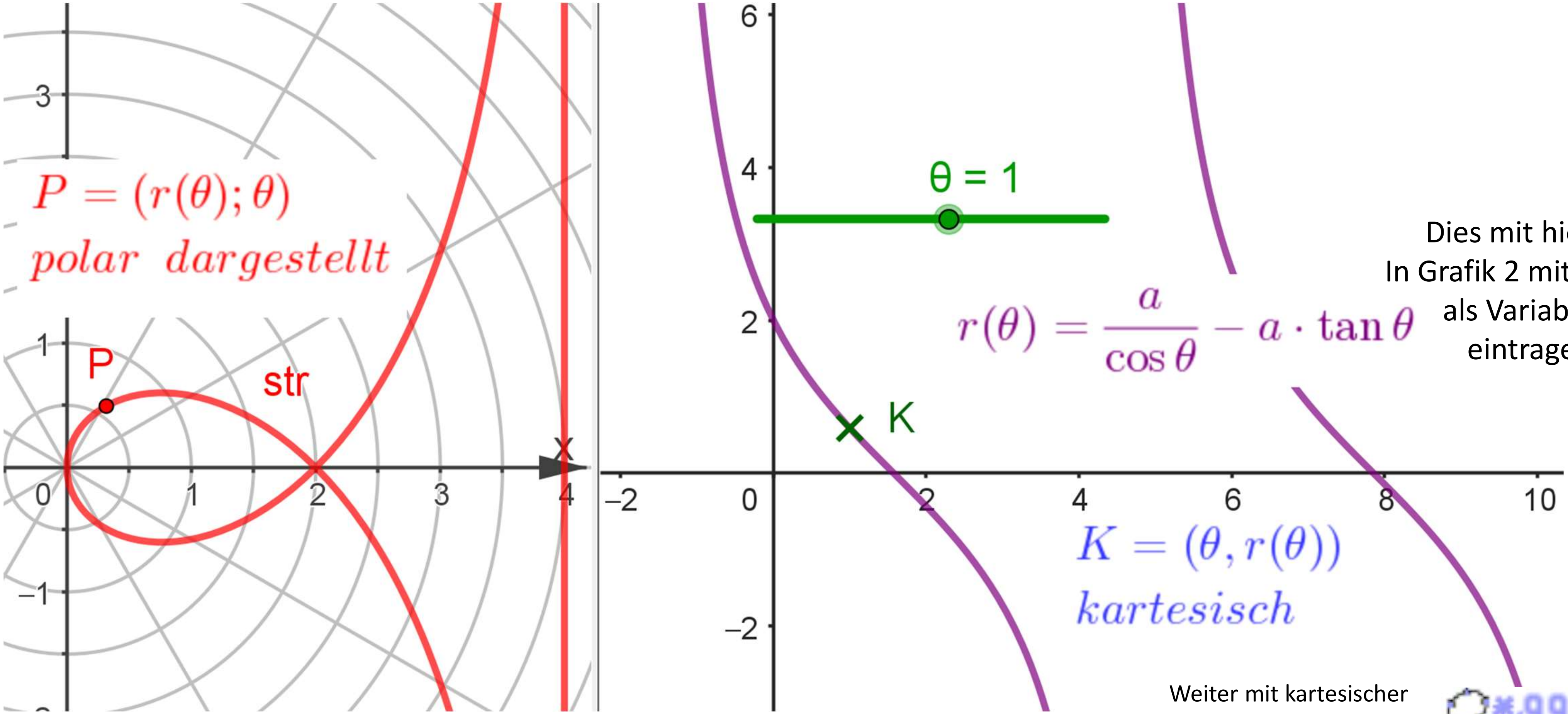
Implizite Gleichung

$$(2a - x)y^2 = x(x - a)^2$$

Strophoide konstruiert und polar-kartesisch dargestellt



Strophoide konstruiert und polar-kartesisch dargestellt



Dies mit hier
In Grafik 2 mit x
als Variable
eintragen

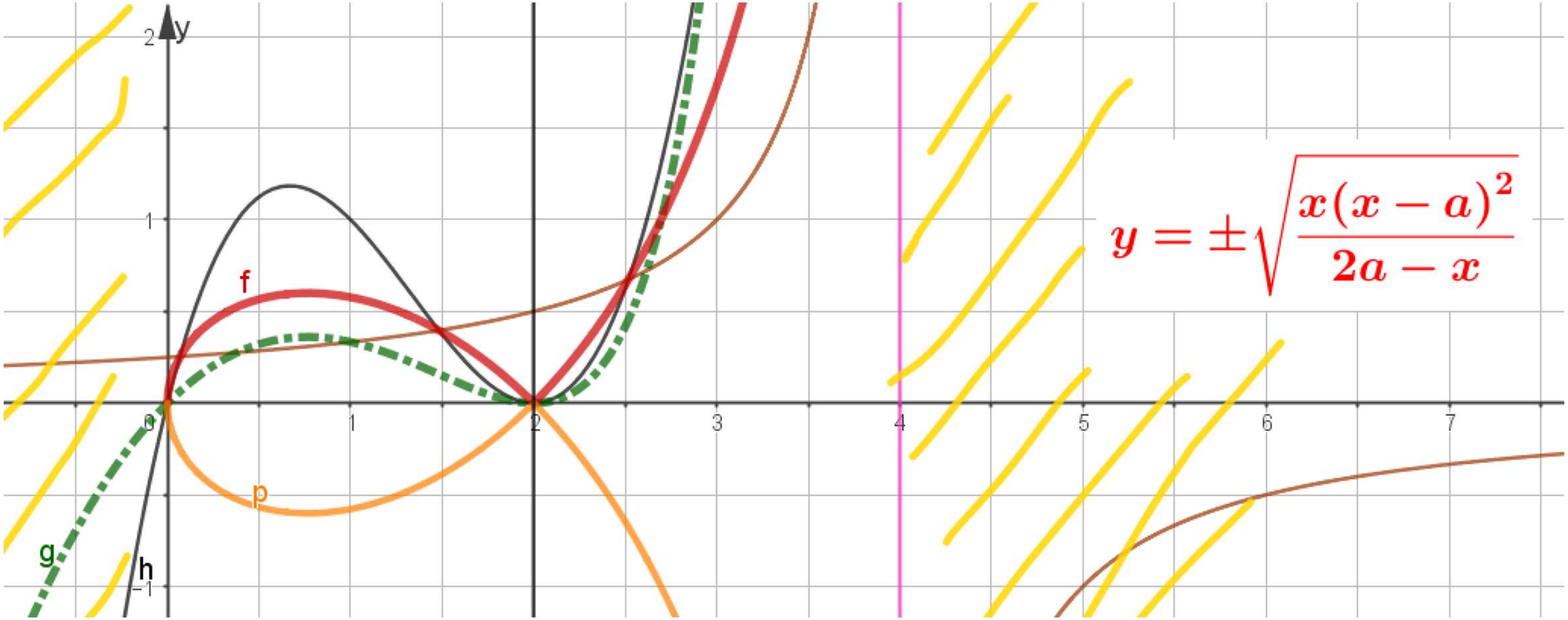
Weiter mit kartesischer
Gleichung der Strophoide

Strophoide als Wurzel aus Polynomquotienten

*.ggb

Oben haben Sie die Methoden Verkettung und Felderabstreichen gesehen. Das zeige ich für die Auflösung nach dem y-Term

Implizite Gleichung $(2a-x)y^2 = x(x-a)^2$



$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-a)^2}{2a-x}}$$

Welche Ziele sind nun angesprochen, welche nicht?

Ziele für WiMINT-Tutorien

- Allgemein das Interesse an Mathematik fördern
- Mathematik in unserer Welt aufzeigen
  - Kryptografie
  - Graphen und Logistik, Knotentheorie
  - Geometrie und Beweise
  - Numerik
- Besondere Aspekte der Analysis(Polynome im Affenkasten….)
- Methoden, die keinen Platz im Lehrplan haben, kennenlernen
  - Polarkoordinaten, auch „gekoppelt“ , Parameterdarstellung
  - Kurven, Kegelschnitte, Implizite Gleichungen
  - 3D-Graphik, Zahlaufbau
  - Komplexe Zahlen, Kreisspiegelung,

steht z.T. im 1. Buch, auch im 3.

steht im Kurven Buch

steht im 3. Buch: Höhere….

- Freude an Mathematik haben
- Selbst das Vorgehen mitgestalten
- Aktiv sein, Vermutungen aufstellen
- Selbst prüfen mit Mathe-Tools
- Freude haben, wenn das Richtige vorhergesagt ist
- Mit den anderen im Tutorium reden
- Selbstwertgefühl stärken
- Durchhaltevermögen trainieren

Kurven, Kegelschnitte, Implizite Gleichungen
Geometrie und Beweise
→ Workshop

Das ist der geplante Schwerpunkt

Kreisspiegelung

Strophoide

Polarkoordinaten, auch „gekoppelt“ ,

Site www.mathemati-verstehen.de
Bereich Didaktik, dann bei Did-Vortraege
Cosh-VerstehenSchluessel wählen.
Dort finden Sie alles, was ich vorschlage.
Jeder kann sichda selbst etwas aussuchen.
→ Workshop

Meine reiche Ernte ist in meinen Büchern und den Webseiten zu sehen, letztere frei verfügbar, nur nicht weiter zu verkaufen

- Mathematik sehen und verstehen
- Höhere Mathematik sehen und verstehen
- Kurven erkunden und verstehen

Zusatz im Web und einzeln als pdf

Dieser Zusatz (170 Seiten) ist im Web frei zugänglich.

- http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Meine Website www.mathematik-verstehen.de spiegelt mein ganzes Berufsleben in all' seinen Facetten. Sie besteht seit 1996 und geht vor allem in Sek I-Themen und didaktischen Aspekten über die Bücher hinaus.

Meine Website www.doerte-haftendorn.de geht noch weiter in der Zeit zurück.

privat

ING. MATHEMATIK VERSTEHEN

Links zu Vortrags-Seiten auf den Bücher-Websites

Mathe-matik ver-stehen

didaktik/did-vortraege/vortraege.htm
Dann finden Sie: cosh-VerstehenSchluessel.htm
Mit allen Infos zum Vortrag
und [cosh-Hilfen-Esslingen2024]
Workshop Thema: Kurven und Ortslinien als Leitlinien

Kurzzeitig 6 Buchauszüge aus allen diesen Büchern + 3 Aufgaben

Curriculum Vitae

1966 Abitur in Hameln

TU Clausthal, Studium

1971 1. Staatsex. Gym. LA Mathe/Physik

1972 Diplom Mathematik

1975 Promotion Mathematik (Algbra,Halbringe)

2. Staatsex. Gym. LA Mathe/Physik

30 Jahre XXX

Johanneum Lüneburg

2002

1991

Ingenieur-Mathematik

FH dann Leuphana

2008

1993

Lehrerbildung

Fachgymnasium Mathematik

Uni Lüneburg Leuphana

2013

2007

Mathematik für alle Leuphana

20 Jahre XX

Ich bin sehr dankbar!
Gute Eltern, schöne Kindheit,
vielfältiges Leben und
einen lieben, musikalischen
Ehemann

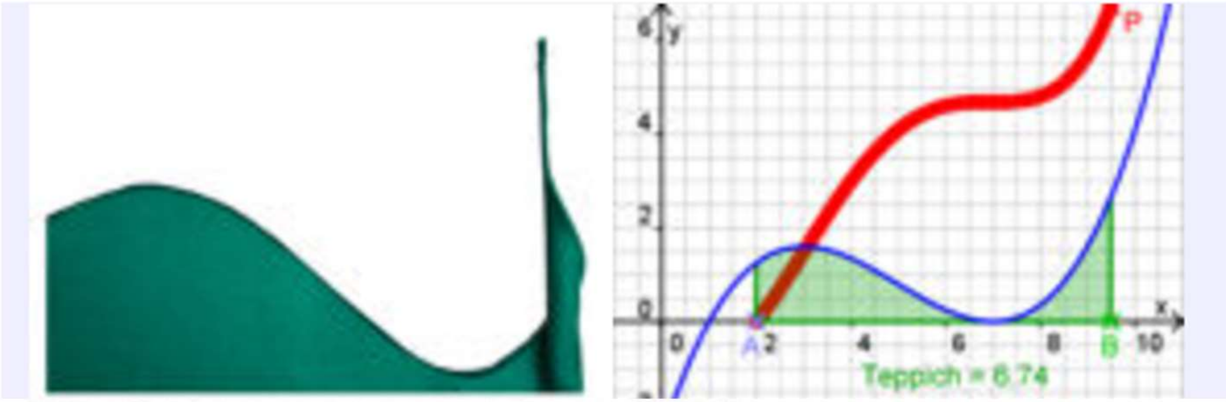
Posaune Horn

Geige Bratsche

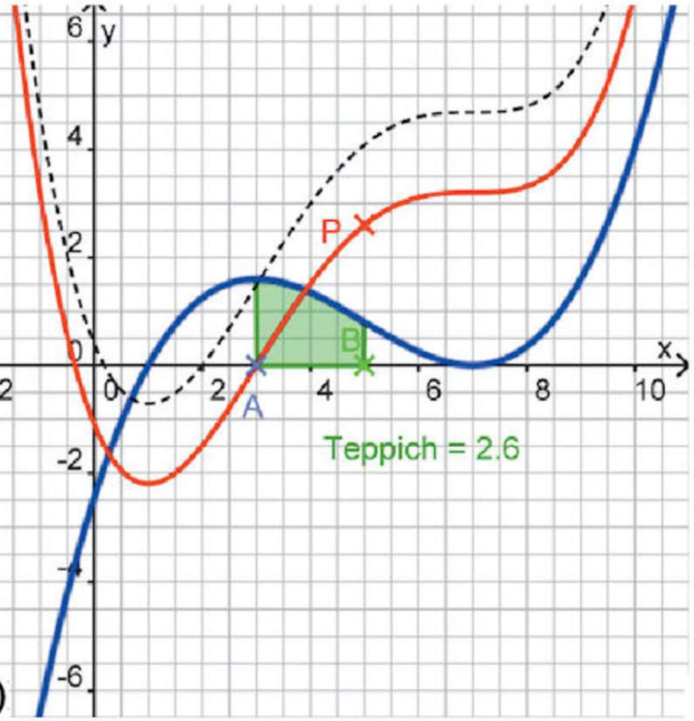
49 J. Roland

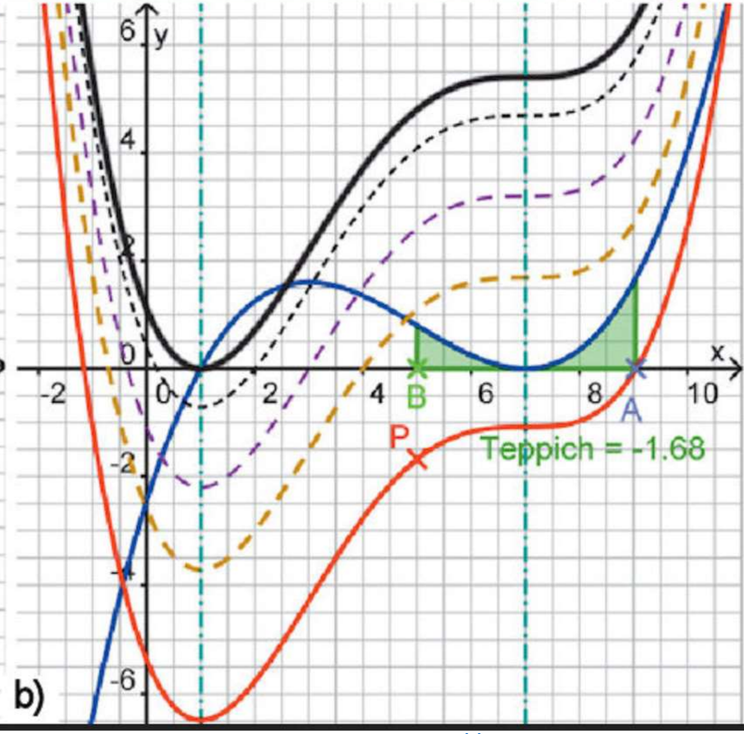
2024

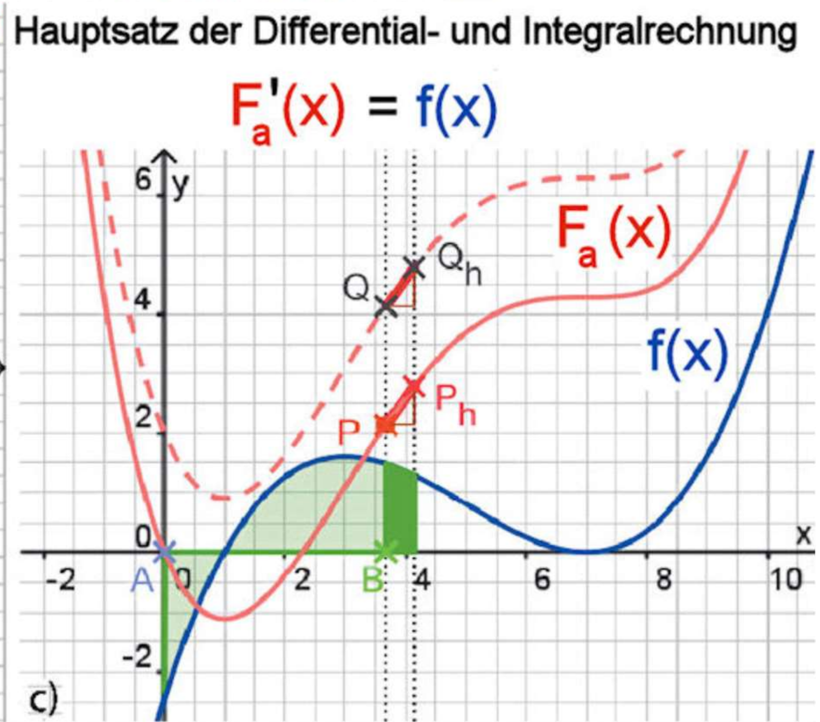
Hinführung zum
Hauptsatz der
Differenzial- und
Integralrechnung



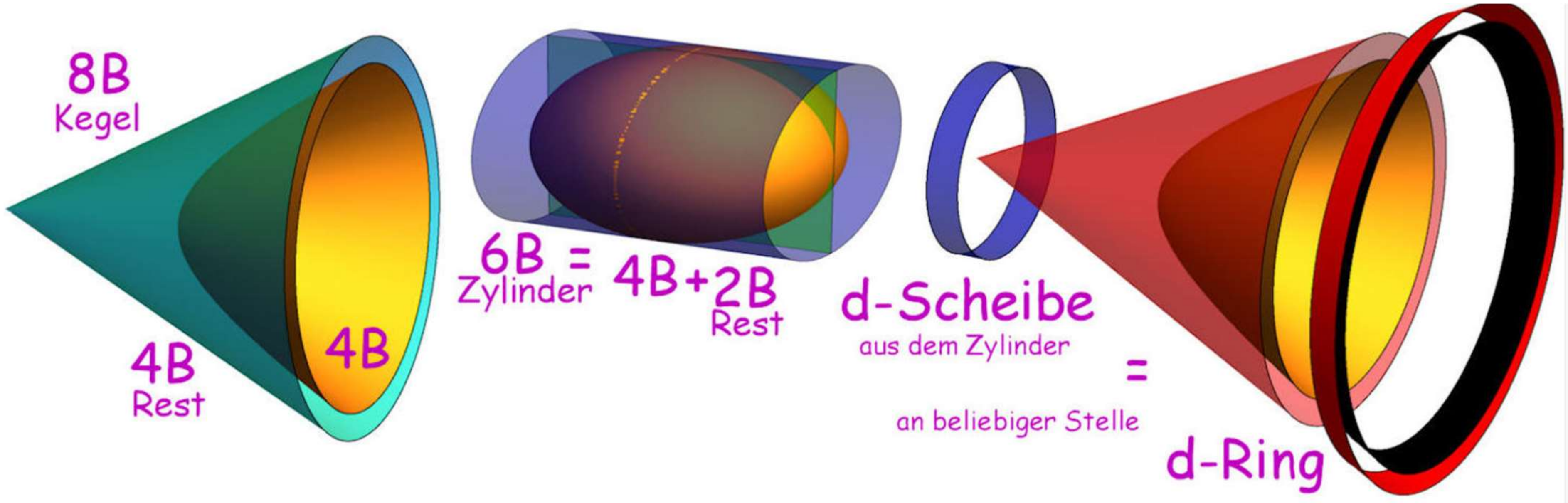
*.ggb





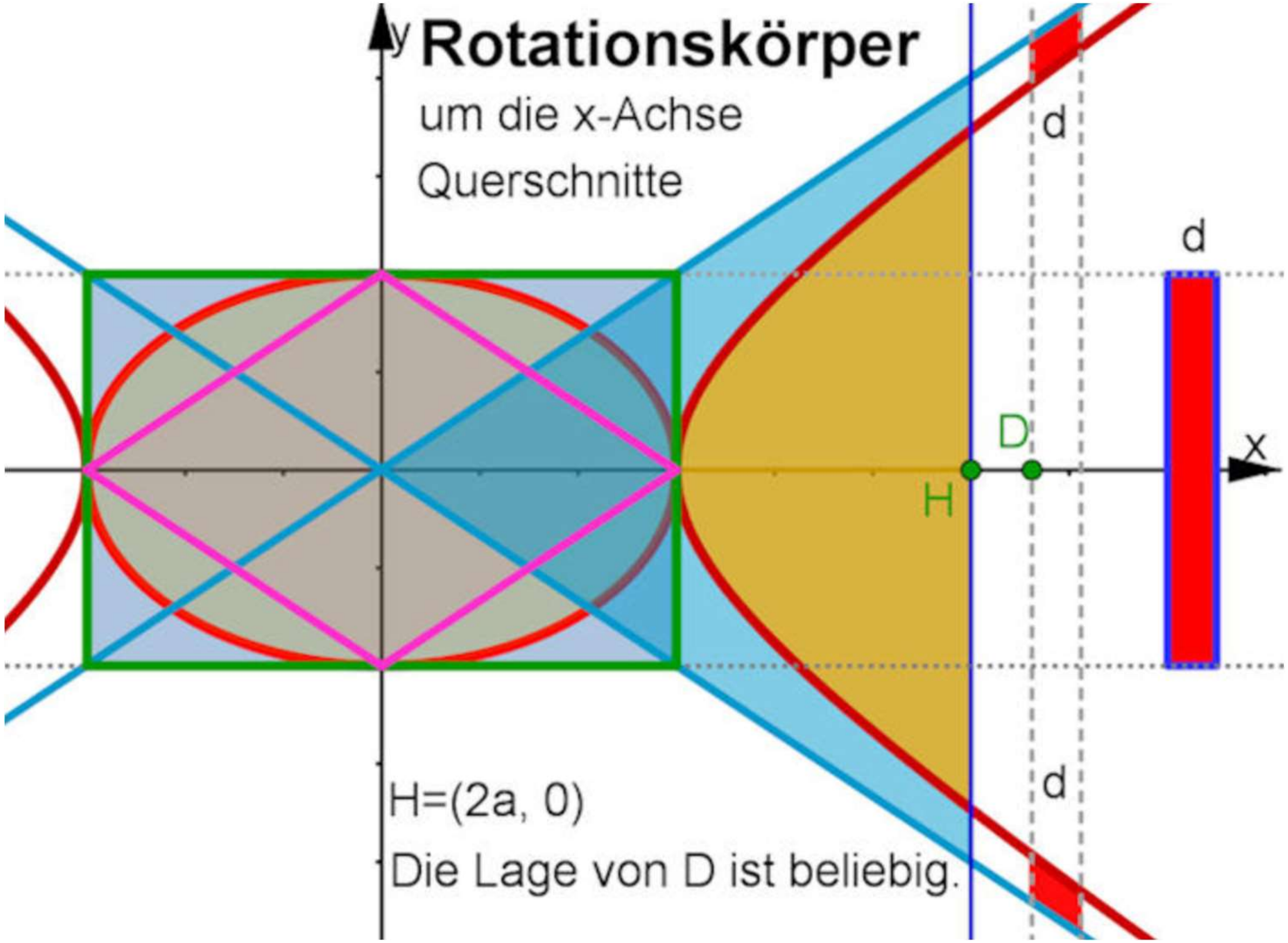


Harmonie der Quadriken

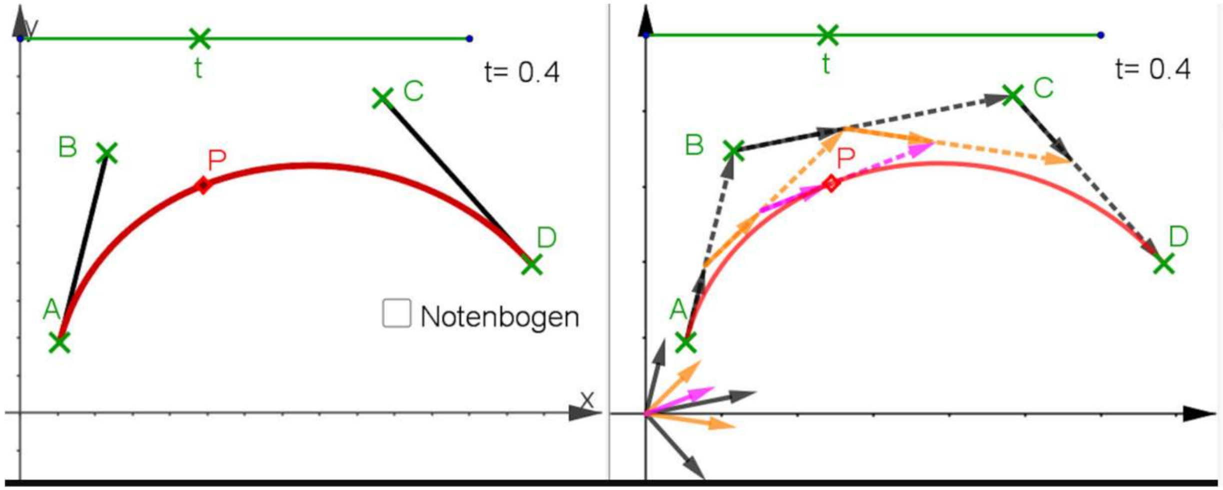


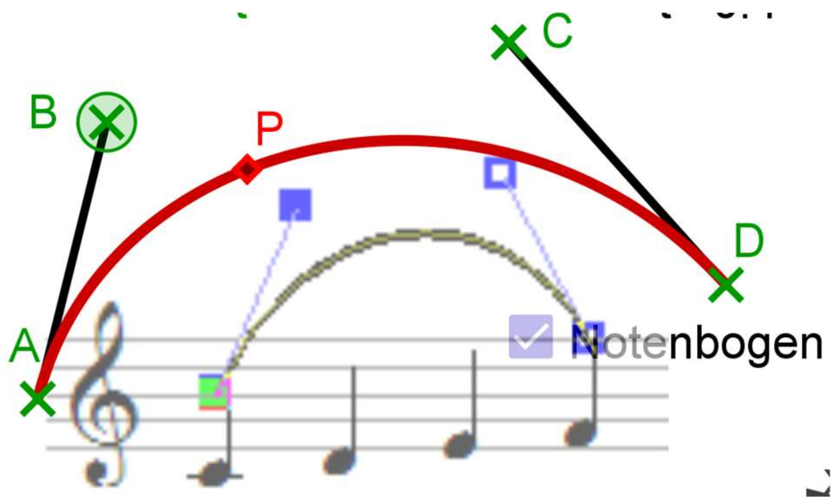
Harmonie der Quadriken

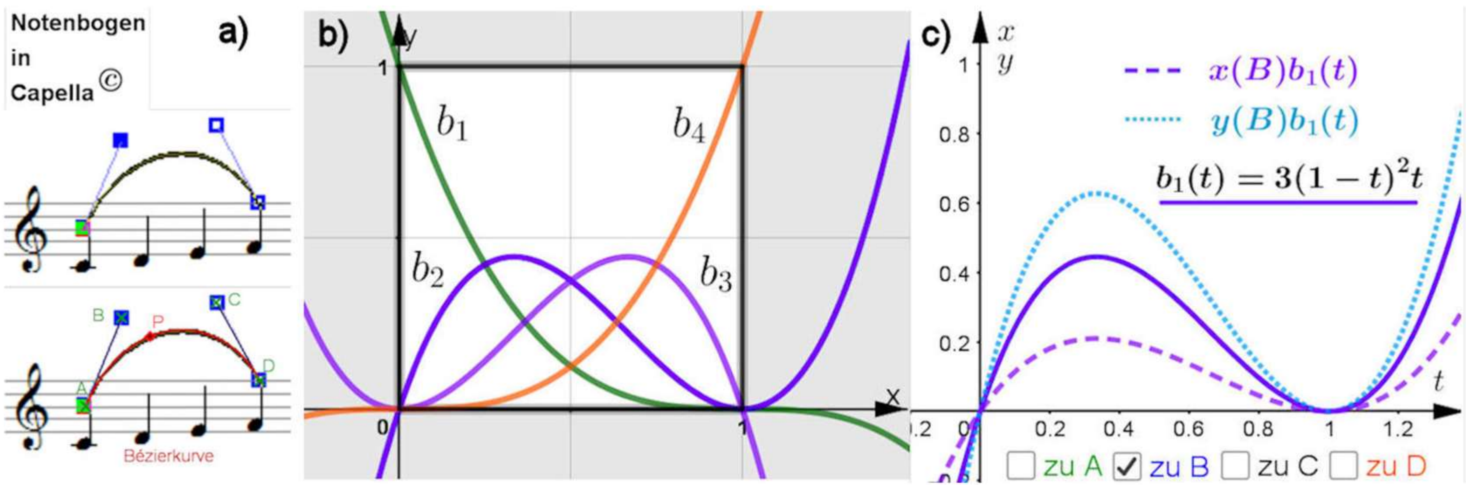
*.ggb



Bèziersplines und ihr Gerüst, Anwendung







Die Welt ist vielfältig und Mathematik ist schön, wenn man sich ihr unbefangen öffnet.

So heißt daher mit recht eine Kalenderserie von Heinz-Klaus Strick

Mathematik muss nicht rätselhaft, verborgen und unheimlich sein.

Verstehen ist der Schlüssel

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit