

GeoGebra

Stochastik
 Al-
 Numerik
 Analysis
 Geo-metrie

Mathematik Sek II

Möglichkeiten mit GeoGebra

Vortrag im Rahmen von DASU
 Didaktischer Arbeitskreis Schule-Universität
 Do. 11.12.2014 Hannover Welfenschloss

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 1

Mathematik Sek II + GeoGebra

- Funktionen-Bespiele Dabei kommen die neuen Möglichkeiten von GeoGebra vor:
- Differenzieren • Zusammenspiel Tabelle-Graphik
- e-Funktion • Zwei Grafik-Fenster
- Integrieren • Anzeige abhängig von Bedingungen
- Hauptsatz • Schaltkästchen
- Extremwertaufgaben • Einsatz des freien Zeichenstiftes
- besondere Kurvenschar • Zusammenspiel Algebrafenster-CAS und Vieles mehr
- Stochastik

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 2

Funktionen

Mehrfache Nullstellen von Polynomen Datei: [vieta.ggb](#)

$f(x) = t(x - a)^\alpha(x - b)^\beta$
 $= 0.1(x + 2)^3(x - 4)^4$

a = -2 b = 4
 Vielfachheit der Nullstelle bei A ist 3 $\alpha = 3$
 Vielfachheit der Nullstelle bei B ist 4 $\beta = 4$
 t = 0.1
 Achse zusammenziehen mit "Umschalt+Lj-Maus"
 Ha 05 und 08

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 3

Funktionen

Stehende Wellen in der Posaune Datei: [posaune.ggb](#)

Naturtöne der Posaune Ha 2014
 Grundton B: $f(x) = \cos(x)$
 Oktave, Tiefes B: $f(x) = \cos(2x)$
 Quinte, Naturton f: $y = \cos(3x)$
 Oktave, Naturton hohes b: $y = \cos(4x)$
 Terz, Naturton d: $y = \cos(5x)$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 4

Funktionen

Klangfarbe verstehen Datei: [sinus+obertone.ggb](#)

Grundton mit seinen Obertönen
 $h(x) = \sin(x) + 0.3\sin(2x) + 0.1\sin(3x) + 0.2\sin(4x) + 0.18\sin(5x) + 0$

Die Faktoren der Obertöne bestimmen die Klangfarbe Ha 2014

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 5

Funktionen

Schwebungen Datei: [schwebungen_ggb.ggb](#)

Schwebungen
 $f(x) = \sin(4x)$
 Zusammen $h(x) = \sin(4x) + \sin(4/24/100 x)$
 Ha 2014

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 6

Funktionen

Kombinationstöne Datei: [kombinationstoene.ggb](#)

Ha 2014

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 7

Funktionen

Wirtschaftsfunktionen Datei: [lagrange_wirtschaft.ggb](#)

Modellierung:
Variieren und
kritisch
hinterfragen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 8

Funktionen

Polynom im Affenkasten Datei: [affenka.ggb](#)

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 9

Funktionen

Gebrochenrationale Funktion Datei: [gebrochenrational.ggb](#)

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 10

Differenzieren

Ableitung begreifen Datei: [FahrradAufKurve_vortrag_poly_3013.ggb](#)

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 11

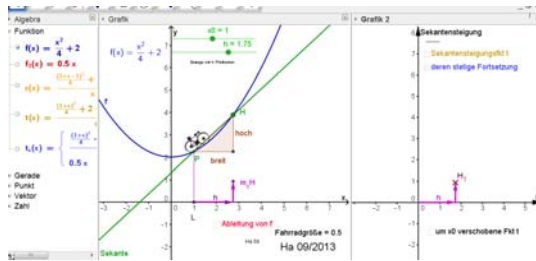
Differenzieren

Fahrrad auf Parabel, einfach Datei: [FahrradAufKurve_ableit_v.ggb](#)

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 12

Differenzieren

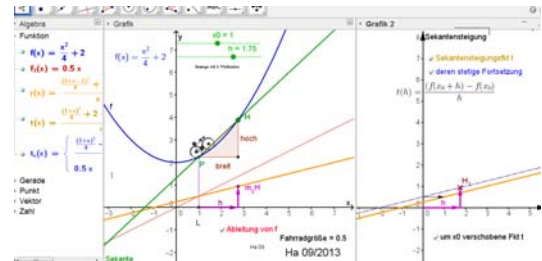
Ableitung vertiefter Zugang mit Sekantensteigungsfunktion Datei: [FahrradAufKurve_start.ggb](#)



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 13

Differenzieren

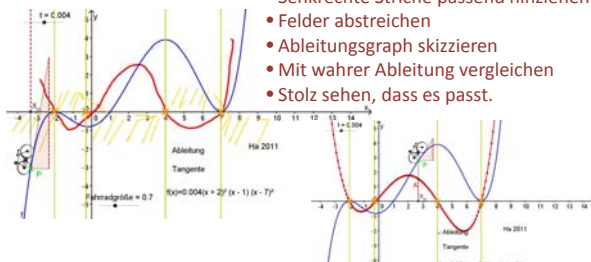
Ableitung vertiefter Zugang mit Sekantensteigungsfunktion Datei: [FahrradAufKurve_start.ggb](#)



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 14

Differenzieren

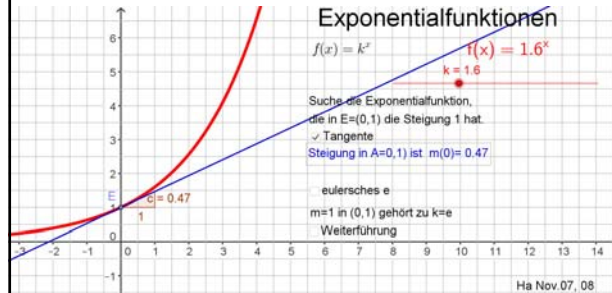
Polynom und qualitative Ableitung Datei: [FahrradAufKurve_einfbspl_frei.ggb](#)



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 15

e-Funktion

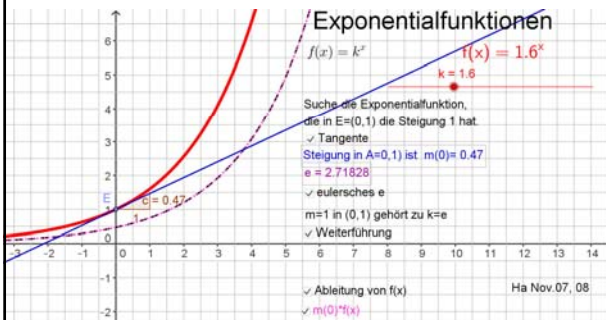
Hinführung, das halbe Geheimnis Datei: [expfkt zu e hin.ggb](#)



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 16

e-Funktion

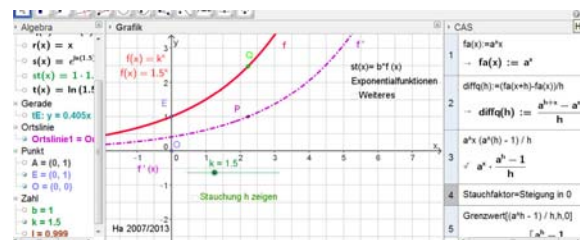
Hinführung, das halbe Geheimnis Datei: [expfkt zu e hin.ggb](#)



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 17

e-Funktion

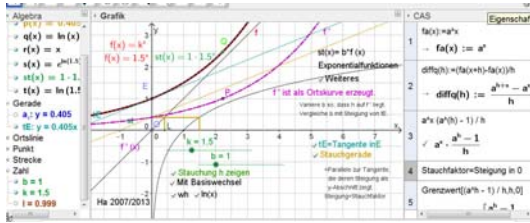
e-Funktion, das ganze Geheimnis Datei: [expfkt_diff.ggb](#)



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 18

e-Funktion

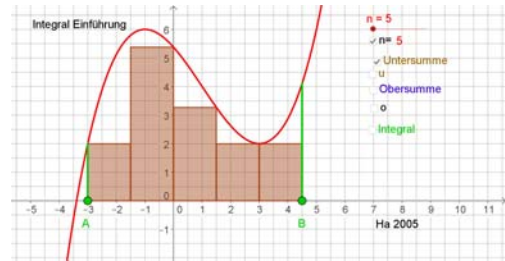
e-Funktion, das ganze Geheimnis Datei: [expfkt_diff.ggb](#)



Sowas zeigt man natürlich niemals gleichzeitig, es ist ein Vorrat, der viele aufkommende Fragen (einzeln) zu beantworten hilft.

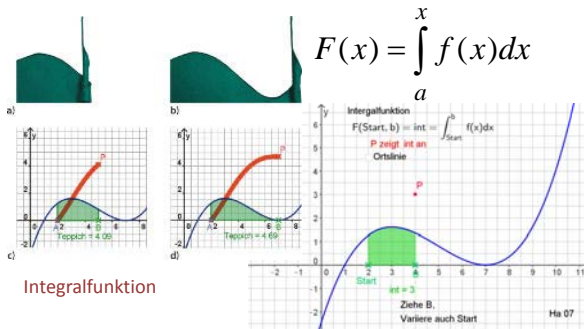
Integrieren

Einführung mit Riemann Datei: [integral_einfuehrung.ggb](#)



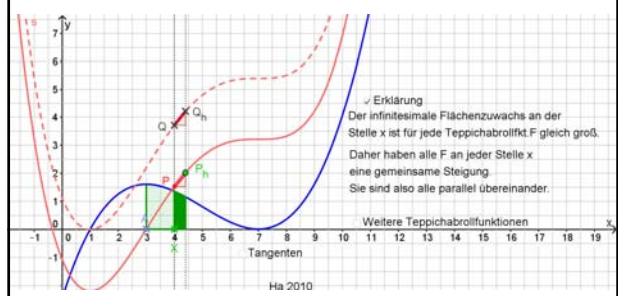
Integrieren

Teppichbrollfunktion Datei: [int_fkt.ggb](#)



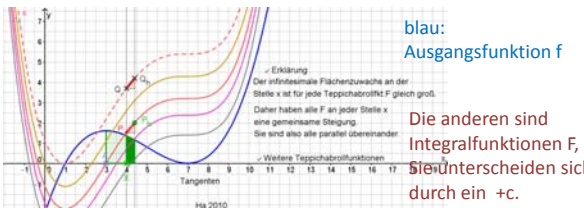
Integrieren

Hinführung zum Hauptsatz Datei: [teppichzuwachs_v.ggb](#)



Integrieren

Hinführung zum Hauptsatz Datei: [teppichzuwachs_v.ggb](#)

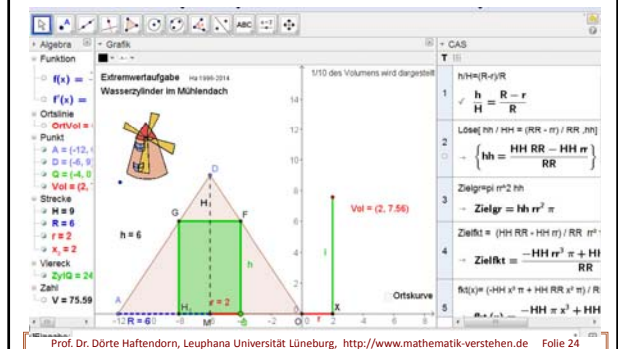


Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$F'(x) = f(x)$$

Extremwertaufgabe

Wasser für die Windmühle Datei: [muehle+CAS.ggb](#)



Euler-Kasten

Standard-Abitur+Überraschung Datei: [CAS e kasten.ggb](#)

Algebra

Funktion

- $f(x) = (e^x - 2)^2$
- $g(x) = 2^x$
- $w(x) = (2 \cdot e^x)^2$

CAS

- $R(x) = (exp(x)-k)^2$
- Löse: $\{x = \ln(k)\}$
- $(exp(x)-k)^2=0$
- Löse: $\{x = \ln(2 \cdot k)\}$
- $(exp(x)-k)^2$
- Löse: $\{x = \ln(k)\}$
- Abbildung: $2 \cdot e^x \cdot (e^x - k)$
- Abbildung: $2 \cdot (e^x)^2 + 2 \cdot e^x$

Grafik

Euler-Kasten
e-Funktion mit besonderen
Kasteneigenschaften
k = 2

Zusammenspiel CAS-Algebra
Im CAS exakte Rechnungen mit k.
In Algebra mit Regler k.
Integral
Wendepunktentasten
WMA-Streifen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 25

Stochastik

Markowketten Datei: [markowzustaende.ggb](#)

Algebra

Löse

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Ablock2 = $\begin{pmatrix} 0.33 & 0.42 & 0.25 \\ 0.25 & 0.58 & 0.17 \\ 0.17 & 0.42 & 0.41 \end{pmatrix}$

Ablock3 = $\begin{pmatrix} 0.27 & 0.47 & 0.26 \\ 0.26 & 0.53 & 0.21 \\ 0.21 & 0.47 & 0.32 \end{pmatrix}$

Ablock59 = $\begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$

Zahl

r = 0.8

Grafik

Regen, Cumulus wolken, Stratus wolken

Tabelle

F	K	A	B	C
1	0.5	0.3	0.2	
2	0.2	0.7	0.1	
3	0.1	0.3	0.6	
4				
5				
6				
7				
8	0.1	0.4	0.5	
9				
10				
11				

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 26

Matrizen werden dadurch definiert, dass man das gewünschte Rechteck im Tabellenfenster ausfüllt und markiert. Dann ist mit der rechten Maustaste „Erzeuge Matrix“ zu wählen. Die Zahlen im Zustandsgraphen sprechen mit „B3“ etwa die Tabelle an.

Stochastik

Binomialverteilung Datei: [binomialverteilung_pur_ggb.ggb](#)

Unschlagbar ist der Wahrscheinlichkeitsrechner.

- Normal
- Student
- Chi-Quadrat
- F-Verteilung
- Exponential
- Cauchy
- Weibull
- Gamma
- LogNormal
- Logistische Verteil.
- Binomial
- Pascal
- Poisson
- Hypergeometrisch

Wahrscheinlichkeitsrechner - Binomialverteilung_pur_ggb.ggb

Verteilung (Statistik)

k P(X = k)

8	0.1144
9	0.0654
10	0.0308
11	0.012
12	0.0039
13	0.001
14	0.0002
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Binomial

n = 20 p = 0.3

$P(9 \leq X \leq 12) = 0.1121$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 27

Stochastik

Binomialverteilung Datei: [binomialverteilung_pur_ggb.ggb](#)

Eine selbst erstellte Version ist nur für spezielle Zwecke sinnvoll.

Algebra

Zahl

- a = 1
- b = 29
- n = 40
- p = 0.3

Grafik

Binomial

n = 40 p = 0.3

Tabelle

F	K	A	B
1	0	0	
2	1	0	
3	2	0	
4	3	0	
5	4	0	
6	5	0.01	
7	6	0.02	
8	7	0.03	
9	8	0.06	
10	9	0.08	
11	10	0.11	
12	11	0.13	
13	12	0.14	
14	13	0.13	

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 28

Stochastik

Konfidenzintervall Datei: [konfidenzintervall_binom.ggb](#)

Konfidenzintervall

Niveau mit $z = 2$

0.23 ist verträglich mit Zählung

Näherungsweise, σ mit k/n
exakt $pp = 0.23$
Ungleichung
 $\frac{k}{n} - p \leq z \sqrt{np(1-p)}$

Ha 2014

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 29

Stochastik

Konfidenzintervall alle Infos Datei: [konfidenzintervall_binom.ggb](#)

Konfidenzintervall

Niveau mit $z = 2$

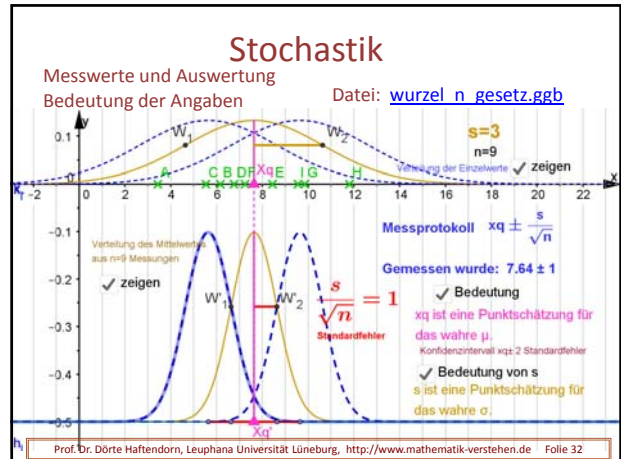
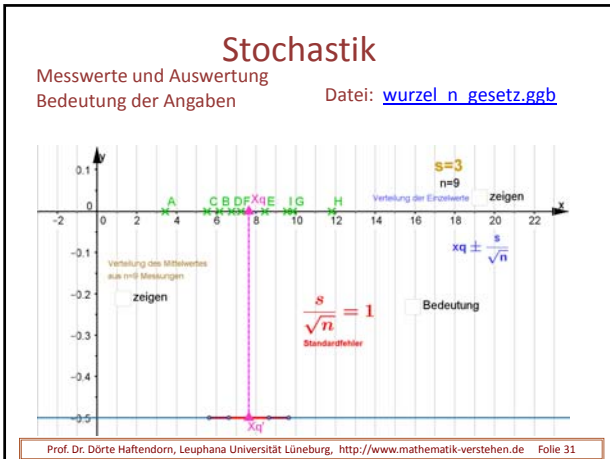
näherungsweise (0.155, 0.445)
Konfidenzintervall exakt (0.179, 0.458)

0.23 ist verträglich mit Zählung

Näherungsweise, σ mit k/n
exakt $pp = 0.23$
Ungleichung
 $\frac{k}{n} - p \leq z \sqrt{np(1-p)}$

Ha 2014

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 30



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

So, das war nun mein Feuerwerk!

Und damit es nicht verpufft:

- Es ist für Sie auf einer Website bei www.mathematik-verstehen.de zusammengestellt (siehe Handout) Bereich Didaktik → DASU
- Auf der obigen Site und bei www.leuphana.de/matheomnibus steht noch Vieles
- Die Ideen sind in meinem Buch ausgeführt. www.mathematik-sehen-und-verstehen.de
- Sie können mich gerne zu allem fragen.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 33