Sek I Füllhorn

Einige erprobte Strategien, gesammelt in 28 Lehrerjahren in Klasse 5 bis ultimo

Prof. Dr. Dörte Haftendorn
Uni Lüneburg 2004 und 2008

Füllhorn Sekundarstufe I, erprobte Strategien für die heiklen Stellen des Mittestufen-Mathematikunterrichts

Füllhorn Sekundarstufe I, erprobte Strategien für die heiklen Stellen des Mittestufen-Mathematikunterrichts

Intentionen und Anlass und Adressaten

- Anlass: Im WS 2004-SS 05 studierten an unsrer Universität fertige Wissenachaftler einen einjärigen Master-Studiengang um sich als Lehrer für Haupt- und Realschule zu qualifizieren. Die Mathematik als Fach gewählt hatten, waren Vulkanologin, Vermessungsingenieur, Chemiker, us.w..Sie brauchten dringend je Semester eine Mathematikdidaktik-Veranstaltung. Es fand hier aber gerade ein Generatonswechsel statt, so dass ich alleine übrig war, das über mein Deputat hinaus zu machen. Obwohl wir noch vieles angesprochen haben wünschten diese eine solche Zusammenstellung. Daher auch die Handschrift.
- Adressaten: Angespochen sind alle, die in der Sekundarstufe 1 Mathematik unterrichten und diejenigen die in der Sek.II auf Inkompetenzen in den genannten Themen stoßen.
- Intentionen: Ich bin den Mittelstufenstoff durchgegangen und habe meine **"Königswege"** zusammegestellt. Dabei habe ich vor allem die Stellen ausführlich dargestellt, die sich einerseits ganz besonders bewährt haben, die ich auch in meinem Lehrerdasein immer wieder an der Realität "geschliffen" habe. Andererseits aber eignen sich die Verfahren auch, in den "Zahlücken-Situation" der **höheren Klassen –bis zur Uni— ganz ehrlich ein Verständnis neu entstehen zu lassen.** Es nützt nichts –und ist geradezu kontraproduktiv— die Lernenden zu beschämen "Was????, das könnt Ihr nicht????"
  Diese Lernenden sind ja jetzt älter und die Einsicht in solche elementaren Arbeitsweisen wie sie z.B. die Rechenreihen bieten, ist sicher zu haben. So kann ein Grundvertrauen in die eigene Kompetenz neu gewonnen werden. Völlig unfruchtbar und überhaupt nicht nachhaltig ist das Anwenden von Formeln, vor allem wenn sie in der "Mangelsituation" nicht neu eingesehen werden konnten.
  Weiter habe besonders die Themen dargestellt, die wenig in den Schulbüchern stehen.
- Auslassungen: Die Zusammenstellung ist natülich überhaupt nicht vollständig. Themen, die üblicherweise angemessen unterrichtet werden und Geometrie und Stochastik habe ich hier nicht behandelt. Wichtig ist mir noch Etliches, das finden Sie auf der Website. Ein guter Einstieg für schulnahe Sachen ist **"Didaktik".**
  Die Seiten **"Lernpakete"** sind insbesondere geeignet (und dafür konzipiert), schulisches Handwerk zu zeigen und damit Hilfen für meine Studierenden und Andere zu geben.

Kopfrechnen

immer aber nur, was im Kopf sinnvoll ist

Bei **allen** Einführungen

ausführlich mit ganz einfachen Zahlen rechnen.

Klare Regeln, was man im Kopf können soll.

Einige Zahlen kennen z.B. Quadrate

Strategien erklären lassen

Plural !!! Kniffe: $\cdot 5 = \cdot 10 : 2$

Das Prinzip "Kern der Rechnung"

z.B. $5 \cdot 7 = 35$

$50 \cdot 7 = 350$

$50 \cdot 70 = 3500$

$5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$

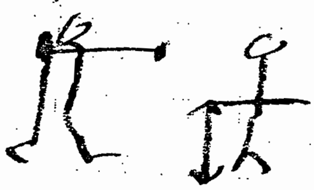
Überschläge, Hilfen geben, wie weit man sich vom genauen Wert entfernen darf: "Mut"

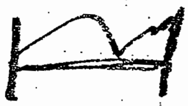
Größen

immer an Erfahrung anbinden

immer plausibel machen

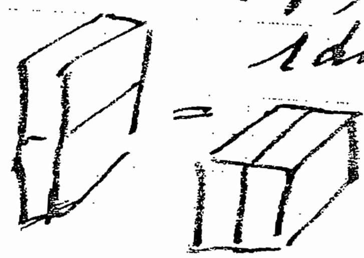
„menschliche Maße

1m 

2m
≙ Bett 

1 t ≙ kleines Auto

1 m² Tafel„flügel" (ca.)

1 l Milchtüte  1 dm³

1 a mit Zeitungs-m² selber legen

In Gleichungen in Math. nicht unbedingt richtige Größen schreiben aber auf „Anpassen der Größen" achten.

45 s

⇝ Fermi-Fragen

In Kl. und HA: „Wundern wenn falsch"

Lieber nur einfache Fälle behandeln als ganze Aufgabenklassen oder gar Themen weglassen.

z.B. Bruchgleichungen

$$\frac{10}{x+3} = 5 \text{ u.ä.}$$

auch $\frac{1}{R} = 2\pi$

Strategie "Mit dem ekligen Nenner malnehmen"

u.a. Formel-Umstellungen

$2^x = 17 \mid \lg$

$\lg 2^x = \lg 17$

$x \cdot \lg 2 = \lg 17$

$x = \frac{\lg 17}{\lg 2}$

immer mit der Log-Tarnkappe (ln später)

und nicht mit log zur Basis 2

"Braucht man den Exponenten nimmt man den lg oder ln"

Lieber überschaubare Terme verstanden umformen als "wilde Jungs" vom Typ Kinderschreck.

Fenster-Wechsel

Gleichung ⟷ Graph ⟷ Tabelle

Situation (Text)

Beobachtungen in Worte fassen

Freiheiten lassen

Aufgaben erfinden lassen
auch in Übungen wenigstens
selbst Zahlen wählen
dürfen.
HA zur Auswahl stellen

Lernstoff ~~strukturieren~~

"Was haben wir schon gelernt"
"Was können wir demnächst"
"Was müssen wir noch weiter lernen"

Problem analysieren:
"Was ist an dieser Aufg. neu?/unverständlich?/ungewohnt?"
Warum hat der Buchautor diese A. geschrieben?

Rechenreihen zu Mal bei Brüchen und ganzen Z.

$8 \cdot 3 = 24$	$2 \cdot 9 = 18$
$\xrightarrow{:2}$ $4 \cdot 3 = 12$ $:2$	$:3$ $2 \cdot 3 = 6$ $:3$
$\xrightarrow{:2}$ $2 \cdot 3 = 6$ $:2$	$:3$ $2 \cdot 1 = 2$ $:3$
$\xrightarrow{:2}$ $1 \cdot 3 = 3$ $:2$	$:3$ $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $:3$
$\xrightarrow{:2}$ $\frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	
$\xrightarrow{:2}$ $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$ $:2$	

Man multipliziert { einen Bruch mit einer g. Z. / eine ganze Zahl mit einem Bruch

indem man den den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und den Nenner beibehält

$$\frac{1}{8} \cdot 7 = \frac{7}{8} \qquad \frac{1}{7} \cdot 5 = \frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{8} \cdot 7 = \frac{2 \cdot 7}{8} = \frac{7}{4} \qquad \frac{2}{7} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{3}{8} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{8} = \frac{21}{8} \qquad 5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 2}{7} = \frac{10}{7}$$

Dauerregel: Vor dem Rechnen kürzen

Hat man Malaufgaben in Zähler und Nenner, dann kann man evt. kürzen

Voraussetzung a) Klar muss vorher sein "Stammbrüche"

$$1 \xrightarrow{:2} \frac{1}{2} \xrightarrow{:2} \frac{1}{4} \xrightarrow{:2} \frac{1}{8}$$

$$\downarrow \cdot 3 \qquad \downarrow \cdot 3 \qquad \downarrow \cdot 3$$

$$3 \xrightarrow{:2} \frac{3}{2} \xrightarrow{:2} \frac{3}{4}$$

} dies entspricht dann an die obigen Rechenreihe

Das "prozesshafte" (operatormäßige) Denken ist leichter.

Rechenreihen zu (geteilt) Bruch : Ganze parallel zur Operatorschreibweise

$1 : 2 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\boxed{\text{davor}}$ * $\quad$ $3 : 2 = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$ $\quad$ $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

Man teilt einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man
- den Zähler durch die Zahl teilt, wenn es aufgeht **
- oder den Nenner mit der Zahl malnimmt. ***

$\boxed{\text{davor}}$ *

$\frac{8}{7} : 2 = \frac{4}{7}$ $\quad$ $\frac{12}{5} : 4 = \frac{3}{5}$

$\frac{4}{7} : 2 = \frac{2}{7}$ $\quad$ $\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$

$\frac{2}{7} : 2 = \frac{1}{7}$ $\quad$ $\frac{3}{20} : 4 = \frac{3}{20 \cdot 4} = \frac{3}{80}$

$\frac{1}{7} : 2 = \frac{1}{7 \cdot 2} = \frac{1}{14}$

** das passt zur Anzahl-Vorstellung für den Zähler und wird daher gut verstanden.

*** Vorstellung: Wenn's nicht passt, muss man weiter teilen.

Man sollte auch nun betonen, dass : und Bruchstrich dasselbe ist

$5 : 3 = \frac{5}{3}$ $\quad$ $\frac{7}{8} = 7 : 8$ $\quad$ $\frac{1}{4} : 3 = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4 \cdot 3}$

erste Doppelbrüche !!

Rechnen rückw. zu Bruch · Bruch

$$\frac{2}{5}\cdot 12 = \frac{2\cdot 12}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\frac{2}{5}\cdot 3 = \frac{2\cdot 3}{5} = \frac{6}{5} \xrightarrow{:4} \frac{6}{5\cdot 4}$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$$

(jeweils $:4$)

Begr. auch über

$$\left(\frac{2}{5}:4\right)\cdot 3 = \frac{2}{5\cdot 4}\cdot 3 = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}$$

"Vor dem Rechnen kürzen" als Erleichterung!!

$$\frac{11}{8}\cdot\frac{17}{44} = \frac{\cancel{11}^{1}\cdot 17}{8\cdot\cancel{44}_{4}} = \frac{17}{32}$$

$$\frac{15}{28}\cdot\frac{16}{27} = \frac{\cancel{15}^{5}\cdot\cancel{16}^{4}}{\cancel{28}_{7}\cdot\cancel{27}_{9}} = \frac{5\cdot 4}{7\cdot 9} = \frac{20}{63}$$

damit das erkannt wird muss man bei Teilbarkeit und Kopfrechnen ordentlich gearbeitet haben.

Regel Man nimmt einen Bruch mit einem anderen Bruch mal, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner malnimmt (wie immer: Vor dem Ausrechnen Kürzen)

Rechenregeln zu Bruch : Bruch

$$\frac{5}{7} : 12 = \frac{5}{7\cdot 12} = \frac{5}{84} \quad \text{weil } 12\cdot\frac{5}{84} = \frac{\cancel{12}^{1}\cdot 5}{\cancel{84}_{7}} = \frac{5}{7}$$

$$\downarrow :4 \qquad\qquad \downarrow \cdot 4$$

$$\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7\cdot 3} = \frac{5}{21} \quad \text{weil } 3\cdot\frac{5}{21} = \frac{\cancel{3}^{1}\cdot 5}{\cancel{21}_{7}} = \frac{5}{7}$$

$$\downarrow :4 \qquad\qquad \downarrow \cdot 4$$

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5\cdot 4}{7\cdot 3} = \frac{20}{21} \quad \text{weil } \frac{3}{4}\cdot\frac{20}{21} = \frac{\cancel{3}^{1}\cdot \cancel{20}^{5}}{\cancel{4}_{1}\cdot\cancel{21}_{7}} = \frac{5}{7}$$

Man teilt einen Bruch durch einen zweiten Bruch, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrbruch / Kehrwert des zweiten Bruches malnimmt.

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3} = \frac{5\cdot 4}{7\cdot 3} = \frac{20}{21}$$

Vor dem Ausrechnen kürzen

$$\frac{15}{77} : \frac{3}{44} = \frac{15\cdot 44}{77\cdot 3} \underset{k3}{=} \frac{5\cdot 44}{77} \underset{k11}{=} \frac{5\cdot 4}{7} = \frac{28}{7}$$

Kürze erst, wenn du im Zähler und Nenner Malaufgaben hast.

Gemischte Zahlen

sind dazu da, dass man sich die Größe einer Bruchzahl besser vorstellen kann und z.B. auf dem Zahlenstrahl eintragen kann. Zum Rechnen sind sie selten gut.

Was glatt geht $1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$

$5\frac{1}{7} + 7\frac{5}{7} = 12\frac{6}{7}$

$1\frac{1}{2} \cdot 7 = 7 + \frac{7}{2} = 7 + 3\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2} : 7 = \frac{3}{2} : 7 = \frac{3}{14}$

Umwandeln sinnvoll

$1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{8}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{8}$

Umwandeln notwendig.

Regel Gemischte Zahlen um Punktrechnungen besser umwandeln.

Fallen

$3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$

einen Ganzen verwandeln.

schlimmer Fehler

$\stackrel{f}{=} \left(2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4}$

$3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} \stackrel{f}{=} 6\frac{3}{8}$

richtig

bevorzugen

entweder $\boxed{\text{Umwandeln}}$ oder $\cdot 7$ ... später $: 2$

$3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{3}{4} = \left(7 \cdot 2\frac{3}{4}\right) : 2 = 7 \cdot 1\frac{3}{8} = 7\frac{21}{8} = 9\frac{5}{8}$

Abbrechende Dezimaldarstellung:

Die Dezimaldarstellung bricht genau dann ab, wenn man den Bruch so erweitern kann, dass der Nenner eine Potenz von Zehn wird.
Die Dezimaldarstellung bricht genau dann ab, wenn n ausschließlich die Primfaktoren 2 und 5 enthält.

Beweis: "$\Leftarrow$" $n = 2^r 5^s$ mit $r,s \in \mathbb{N}_0$.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^r 5^s} \frac{2^{m-r} 5^{m-s}}{2^{m-r} 5^{m-s}} = \frac{2^{m-r} 5^{m-s}}{2^m 5^m} = \frac{2^{m-r} 5^{m-s}}{10^m} \text{ mit } m := \max(r,s)$$

$$\frac{1}{250} = \frac{1}{2 \cdot 5^3} = \frac{1}{2^1 5^3} \frac{2^2}{2^2} = \frac{2^2}{2^3 5^3} = \frac{4}{10^3} = 0{,}004 \text{ im Beispiel}$$

"$\Rightarrow$" $z = 0{,}a_1 a_2 \ldots\ldots a_r$ mit Ziffern a_i also $\frac{a_1 a_2 \ldots\ldots a_r}{10^r} = \frac{a_1 a_2 \ldots\ldots a_r}{2^r 5^r}$

im Beispiel $z = 0{,}0248 = \frac{248}{10000} = \frac{8 \cdot 31}{2^4 5^4} = \frac{31}{2 \cdot 5^4}$

Periodische Dezimaldarstellung

Die Dezimaldarstellung wird genau dann periodisch, wenn n irgendeinen anderen Primfaktor als 2 oder 5 enthält. Die Periodenlänge ist maximal n-1.
Beweis: Beim schriftlichen Teilen 1:n nach der Methode von Klasse 6 merkt man, dass es nur n-1 verschiedene Reste geben kann. Darum kommt -in der Phase , in der man nur noch Nullen herunterholt- nach spätestens n-1 Schritten ein voriger Rest nochmal.

n enthalte nun keine 2 und keine 5 mehr, also $\mathrm{ggT}(10,n) = 1$

Dann ist die Periodenlänge **ein Teiler von** $\varphi(n) = \mathrm{Euler}(n) =$ Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen= $\left|\mathbb{Z}_n^{\;*}(n)\right|$ Beispiel $\frac{1}{37} = 0{,}\overline{027}$ und $p = 3 \mid 36 = 37 - 1$

Beweis: *(Lesen Sie erst die Rückverwandlung von periodischen Dezimalzahlzahlen in Brüche!)* *

Betrachte $\frac{1}{n} = 0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_p} = \frac{b_1 b_2 \ldots b_p}{99\ldots\ldots9} = \frac{b_1 b_2 \ldots b_p}{10^p - 1} \Leftrightarrow 10^p - 1 = b_1 b_2 \ldots b_p \bullet n \underset{n}{\equiv} 0$

Also $10^p \underset{n}{\equiv} 1$,d.h. Periodenlänge p ist die Ordnung von 10 in der Gruppe $\mathbb{Z}_n^{\;*}(n)$. Da die Elementordnung die Gruppenordnung teilt, ist die Behauptung für sofort-periodische Dezimalzahlen bewiesen. *Und wenn sie noch nicht die Kryptographievorlesung gehört haben oder sonst von Gruppentheorie keine Ahnung haben, dann ziehen nur das Resumee: "Also man kann das zeigen".*
Vorperioden ändern diesen Zusammenhang nicht, denn

$$\frac{1}{n} = 0{,}a_1 a_2 \ldots a_v \overline{b_1 b_2 \ldots b_p} = (a_1 a_2 \ldots a_v + 0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_p}) \cdot 10^{-v}$$

$$0{,}083333333\ldots = (8 + 0{,}\bar{3}) \cdot 10^{-2} = (8 + \tfrac{3}{9}) \cdot 10^{-2} = \frac{8 \cdot 9}{900} + \frac{3}{900} = \frac{75}{900} = \frac{1}{12}$$

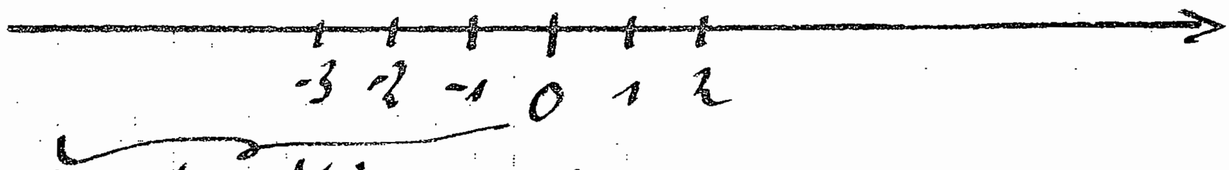
* $0{,}\overline{72} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$

$0{,}0\overline{72} = \frac{72}{990} = \frac{8}{110} = \frac{4}{55}$

Negative Zahlen

1. Phase Wandern an [illegible] allerlei Skalen

Ende: Wir erweitern den Zahlenstrahl nach links



Taufe die Minuszahlen

Wie entstehen Minuszahlen beim Rechnen:

$3 - 1 = 2$

$3 - 2 = 1$

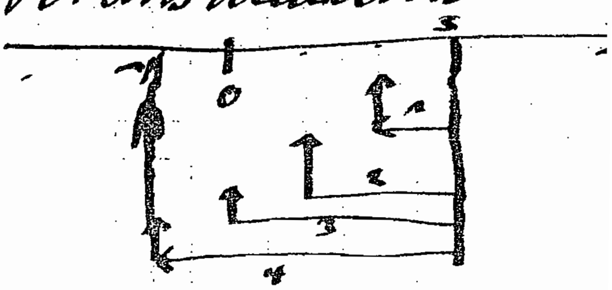
$3 - 3 = 0$

$3 - 4 = -1$ Oho

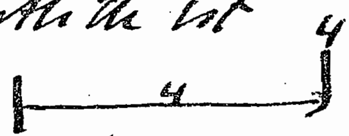
$3 - 5 = -2$

$3 - 6 = -3$

Veranschaulicht



eigentlich ist



dies der Pfeil von der 4

Hier starte ich

für $\boxed{\text{Minus-Rechnung}}$

drehe ich den Pfeil der zweiten Zahl um

und hänge ihn dann an den Pfeil der ersten Zahl an.

Kann man Minuszahlen durch Rechnen wieder auf Pluszahlen kommen?

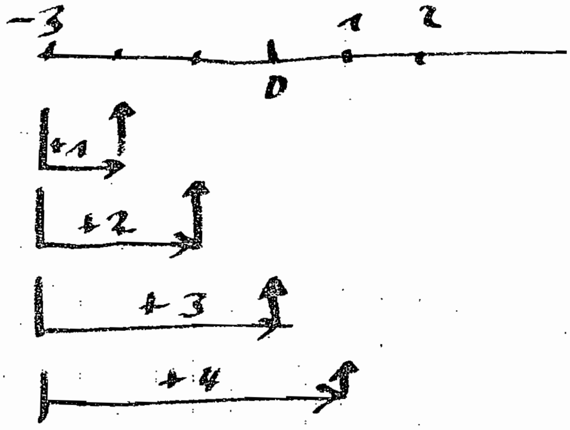
$-3+1=$

$-3+2=$

$-3+3=$

$-3+4=$

$-3+5=$



Überlegen lassen. 2

Bei der 1. Zahl starte ich. Für Plus-Rechnung hänge ich den Pfeil der 2. Zahl an.

Kann man von einer Minuszahl aus auch noch Minus-Rechnen?

$3-2=1$

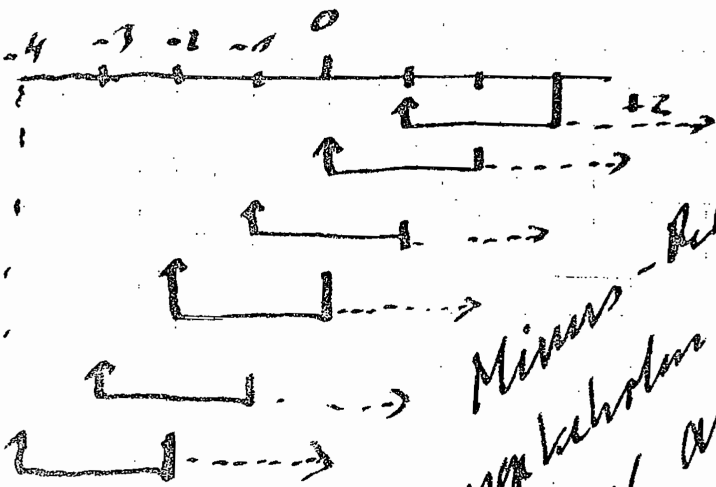
$2-2=0$

$1-2=-1$

Ed $0-2=-2$

$-1-2=-3$

$-2-2=-4$

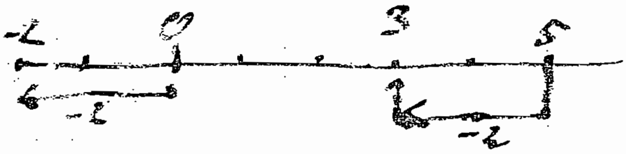


Minus-Rechnung = umgekehrten Pfeil anhängen

Minuszahlen als 2. Zahl in der Rechnung

$5+(-2) =$ was soll das sein?

Nimm die Plus-Rechnung-Regel



Pfeil von der -2 anhängen

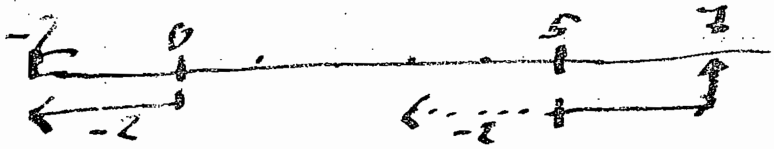
Also $5+(-2)=3$

$5+(-2)=5-2=3$

bereinigt   Schlüsselwort

$5-(-2) =$ was soll das sein?

Nimm die Minus-Rechnung-Regel



Pfeil von der -2 umdrehen und anhängen

Also $5-(-2)=7$

$5-(-2)=5+2=7$

bereinigt

Bereinigungsregeln

$-(-2) = +2$

$+(-2) = -2$

$-(+2) = -2$

$+(+2) = +2$

Minus eine Minus-Zahl ist Plus (Betrag der) die Zahl

Plus eine Minus-Zahl ist Minus die Zahl

Wichtig

$$11 - (-3) + (-1) + (+7) - (+10)$$

$$= 11 + 3 - 1 + 7 - 10$$

bereinigen

$$= \boxed{+11}\boxed{+3}\boxed{-1}\boxed{+7}\boxed{-10}$$

Waggons $\boxed{\text{Zeich Zahl}}$ darf man umstellen

$$= \boxed{+11}\boxed{-1}\boxed{+3}\boxed{+7}\boxed{-10}$$

$$= \boxed{+10}\boxed{+10}\boxed{-10}$$ Ersatzwaggon

$$= \boxed{+10}\boxed{+0}$$

$$= +10$$

in der Lernphase führende + hinschreiben lassen

„da hab' ich dran gedacht"

Punktrechnung

Mal als Abkürzung für viele Plus

$$3+3+3+3 = 4\cdot 3 = 12$$

4 mal die 3 plus gerechnet.

$$-3+(-3)+(-3)+(-3) = $$ bereinigt

$$-3-3-3-3 = -12$$

abgekürzt $\rightarrow$ $4\cdot(-3) = -12$

das muss so sein

Ebenso

$$4+4+4 = 4\cdot 3$$ die 4 dreimal addiert genommen

$$-4+(-4)+(-4) = (-4)\cdot 3$$

$$= -4-4-4 = -12$$ muss also

Also $4\cdot(-3) = -12$

$(-4)\cdot 3 = -12$

Rechenreihen dazu

$4\cdot 3 = 12$

$4\cdot 2 = 8$ (-4)

$4\cdot 1 = 4$ (-4)

$4\cdot 0 = 0$ (-4)

$4\cdot(-1) = -4$ (-4)

$4\cdot(-2) = -8$ (-4)

$4\cdot(-3) = -12$ (-4)

$4\cdot 3 = 12$

$3\cdot 3 = 9$ (-3)

$2\cdot 3 = 6$ (-3)

$1\cdot 3 = 3$

$0\cdot 3 = 0$

$(-1)\cdot 3 = -3$

$(-2)\cdot 3 = -6$

$(-3)\cdot 3 = -9$

$(-4)\cdot 3 = -12$

Kombinierte Rechenreihen

$-2 \cdot 3 = -6$

$-2 \cdot 2 = -4$ $\quad +2$

$-2 \cdot 1 = -2$ $\quad +2$

$-2 \cdot 0 = 0$ $\quad +2$

! $\quad -2 \cdot (-1) = +2$ $\quad +2$

$-2 \cdot (-2) = +4$ $\quad +2$

$-2 (-3) = +6$ $\quad +2$

Also

$\boxed{\text{Minus-Zahl mal Minus-Zahl} = \text{Plus-Zahl}}$

Falle:

Minuszahl <u>Minus</u> Minus-Zahl

= Minuszahl <u>Plus</u> die Zahl = <u>Unklar</u>

Kommt auf die Größe an.

Prozentrechnung

Prozente und Anteile

1 Prozent $= 1\% = \frac{1}{100} =$ 1 von 100 Teilen des Ganzen $= 0{,}01$

2 Prozent $= 2\% = 0{,}02 = \frac{2}{100} =$ 2 von 100 Teilen des Ganzen

⋮

|| „von" bei Anteilen wird „mal" ||

$\frac{1}{2}$ von $12 = \frac{1}{2} \cdot 12 = \frac{12}{2} = 6$

$= 0{,}5 \cdot 12 = 6$

$= 50\% \cdot 12 = 6$

Lerne: $\frac{1}{2} = 50\% = 0{,}5 = \frac{5}{100}$

$\frac{1}{4} = 25\% = 0{,}25 = \frac{25}{100}$

$\frac{1}{8} = 12{,}5\% = 0{,}\underbrace{12}5 = \frac{12{,}5}{100} = \frac{125}{1000}$

Ebenso $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{5} \dots$

Diese beiden Stellen als volle Prozente lesen

Pfeilschreibweise

$12 \xrightarrow{\cdot 50\%} 6$

$\xrightarrow{\cdot 0{,}5}$

$\xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}}$

später

$211{,}50\,€ \xrightarrow[\cdot 0{,}7]{\cdot 70\%}$ ......

oder

TR $211{,}50 \cdot 70\boxed{\%} = \dots$

oder

$211{,}50 \cdot 0{,}7 = \dots$

das TR-ergebnis kommt heraus wie Mehl aus der Mühle

Grundaufgaben

$$\text{Grundwert} \xrightarrow[\cdot p\%]{\cdot \text{Prozentsatz}} \text{Prozentwert}$$

① $G \xrightarrow{\cdot p\%} P$ $\quad 200€ \xrightarrow[\cdot 0{,}06]{6\%} \underline{12€}$

Im 2-Schritt $\quad 200€ \xrightarrow{\cdot 0{,}06} 12€$

$200€ \xrightarrow[\cdot 0{,}01]{:100} 2€ \xrightarrow{\cdot 6} 12€$

Im 3-Satz

$$\begin{array}{lcll} & 100\% & \text{entspricht} & 200€ \\ :100 & 1\% & \hat{=} & 2€ & :100 \\ \cdot 6 & 6\% & \hat{=} & \underline{12€} & \cdot 6 \end{array}$$

Regel: Die 1 kommt dahin wo ? wichtig

② $G \xrightarrow{\cdot p\%} P$ $\quad ? \xrightarrow[\cdot 0{,}09]{\cdot 9\%} 18€$

$200 \xleftarrow{:0{,}09} 18€$

im 2-Schritt

$18€ \xrightarrow{:9} 2€ \xrightarrow{\cdot 100} 200$

im 3-Satz.

$$\begin{array}{lcll} ①\ :9 & 9\% & \hat{=} & 18€ & ② \\ & 1\% & \hat{=} & 2€ \\ \cdot 100 & 100\% & \hat{=} & ? & \cdot 100 \\ & 100\% & \hat{=} & \underline{200€} \end{array}$$

(3) $G \xrightarrow{p\%} P$

Prozente sind Anteile vom Ganzen

$$p\% = \frac{P}{G}$$

$$\frac{8€}{40€} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

Probe

$$40€ \xrightarrow{\cdot 0{,}2} 8€$$

Im 3-Satz.

1 kommt dahin wo ? nicht ist

$$\begin{aligned} 100\% &\mathrel{\hat{=}} 40€ \\ ?\% &\mathrel{\hat{=}} 8€ \\ \tfrac{100}{40}\% &\mathrel{\hat{=}} 1€ \\ \tfrac{100}{40}\cdot 8\% &\mathrel{\hat{=}} 8€ \end{aligned}$$

:40 (1.) :40 (2.) ·8 (3.)

$$\underline{\underline{20\%}} = \frac{10}{4}\cdot 8\% = \frac{100}{40}\cdot 8\%$$

Vermehrung des Grundwertes um p%

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\cdot p\%"] \arrow[rr, bend right, "\cdot(1+p\%)"'] & P_{zusätzlich} \arrow[r, "+G"] & P_{gesamt} \end{tikzcd}$$

$\cdot(1+p\%)$ Wachstumsfaktor

1-Schritt $\quad 200€ \xrightarrow[\cdot 1{,}06 \;\; \cdot(1+6\%)]{\cdot 106\%} 212€$

3-Schritt $\quad 200€ \xrightarrow{:100} 2€ \xrightarrow{\cdot 6} 12€ \xrightarrow{+200€ = G} 212€$

$\mathrel{\hat{=}} 1\% \qquad \mathrel{\hat{=}} 6\%$

Aber Entsprechend zurück !!! $\quad (2) \xleftarrow[:(1+6\%)]{:106\%} 212€ \quad$ nur so!

Welche Zahl k erfüllt $k^2 = 2$?

Versuch v	Quadrat v^2	zu klein	zu groß	wir wissen jetzt
1	1	x		
2	4		x	$1 < k < 2$
1,5	2,25		x	$1 < k < 1{,}5$
1,4	1,96	x		$1{,}4 < k < 1{,}5$
1,45	2,1025		x	
1,41	1,9881	x		
1,42	2,0164		x	$1{,}41 < k < 1{,}42$
1,415	2,0022		x	$1{,}41 < k < 1{,}415$
1,414	1,993	x		$1{,}414 < k < 1{,}415$
⋮ nach Belieben.				
1,41421356	1,41421357	x	x	

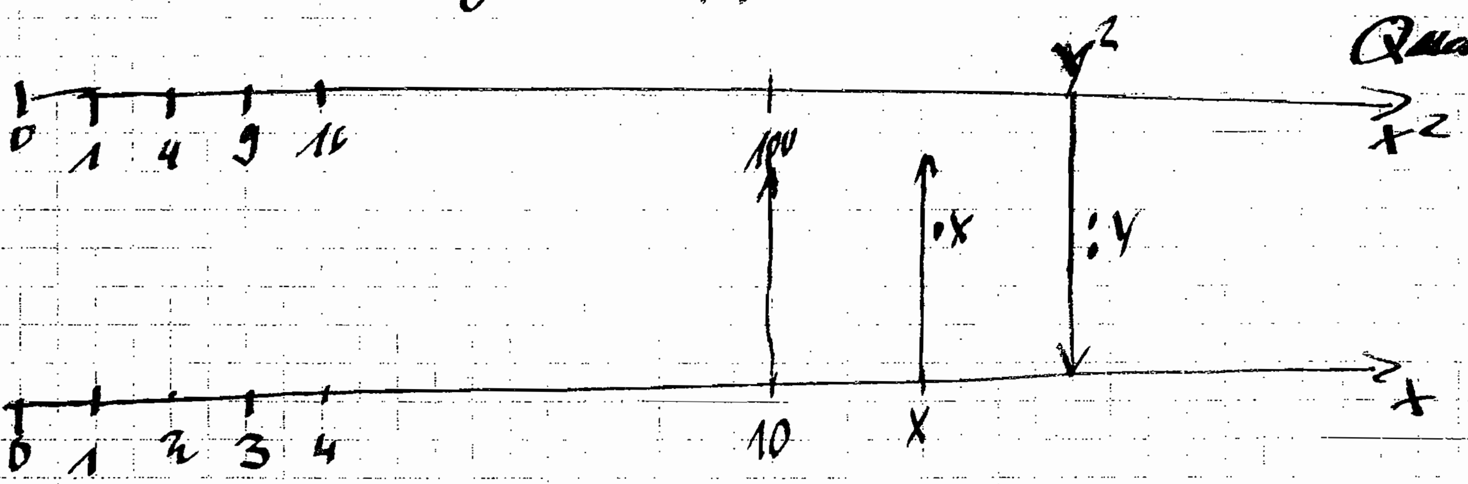
Jetzt andere probieren lassen.

$k \approx 1{,}414213562$

TR $\sqrt{2} = k$ ← später [illegible]

Heronverfahren

Vorbereitung: Doppelzahlenstrahl:

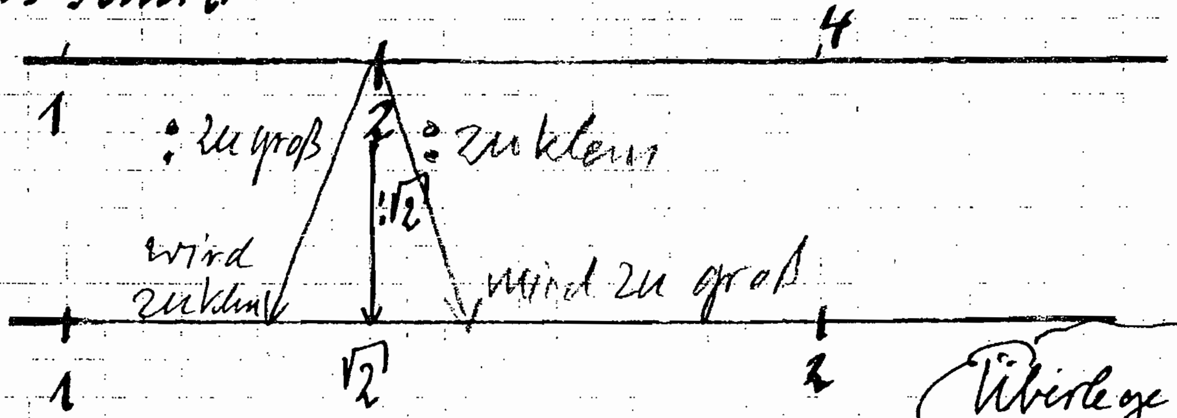


Beobachtung: oben ist die Einteilung nicht gleichmäßig

immer mehr Zahlen zwischen zwei Einträgen

man weiß nicht wo die genau stehen.

Ausschnitt



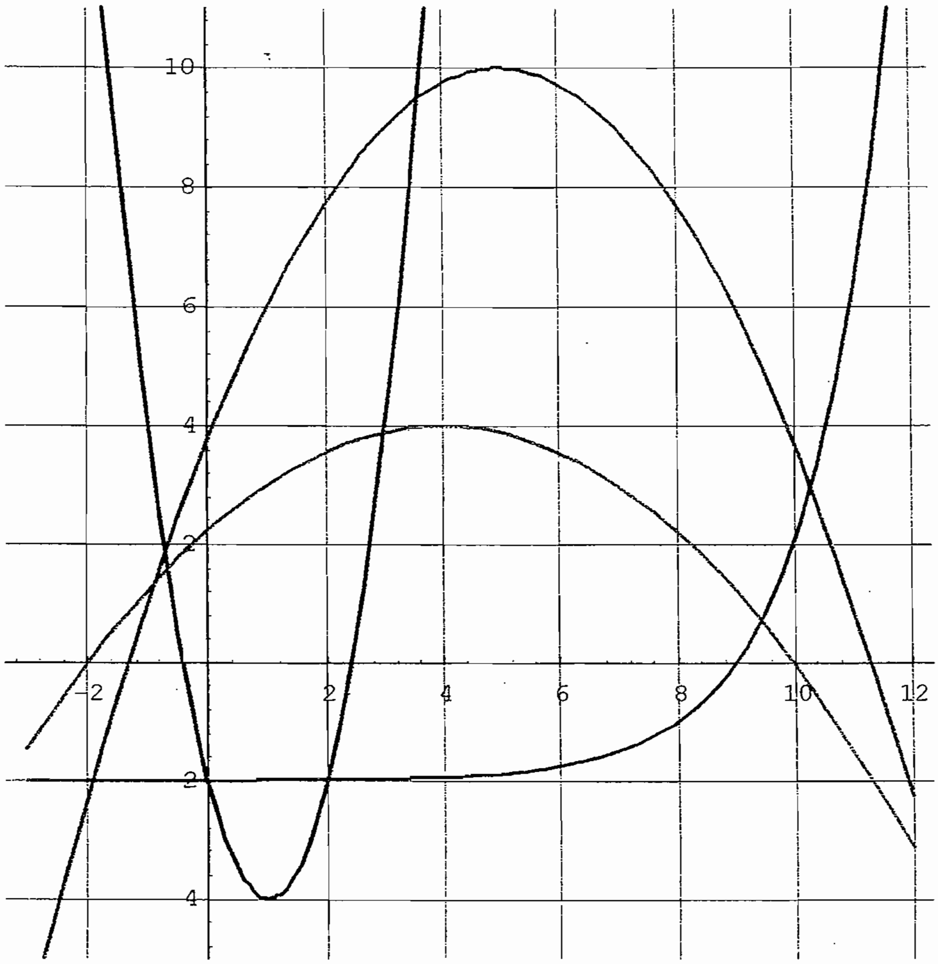
aber was macht man, wenn man $\sqrt{2}$ noch nicht kennt?

Überlege: wenn K_{alt} zu klein $\Rightarrow \frac{2}{K_{alt}}$ zu groß und umgekehrt

Idee von Heron: Er nimmt als Verbesserung den Mittelwert aus zwei Versuchen

$$K_{neu} = \frac{1}{2}\left(K_{alt} + \frac{2}{K_{alt}} \right)$$

Stelle die Funktionsgleichungen auf.
Es sind Parabeln, bis auf die Exponentialfunktion, die die Basis 2 hat.



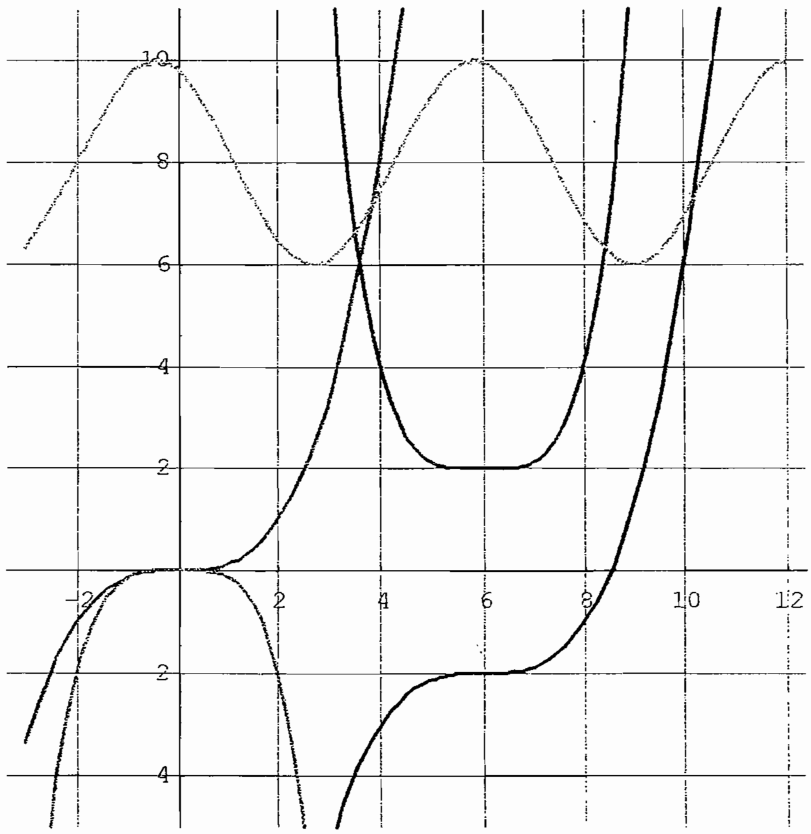
Hier tummeln sich ein Sinus und mehrere Potenzfunktionen.

Zeichne selbst noch ein:

$f(x) = -2\cos(x-2)+4$

$g(x) = -2(x-2)+4$

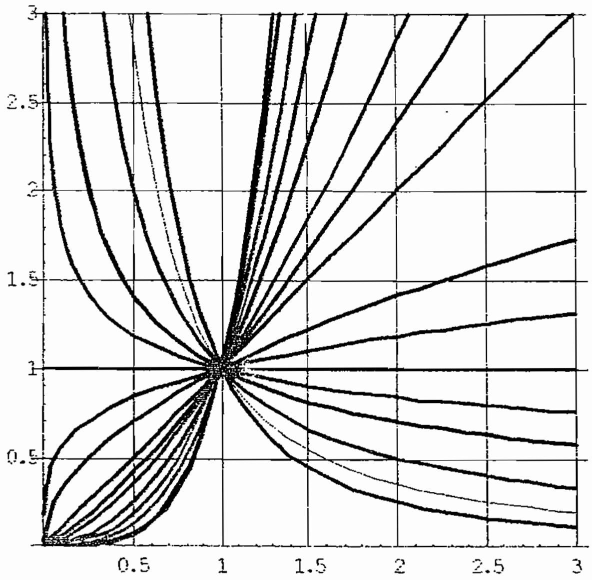
$h(x) = -2(x-2)^2+4$



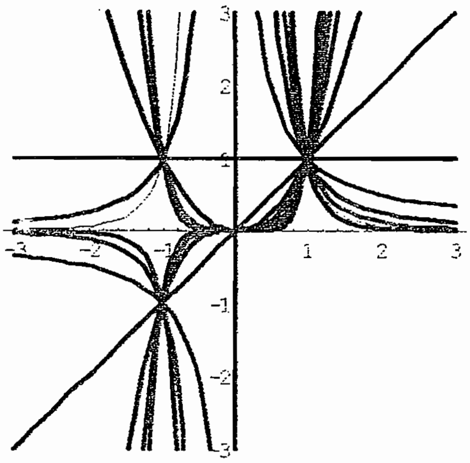
Aufgabe Klasse 10 Potenzfunktionen NAME________________ Ha, Nov. 98

$\left\{\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^{7/4}}, \frac{1}{x^{3/2}}, \frac{1}{x^{5/4}}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^{3/4}}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt[4]{x}}, 1, \sqrt[4]{x}, \sqrt{x}, x^{3/4}, x,\right.$

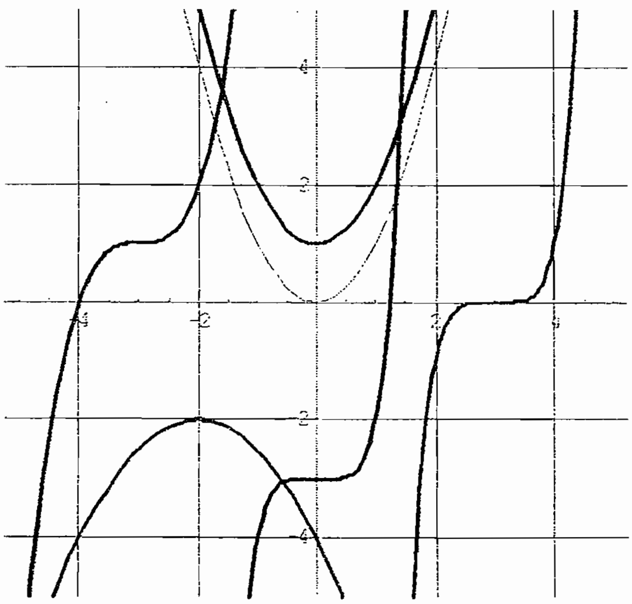
$\left. x^{5/4}, x^{3/2}, x^{7/4}, x^2, x^{9/4}, x^{5/2}, x^{11/4}, x^3, x^{13/4}, x^{7/2}, x^{15/4}, x^4\right\}$



Oben siehst du Funktionsterme für Potenzfunktionen. Welche davon sind hier dargestellt? Beschrifte sorgfältig, streiche die, die nicht in der Liste dargestellt sind.

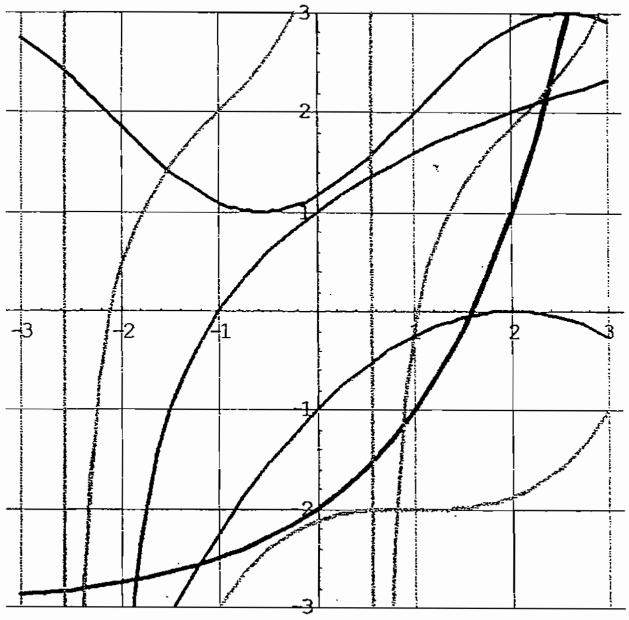


Hier sind Potenzfunktionen mit aufeinanderfolgenden ganzzahligen Exponenten dargestellt. Beschrifte sorgfältig und präge dir den Verlauf ein.



Welche Potenzfunktionen sind hier in verschobener Form darstellt. Bei den Potenzen und den Verschiebungen kommen nur ganze Zahlen vor. Eine gestauchte Parabel ist dabei. Rechne bei jedem deiner Vorschläge zur Sicherheit drei Werte nach.

Klassenarbeit Nr.6 Klasse 10 F1 Ha am 29.6.99 Name:



Aufgabe 1

Welche Funktionsgraphen sind hier gezeichnet?

1)____________ 2)____________

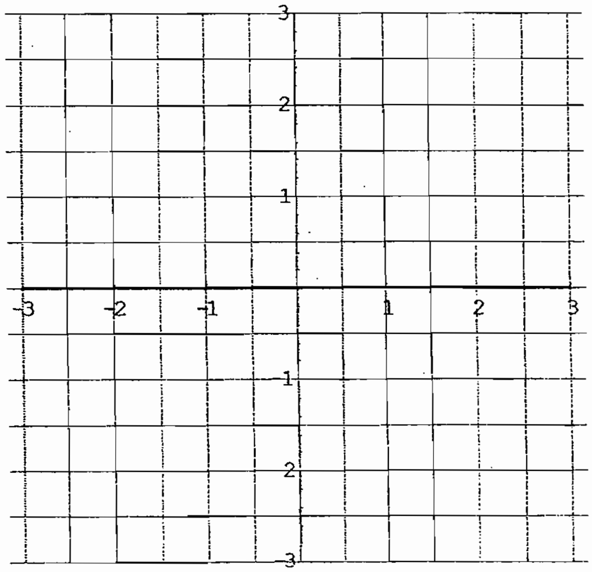
3)____________ 4)____________

5)____________ 6)____________

Zeichne hier unten ein:

$f(x) = \cos(2x)$ $g(x) = \cos(x)+2$

$h(x) = 2\cos(x+1)-1$



Aufgabe 2

Löse die Gleichung $5^{x-2} = 2^{x+1}$.

Mache die Fragestellung der Gleichung an einer qualitativen Skizze deutlich. (Im Heft).

Aufgabe 3

Wo schneiden sich die Parabeln $f(x) = x^2 + x - 2$ und $g(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-4)$

Beistimme für beide Parabeln die Nullstellen, den Scheitel und die Scheitelgleichung und zeichne mit diesen Erkenntnissen.

Aufgabe 4

Berechne hier: $\log_3 27 =$ $\log_5 \frac{1}{25} =$ $\lg 10^8 =$ $\log_{12} 36 + \log_{12} 4 =$

Fasse zusammen: $2\log_3 x^2 - 4\log_3 x =$ $5\log_4 a - 3\log_4 (2a) =$

Berechne (begründet) eine Dezimalzahl: $\text{lb } 100$

Gib an, wie man im Kopf herausbekommen kann, zwischen welchen ganzen Zahlen der Wert liegen muss.

C:\Dörte\Mathematik\SEK1Mittelstufe\10logFunktion.wpd

Exponentialfkt – Logarithmus als Umkehrfunktionen voneinander

$y = e^x$ $y = 10^x$ $y = a^x$

$\ln y = x$ $\lg y = x$ $\log_a y = x$

$2{,}71828 = e^1$ $1000 = 10^3$ $32 = 2^5$

$\ln 2{,}7128\ldots = 1$ $\lg 1000 = 3$ $\log_2 32 = 5$

$\ln e = 1$ $\lg 10 = 1$ $\log_2 2 = 1$ $\log_a a = 1$

nach Umtausch

$y = \ln x$ $y = \lg x$ $y = \log_a x$

Merke $7 = \ln e^7$ $7 = \lg 10^7$ $7 = \log_a a^7$

Mit dem passenden Logarithmus bekommt man die Exponenten.

$e^y = e^{\ln x}$ $10^y = 10^{\lg x}$

$e^y = x$ $10^y = x$

Merke $e^{\ln 7} = 7$ $10^{\lg 7} = 7$ $2^{\log_2 7} = 7$

e hoch und ln
10 hoch und lg
a hoch und $\log_a$
heben sich stets auf, wenn sie direkt aufeinander treffen.

für die Profis: $u = a^r \quad | \log_a$

$\log_a u = \log_a a^r = r \quad | \; a$ hoch

$u = a^{\log_a u} = a^r$

Schreibe 1024 als Potenz von 2 ist die eigentliche Aufgabe.

Beispiele $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

sicher auch hinten 4 Seit

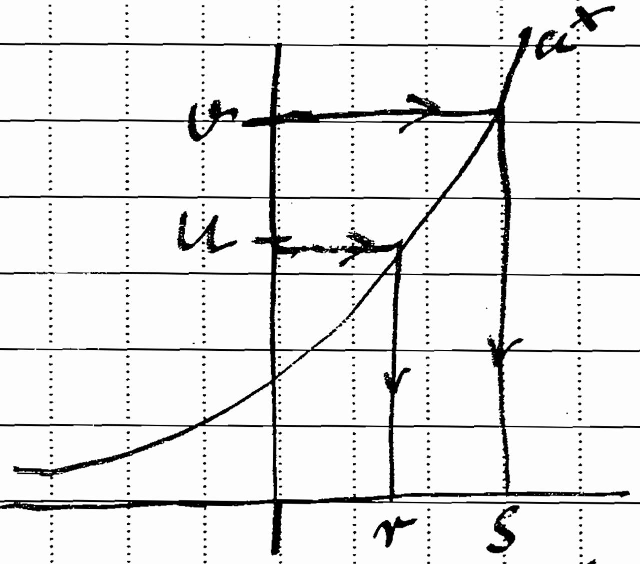
Herleitung der Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen

I $\log_a(u\cdot v) = ?$ — (I) $a^r\cdot a^s = a^{r+s}$

II $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = ?$ — (II) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

III $\log_a u^v = ?$ — (III) $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$

für u, v pos $_{I,II}$ bzw u pos bei III



da der Wertebereich von $f: x \to a^x$ alle positiven Zahlen umfasst, gibt es Zahlen r und s mit

$u = a^r$, $v = a^s$

$\log_a u = r$ $\log_a v = s$

$$\log_a(u\cdot v) = \log_a(a^r\cdot a^s) \overset{I}{=} \log_a(a^{r+s}) = r+s$$

$$= \log_a(u) + \log_a(s)$$

das gilt für jeden Logarithmus, speziell auch für $a=10$: $\lg(u\cdot v) = \lg(u) + \lg(v)$

$\boxed{\log(u\cdot v) = \log u + \log v}$

$$\lg\left(\frac{u}{v}\right) = \lg\left(\frac{10^r}{10^s}\right) \overset{II}{=} \lg 10^{r-s} = r-s = \lg u - \lg v$$

log sei ein allgemeiner Logarithmus $\boxed{\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v}$

u positiv, s beliebig — also $\boxed{\log u^s = s \log u}$!

$$\log(u^s) = \log((a^r)^s) \overset{III}{=} \log(a^{r\cdot s}) = r\cdot s = s\cdot r = s\cdot\log(u)$$

mit dem a, das zu log passt

Gleichungen lösen mit Logarithmen.

Lg 9?! – lg 9 Falle nicht vereinfachen

$$19 = 2^x \quad | \lg$$

$$\lg 19 = \lg(2^x) \underset{III}{=} x \lg 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 19}{\lg 2} \approx 4{,}248$$

Logarithmengesetz — Es gibt dies Gesetz zu verkünden

In der Einführungsphase kann man zu den Potenzen, die man im Kopf weiß, auch Logarithmusfragen lösen. Danach nimmt man nur noch lg oder ln für alles.

Im Kopf kann sein Basis 2 Exponent $\{0, \pm 1, \dots \pm 10\}$

also $\frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}} = 2^{-10}$ also $\log_2 \frac{1}{1024} = -10$

$\log_2 2^{-10} =$

Basis 3 Exponent $\{0, \pm 1, 2, 3, 4\}$

also 1, 3, 9, 27, 81 und Kehrwerte

Basis 4 Exp. $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ aus der 2-Liste

Basis 5 $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$

also 1, 5, 25, 125, 625 und Kehrwerte

Basis 6 allenfalls noch $216 = 6^3$ sonst nur bis hoch 2

$$1{,}05^{x+3} = 4{,}8 \quad | \lg$$

$$(x+3) \cdot \lg 1{,}05 = \lg 4{,}8$$

$$x + 3 = \frac{\lg 4{,}8}{\lg 1{,}05}$$

$$x = \frac{\lg 4{,}8}{\lg 1{,}05} - 3 = \frac{0{,}68\dots}{0{,}021\dots} - 3 = 29{,}15\dots \approx 29$$

Bei Zwischenrechnungen andeuten nicht runden
Zum Schluss runden

"Umwandlungen mit einer guten Methode

Aufgabe: $\boxed{\text{Schreibe } 2^x \text{ mit Basis } \left\{\begin{matrix}10\\ e\\ a\end{matrix}\right\}}$

$2^x = 10^y \mid \lg$ | $2^x = e^y \mid \ln$ | $2^x = a^y \mid \lg$

$x \lg 2 = y \lg 10$ | $x \ln 2 = y \ln e$ | $x \lg 2 = y \lg a$

$x \lg 2 = y$ | $x \ln 2 = y$ | $x \frac{\lg 2}{\lg a} = y$

Also $2^x = 10^{x \cdot \lg 2}$ | Also $2^x = e^{x \ln 2}$ | also $2^x = a^{\frac{\lg 2}{\lg a} \cdot x}$

ebenso mit ln

Methode: "Nutze $2 = 10^{\lg 2} = e^{\ln 2}$"

$2^x = (10^{\lg 2})^x \overset{\text{III}}{=} 10^{x \cdot \lg 2}$

$2^x = (e^{\ln 2})^x \overset{\text{III}}{=} e^{x \cdot \ln 2}$

Regel aus Formelsammlung Basiswechsel $\boxed{b^x = a^{\frac{\lg b}{\lg a} \cdot x}}$

bloß nicht lernen, lohnt nicht!

Aufgabe: $\boxed{\text{Berechne } y = \log_a x}$ $\mid a$ hoch

Beispiel aus Schulbuch

$\log_7 343 = ?$

Entweder raten $343 = 7^3$

$\log_7 7^3 = 3$

oder berechnen

$\log_7 343 = y \mid 7$ hoch

$343 = 7^y \mid \lg$

$\lg 343 = y \cdot \lg 7$

$y = \frac{\lg 343}{\lg 7} = 3$

$a^y = a^{\log_a x} = x \mid \lg$

Umkehrfkt.

$\lg(a^y) = \lg x$

$y \cdot \lg a = \lg x$

$y = \frac{\lg x}{\lg a}$

in Formel:

$\boxed{\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}}$

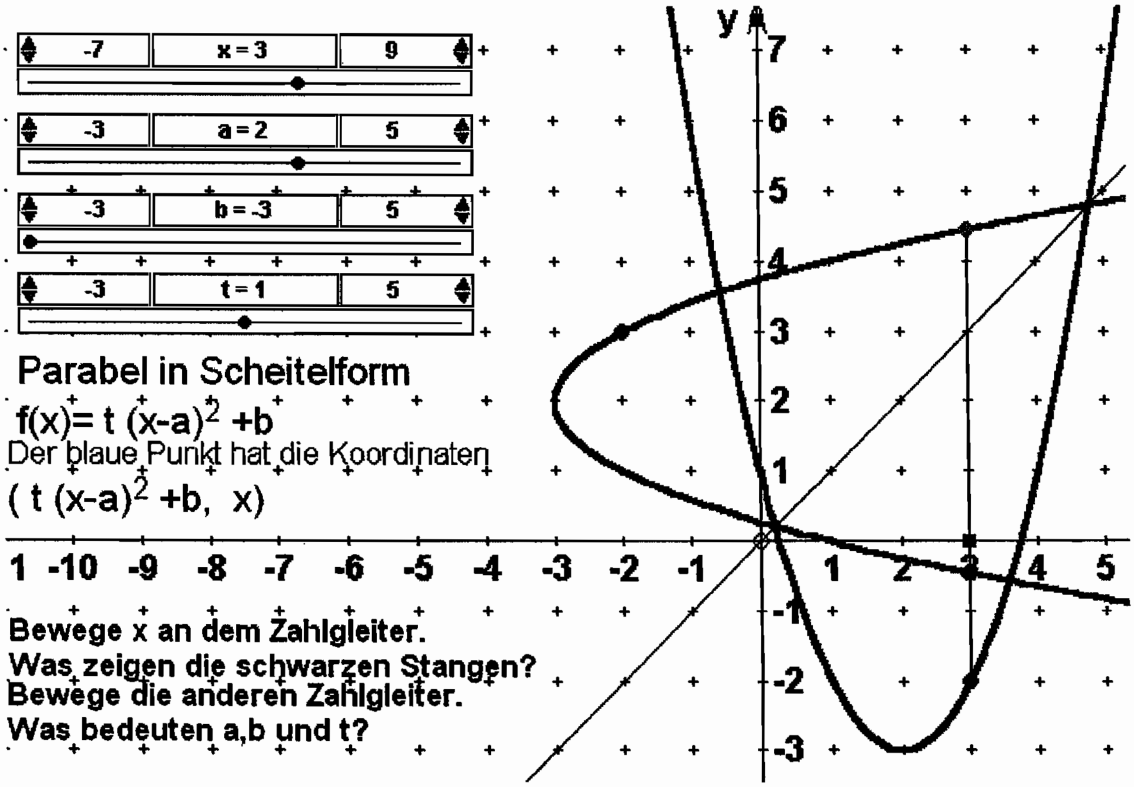
$= \frac{\ln x}{\ln a}$

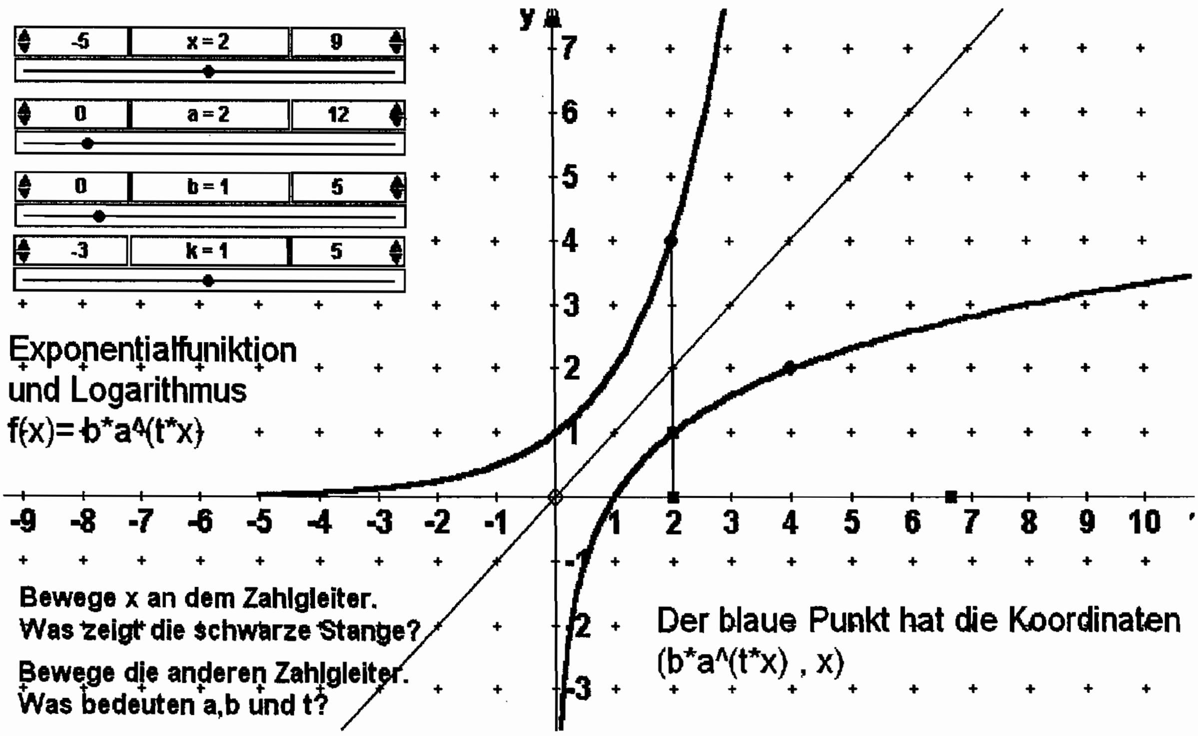
nicht lernen, machen!

Umkehr-Funktionen und Umkehr-Relationen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 12. Juli 2004

In Eulid-Dynageo (und allen Werkzeugen, die eine Koordinaten-Eingabe vorsehen, auch Excel) kann man zur Erzeugung der Umkehr-Relation zur Funktion f statt (x,f(x)) einfach (f(x),x) eingeben. Hier durch den roten Punkz auf der Parabel und dem blauen Punkt auf der Wurzelrelation dargestellt. Die beiden Punkte an der Stelle x (orange und lila) entstehen durch durch wirkliche Wurzel-Funktions-Äste.





Parabel mit Wurzelrelation in Excel

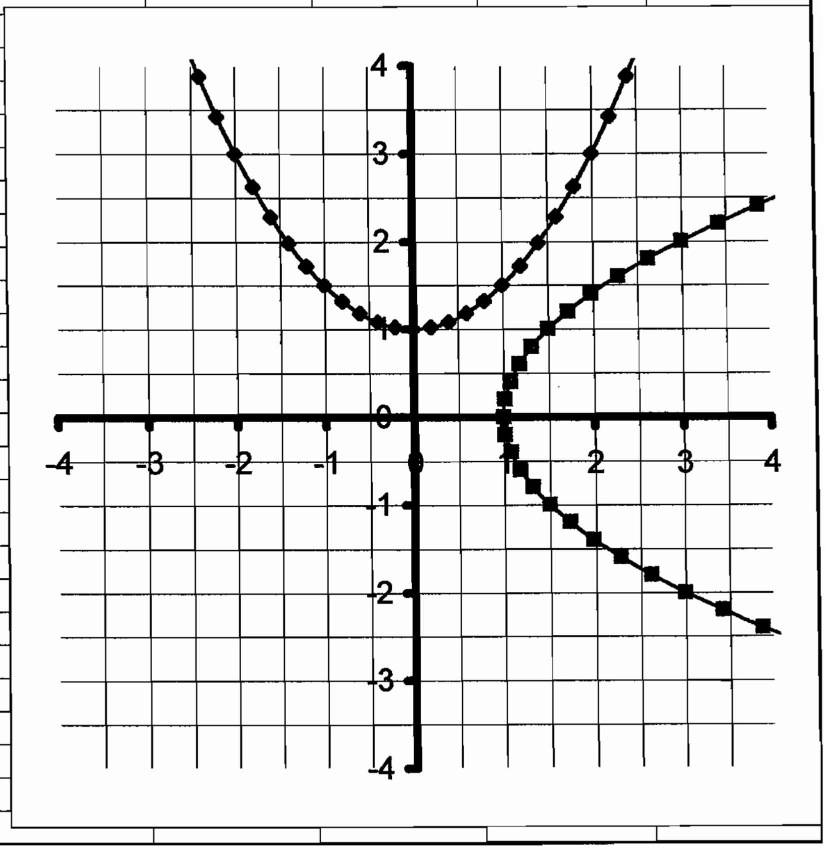
Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jul 04

p	0,5
u	0
v	1

$$y = a \cdot (x - b)^2 + c$$

x	p*(x-u)^2+v
-3	5,5
-2,8	4,92
-2,6	4,38
-2,4	3,88
-2,2	3,42
-2	3
-1,8	2,62
-1,6	2,28
-1,4	1,98
-1,2	1,72
-1	1,5
-0,8	1,32
-0,6	1,18
-0,4	1,08
-0,2	1,02
0	1
0,2	1,02
0,4	1,08
0,6	1,18
0,8	1,32
1	1,5
1,2	1,72
1,4	1,98
1,6	2,28
1,8	2,62
2	3
2,2	3,42
2,4	3,88
2,6	4,38
2,8	4,92
3	5,5



Exponentialfkt und Logarithmus in Excel

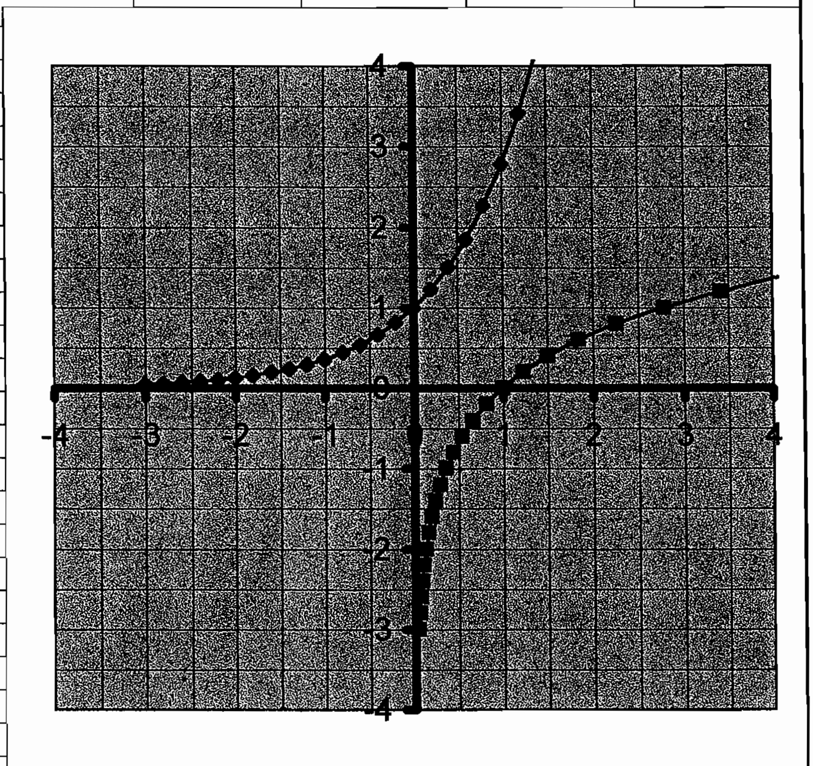
Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jul 04

a	2,78
c	1
k	1

$$y = c \cdot a^{k \cdot x}$$

-3	0,05
-2,8	0,06
-2,6	0,07
-2,4	0,09
-2,2	0,11
-2	0,13
-1,8	0,16
-1,6	0,19
-1,4	0,24
-1,2	0,29
-1	0,36
-0,8	0,44
-0,6	0,54
-0,4	0,66
-0,2	0,82
0	1,00
0,2	1,23
0,4	1,51
0,6	1,85
0,8	2,27
1	2,78
1,2	3,41
1,4	4,18
1,6	5,13
1,8	6,30
2	7,73
2,2	9,48
2,4	11,63
2,6	14,27
2,8	17,51
3	21,48



Sinus und Arkussinus in Excel

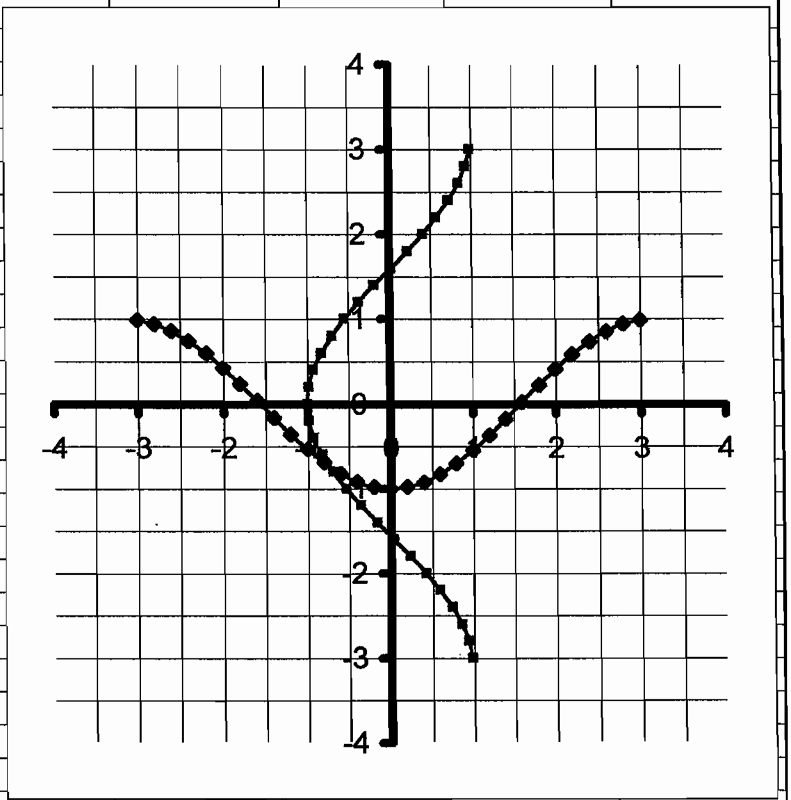
Prof. Dr. Dörte Haftendorn

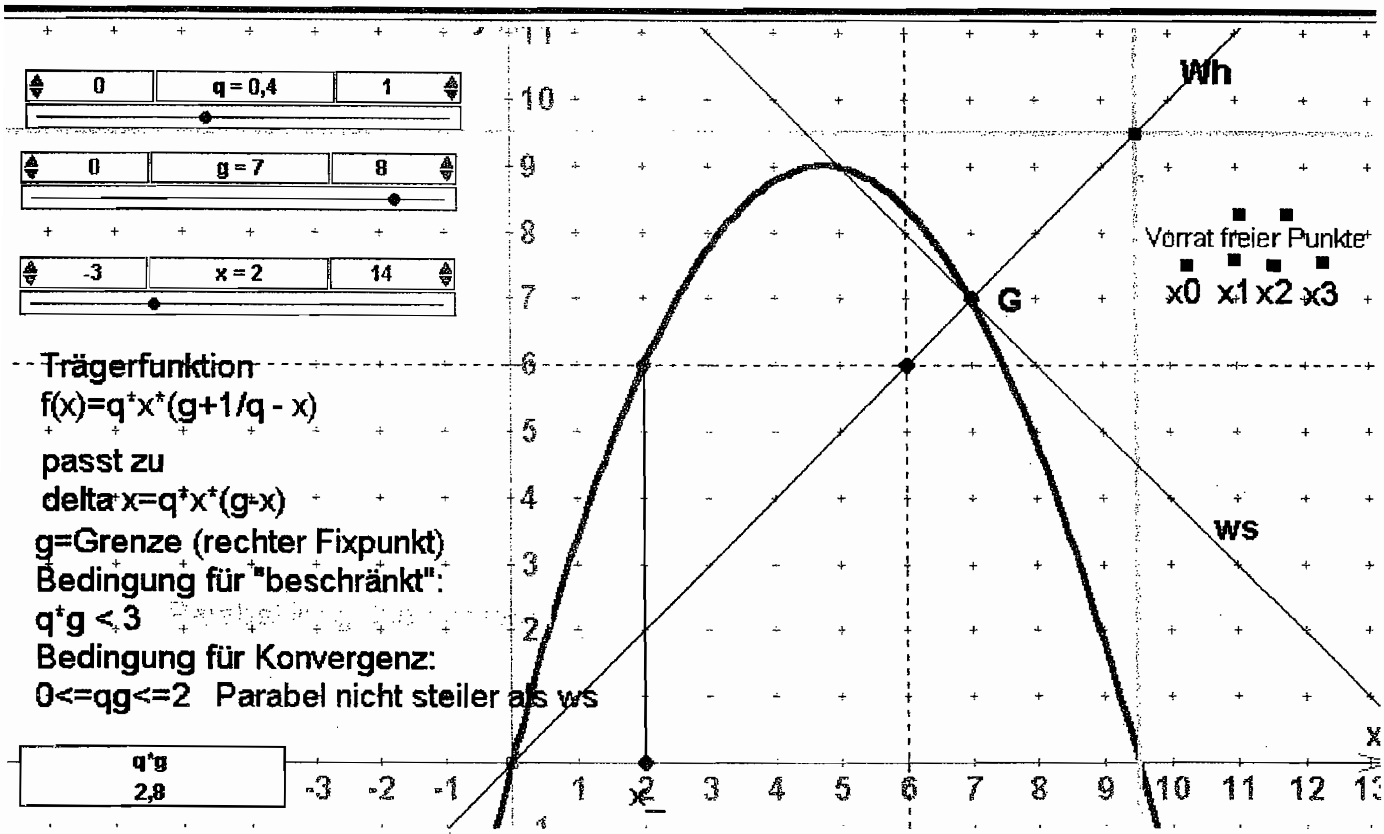
Jan 04

am	1
om	1
phi	1,58

$$y = am \ \sin(\omega(t-\varphi))$$

t	am*sin(om(t-phi))
-3	0,99
-2,8	0,95
-2,6	0,86
-2,4	0,74
-2,2	0,60
-2	0,42
-1,8	0,24
-1,6	0,04
-1,4	-0,16
-1,2	-0,35
-1	-0,53
-0,8	-0,69
-0,6	-0,82
-0,4	-0,92
-0,2	-0,98
0	-1,00
0,2	-0,98
0,4	-0,92
0,6	-0,83
0,8	-0,70
1	-0,55
1,2	-0,37
1,4	-0,18
1,6	0,02
1,8	0,22
2	0,41
2,2	0,58
2,4	0,73
2,6	0,85
2,8	0,94
3	0,99





Nutzen dieser Euklid-Dynageo-Datei:

A. Erklärung der Treppchendarstellung (Spinnweb~).
B. Erkundung der Wirkung von q bei festem g.
C. Erkundung der Wirkung von g bei festem q.
D. Bestätigung der links unten genannten Bedingungen für qg.
E. Überlegungen warum die Konvergenzbedingung so sein muss.
F. In Analysis kann diese Bedingung errechnet werden.
G. Überlegungen warum die Beschränktheitsbedingung so sein muss.
H. Diese Bedingung kann auch in der Sek I errechnet werden. (Ebenso die folgenden B.)
I. Erkundung einer Bedingung für monotones Wachstum der Folge.
J. Erkundung, wann die Folge gegen 0 strebt.

Hinweise:

zu A) Wähle am x-Regler einen Startwert, hier 2, setze den freien Punkt x0 auf x_.(* Verfolge die Striche zur Funktion, zur y-Achse, die graphische Spiegelung an der Wh, setze dort x1 hin. Setze mit dem Regler x- auf x1.*) Wiederhole(*....*) mit x2,x3 ...
zu E) Die Steigung im Fixpunkt muss betragsmäßig kleiner 1 sein (siehe Vorübungen mit Geraden).
zu F) Die Ableitung der Trägerfunktion ist an der Stelle g auf -1 zu setzen. Daraus ist qg zu bestimmen.
zu G) Der Bereich (grün) ist durch die Nullstelle bestimmt. Wenn der Scheitel der Parabel oben hinauswandert, kommen Folgenglieder zustande, die auf der x-Achse rechts von der Nullstelle liegen. Dann wird der nächtse Wert negativ und die Folge strebt gegen -unendlich
zu H) Die Nullstelle ist bei g+1/q und die Scheitelstelle auf der Hälfte. Der Scheitelwert muss kleiner als g+1/q sein.
zu I) Die Folge wächst ausschließlich, wenn die Steigung in G nicht negativ ist.
zu J) Die Folge stebt gegen 0, wenn g<=0 ist.

Wachstum in Excel

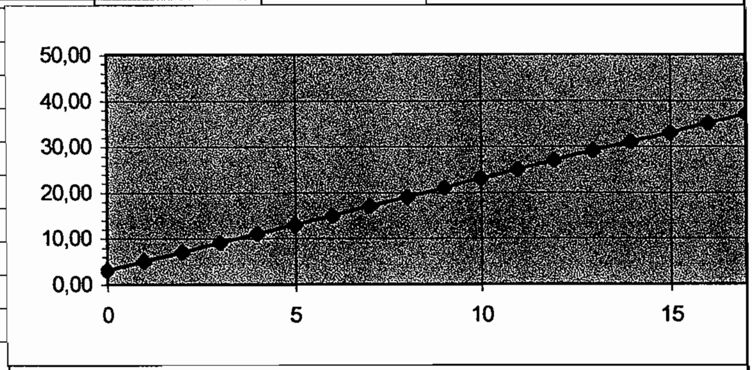
Lineares Wachtum

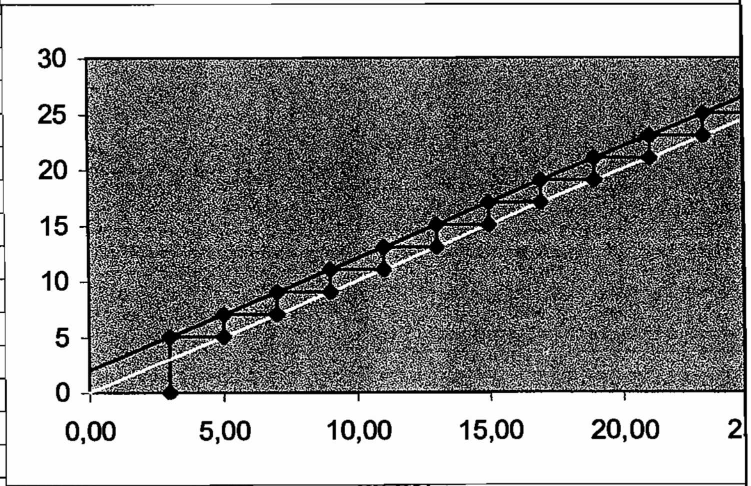
Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jul 04

$x_{neu} = x_{alt} + d$

d	2		d	2
start	3,01		start	3





	3,01			
0	3,01			
1	5,01			
2	7,01			
3	9,01			
4	11,01			
5	13,01			
6	15,01			
7	17,01			
8	19,01			
9	21,01			
10	23,01			
11	25,01			
12	27,01			
13	29,01			
14	31,01			
15	33,01			
16	35,01			
17	37,01			
18	39,01			
19	41,01			
20	43,01			
21	45,01			
22	47,01			
23	49,01			
24	51,01	12,00	27,01	29,01
25	53,01	12,50	29,01	29,01
		13,00	29,01	31,01
Andere Typen auf den anderen		13,50	31,01	31,01
Tabellenblättern		14,00	31,01	33,01
		14,50	33,01	33,01
Steht alles im Internet		15,00	33,01	35,01
		15,50	35,01	35,01
		16,00	35,01	37,01
		16,50	37,01	37,01
		17,00	37,01	39,01
		17,50	39,01	39,01
		18,00	39,01	41,01
		18,50	41,01	41,01
		19,00	41,01	43,01
		19,50	43,01	43,01
		20,00	43,01	45,01
		20,50	45,01	45,01
		21,00	45,01	47,01

Wachstum in Excel

Exponentielles Wachtum

Blaue Zellen enthalten die Formel direkt

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jul 04

$$x_{neu} = x_{alt} + q * x_{alt}$$

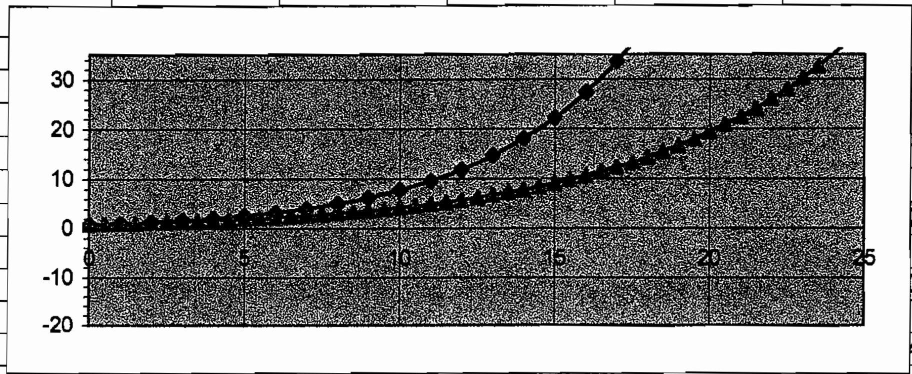
Probiere mindestens die Werte für q aus, passe die Bas

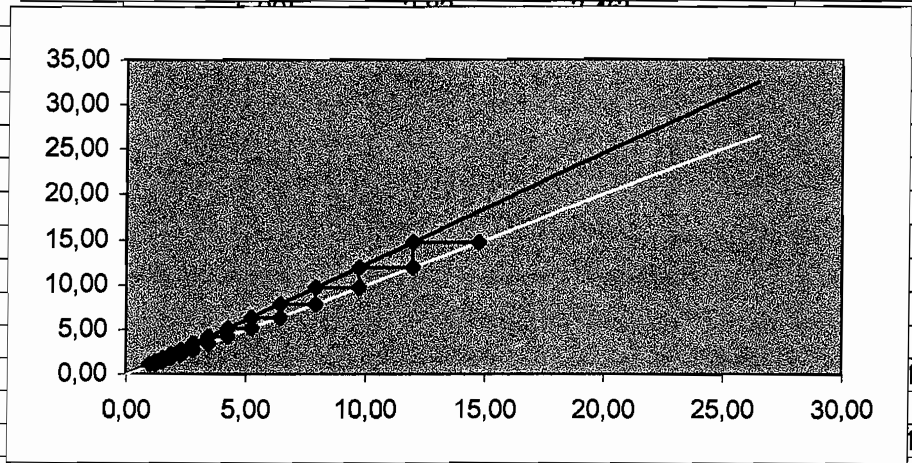
			Starte bei 1	Starte bei 20
q	0,23	q	0,24	-0,1
basis	1,16	Basis	1,23	0,89

$$y = c \cdot a^{k \cdot x}$$

Teste: basis=1+q

start	1
0	1,00
1	1,23
2	1,51
3	1,86
4	2,29
5	2,82
6	3,46
7	4,26
8	5,24
9	6,44
10	7,93
11	9,75
12	11,99
13	14,75
14	18,14
15	22,31
16	27,45
17	33,76
18	41,52
19	51,07
20	62,82
21	77,27
22	95,04
23	116,90
24	143,79
25	176,86

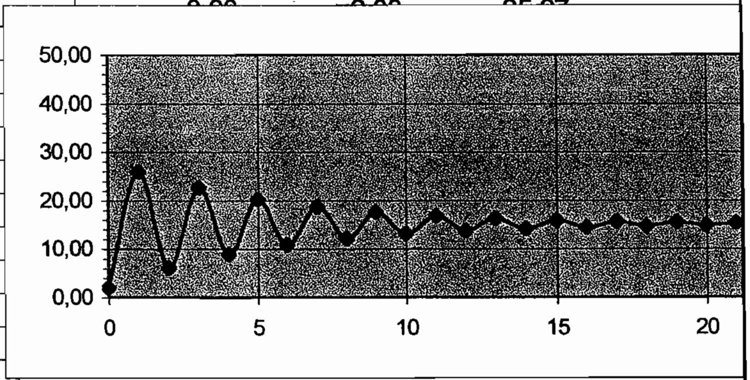


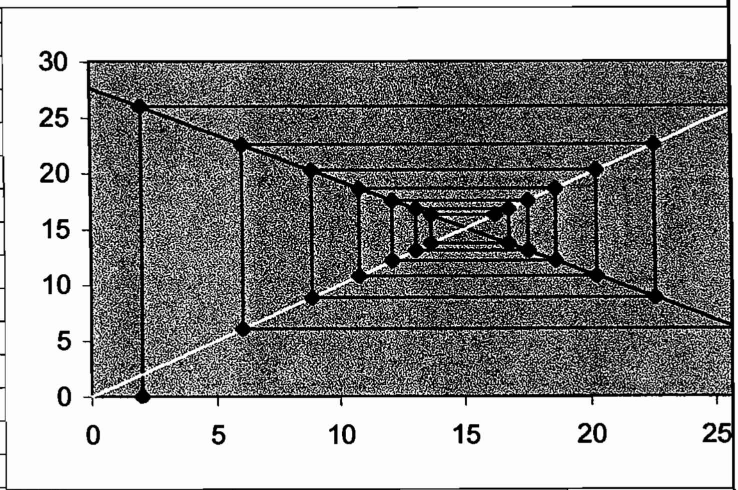


12,00	11,99	14,75
12,50	14,75	14,75

	Trägerfkt	Exponential
0	0	1,00
0,5	0,615	1,08
1	1,23	1,16
1,5	1,845	1,25
2	2,46	1,35
2,5	3,075	1,45
3	3,69	1,56
3,5	4,305	1,68
4	4,92	1,81
4,5	5,535	1,95
5	6,15	2,10
5,5	6,765	2,26
6	7,38	2,44
6,5	7,995	2,62
7	8,61	2,83
7,5	9,225	3,04
8	9,84	3,28
8,5	10,455	3,53
9	11,07	3,80
9,5	11,685	4,10
10	12,3	4,41
10,5	12,915	4,75
11	13,53	5,12
11,5	14,145	5,51
12	14,76	5,94
12,5	15,375	6,39

Wachstum in Excel			Begrenztes Wachtum			
Prof. Dr. Dörte Haftendorn			$x_{neu} = x_{alt} + q * (grenz - x_{alt})$			
Jul 04						Probiere mind
q	1,83				q	1,81
grenz	15,1				grenz	20
start	2			2	0	
0	2,00					
1	25,97					
2	6,08					
3	22,59					
4	8,88					
5	20,26					
6	10,82					
7	18,65					
8	12,15					
9	17,55					
10	13,07					
11	16,79					
12	13,70					
13	16,26					
14	14,14					
15	15,90					
16	14,44					
17	15,65					
18	14,64					
19	15,48					
20	14,78					
21	15,36					
22	14,88					
23	15,28					
24	14,95					
25	15,22					
			13,00	16,26	14,14	
			13,50	14,14	14,14	
			14,00	14,14	15,90	
			14,50	15,90	15,90	
			15,00	15,90	14,44	
			15,50	14,44	14,44	
			16,00	14,44	15,65	
			16,50	15,65	15,65	
			17,00	15,65	14,64	
			17,50	14,64	14,64	
			18,00	14,64	15,48	
			18,50	15,48	15,48	
			19,00	15,48	14,78	
			19,50	14,78	14,78	
			20,00	14,78	15,36	
			20,50	15,36	15,36	
			21,00	15,36	14,88	





Wachstum in Excel

Logistisches Wachtum

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jul 04

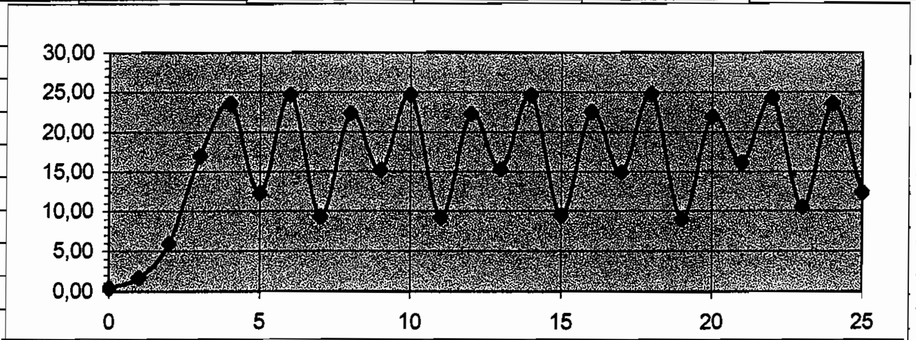
$$x_{neu} = x_{alt} + q * x_{alt} * (grenz - x_{alt})$$

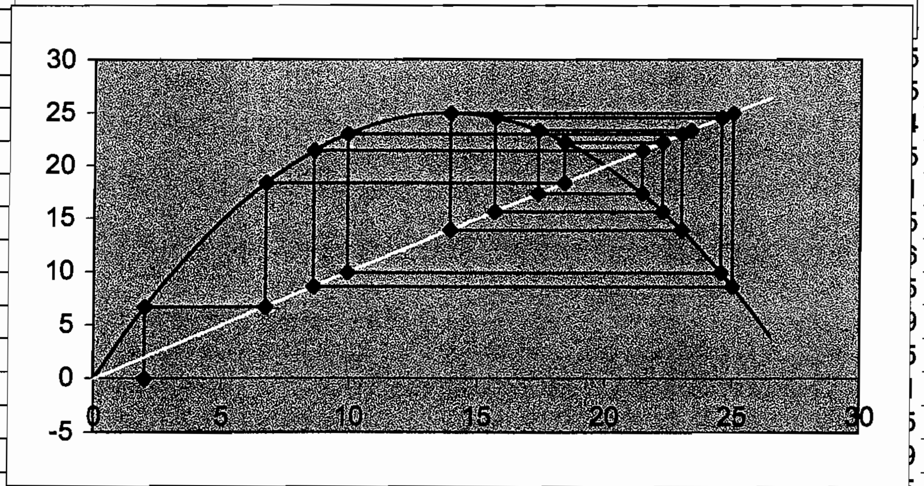
Blaue Zellen enthalten die Formel direkt

Probiere mindestens die Werte für q und grenz aus.

q	0,131		q	0,21	0,81	1,09	1,39	1,51
grenz	20		grenz	20	20	20	20	20

start	0,5	2,62							Bewege dann grenz nach u
0	0,50	q*grenz							besonders beachten
1	1,78								grenz 15,5 bis 16,6
2	6,02								
3	17,04								
4	23,64								
5	12,36								q*grenz
6	24,73								bestimmt das Verhalten
7	9,41								Für welche Werte
8	22,46								liegt Konvergenz vor?
9	15,22								Für welche Werte
10	24,75								liget Beschränktheit vor?
11	9,35								
12	22,39								
13	15,38								
14	24,69								
15	9,52								
16	22,59								
17	14,92								
18	24,85								
19	9,07								
20	22,05								
21	16,12								
22	24,31								
23	10,58		11,50	17,37	17,37		11,5	24,30525	
24	23,63		12,00	17,37	23,35		12	24,576	
25	12,39		12,50	23,35	23,35		12,5	24,78125	
			13,00	23,35	13,10		13	24,921	





A. Müller, Institut für Physik, Universität Koblenz-Landau, 76829 Landau; muellera@uni-landau.de

Größenwahn!

Schätzen, Zweifeln, Schließen, Lernen:

Ein Spiel mit naturwissenschaftlichen Größenordnungen

1 Motivation, Ziel und Zielgruppe des Projektes

Angaben über Größen und Größenordnungen gehören zu den grundlegenden Aussagen der Naturwissenschaften. Man betrachte z.B. Längen: Wie groß ist ein Atomkern? Ein Molekül? Eine Zelle? Die höchsten Bäume? Die höchsten Berge? Die Sonne? Mit einem halben Dutzend Fragen macht man eine Reise durch die Physik, Chemie, Biologie, Geographie, Astronomie, und ebenso wie eine Reise durch Längen kann man eine durch Zeitdauern, Geschwindigkeiten, Energien u.a. Größen machen. Und mit jeder dieser großen Reisen entsteht gleich eine gedankliche Verbindung zwischen all ihren Stationen: Größenangaben, die miteinander in Beziehung gesetzt und verglichen werden können.

Es sind solche Beziehungen, die das Thema so wichtig machen, weit über bloße Zahlenkenntnis hinaus, denn Denken in Größen und Größenordnungen ist eine der wichtigsten Komponenten naturwissenschaftlichen Arbeitens. Um nur zwei Beispiele zu nennen: Die Biologin† etwa muss wissen, welche Zellstrukturen im Lichtmikroskop noch sichtbar werden können; dahinter steht der Vergleich von deren Abmessungen mit der Lichtwellenlänge. Und die Geographin muss eine Angabe über eine jährliche Kontinentaldrift von mehreren Metern als Druckfehler erkennen; sonst müssten sich z.B. die Ränder des St. Andreas-Graben seit dem letzten großen Beben in San Francisco von 1906 um Hunderte von Metern verschoben haben, und das ist offensichtlich falsch (richtig sind einige cm als jährliche Kontinentaldrift) – ein Beispiel für kritisches Denken und wissenschaftliches Anzweifeln.

So wichtig ist dieses Denken, dass es dazu in der Physik einen eigenen Begriff gibt: *Fermi-Fragen* bzw. *Fermi-Lösungen* stehen für den Ansatz, sich bei physikalischen und anderen Problemen als ersten Schritt auf die Größenordnung zu konzentrieren. Sie haben ihren Namen von dem italienischen Nobelpreisträger Enrico Fermi, der es in dieser Kunst zu einer geradezu legendären Meisterschaft gebracht hatte.

Fermi-Fragen sind aber auch Kinderfragen – manchmal zumindest. Auch bei Nichtnaturwissenschaftlerinnen und besonders bei Kindern lässt sich mit interessant gemachten Fragen dieser Art oft sehr gut die Neugierde wecken, z.B. durch die Frage: Welche Energie hat ein Blitz? (Antwort: 300 Kilowattstunden; Lexikon der Physik, `Stichwort `Blitz'; hier wie bei vielen anderen Beispielen versteht es sich, dass es um Mittelwerte geht). Dabei kommt es darauf an, die Angabe in anschauliche und alltagsbezogene Vergleiche und Beziehungen einzukleiden, z.B. mit der zweiten Frage: Wie hoch ist der tägliche Pro-Kopf-Verbrauch an Energie in Deutschland (Antwort: ca. 140 Kilowattstunden; Kuhn, 1996). D.h. ein Blitz könnte den gesamten Energiebedarf eines Menschen für zwei Tage, d.h. etwa 170 000 Sekunden decken. Nur dass die Energie eben „wie der Blitz" frei wird, d.h. in wenigen Millisekunden, mit den bekannten Folgen ...

2 Umsetzung

Größenordnungen sind also nicht nur etwas für Nobelpreisträger, sondern für jeden wachen Geist, den von Kindern ebenso wie den von Erwachsenen. Dieses Motivationspotential kann noch durch eine weiteren, wohlbekannten Faktor zur Förderung von Interesse, Wissbegier und Lernfreude verstärkt werden: Bekanntlich lernt der Mensch besonders gerne spielerisch. In dem Projekt „**Größenwahn!**" geht es darum, die Beziehungen zwischen Größenangaben, z.B. zwischen Längen, auf ein Spiel abzubilden, wo der Spielgewinn entscheidend von plausiblem Schätzen und Schließen abhängt – ein Teil von Fermis Nobelpreisträger-würdigen Wissenschaftlerqualitäten in freundlichem Normalmaß und in spielerischer Form.

Die Spielidee besteht darin, Spielkarten mit verschiedenen Gegenständen oder Vorgängen (s. Abbildungen für Beispiele) den zugehörigen Längen (oder Energien) nach in die richtige Reihenfolge zu bringen. Eine Spielrunde ist vorbei, wenn ein Mitspieler die Richtigkeit der vorliegenden Reihe anzweifelt und die Antworten auf den Kartenrückseiten nachgeschaut werden, und dann gibt es Strafkarten: falls wirklich ein Fehler vorliegt, für dessen Übersehen, falls keiner vorliegt, für das unberechtigte Anzweifeln. Spielziel ist natürlich, seine Karten möglichst schnell los zu werden. Der Spielerfolg beruht wie bei zwei z.T. ähnlichen Spielen („Trivial Pursuit" und „Anno Domini") ebenso sehr auf einer geschickten Taktik aus Schätzen, Zweifeln, Schließen wie auf Faktenwissen.

Ziel des Projektes ist es also, die innerwissenschaftliche Bedeutung und das Motivationspotential von Größenordnungen mit der öffentlichkeitswirksamen Form eines Spiels zu kombinieren. Darüber hinaus wird – um über die „Edutainment"-Komponente des Projektes hinaus Eigenaktivität zu und Dialog über dessen Inhalte zu ermöglichen – eine virtuelle Spielkartenbörse im Internet eingerichtet, die erlaubt, neue Karten für das Spiel sowohl einzuspeisen wie abzurufen, sowie ein virtuelles Forum, in dem Ideen und Fragen zu den Karten diskutiert werden können.

http://www.uni-landau.de/~physik/pushi.htm 05.02.2004

Infoblatt „Fermi Fragen"

Unter *Fermi*-Fragen wird ein Typ von Aufgaben verstanden, dessen Ursprünge auf den Physiker Enrico FERMI zurückgehen. In der Physik gehört es zu den maßgeblichen Tugenden, auch solche Größen schnell abschätzen zu können, zu denen man weder vollständige Informationen noch eine eindeutige Berechnungsformel hat. Fragen, die diese Fähigkeiten – auch in einfachen Alltagskontexten – fordern und fördern, werden als Fermi-Fragen gehandelt und erfreuen sich besonders in den USA einer immer größeren Beliebtheit. Es ist bereits eine regelrechte „community" entstanden, die sich damit auseinandersetzt, Fermi-Fragen für die Schule zu formulieren und nutzbar zu machen.

Welche Kompetenzen erfordern (und fördern) Fermi-Fragen?

- heuristische Strategien: Fragen stellen
- Alltagswissen benutzen
- mit großen Zahlen arbeiten
- Umrechnen von Größen
- Überschlagsrechnen, geschicktes Rechnen
- Unklarheit verkraften, also auch bei vagen Angaben weiterarbeiten
- Ergebnisse überprüfen und bewerten
- Kontroll- und Bewertungsstrategien

Weitere Beispiele von sehr unterschiedlichem Charakter sollen das Potential von Fermi-Fragen illustrieren, und ebenso aufzeigen, dass man den Umgang mit derartigen Fragestellung anhand von sukzessive anspruchsvolleren Beispielen erlernen kann.

Wie viele Tropfen Wasser füllen ein Trinkglas?
Wie groß ist die Masse aller Schüler unserer Schule?
Wieviel Bäume stehen in unserem Ort?
Wie hoch ist der Turm aus Papier, den unsere Schule jedes Jahr für Kopien verbraucht?
Wieviel Stunden am Tag verbringt ein Schüler durchschnittlich am Telefon / Fernseher?
Wie oft kommt das Wort „und" in der geschriebenen / gesprochenen Sprache vor?

Man erkennt, dass ein weiteres Einsatzgebiet für Fermi-Fragen darin bestehen kann, einen Überblick über Größenordnungen von schwer vorstellbaren Mengen oder Größen zu bekommen.

Weitere Anregungen zur Verwendung von Fermiaufgaben im Unterricht sind:

Schülerinnen und Schüler denken sich Fermi-Fragen und sammeln sie, z.B. auf einem schwarzen Brett. Eine Gruppe von Schülern sucht sich interessante heraus und bearbeitet sie.

Eine mathematische Variante des populären Ratespiels „*Wieviel Erbsen sind in diesem Behälter?*" wird als Wettbewerb ausgeschrieben. Schülerinnen und Schüler dürfen vor der Abgabe ihrer Schätzung Maße nehmen und mit Erbsen experimentieren. Nach der Auflösung werden die verwendeten Rechenstrategien diskutiert.

Fermi-Fragen sind, wie man gesehen hat, keineswegs auf den wissenschaftlich-akademischen Bereich beschränkt. Sie lassen sich in der Schule vor allem mit den folgenden Lernzielen von übergreifender Bedeutung einsetzen.

- Vernetzung von Alltagswissens mit dem Mathematikunterricht fördern.
- Selbstständige Arbeitsstrategien einüben.
- Vorstellungen von Größenordnungen entwickeln.

Fermi-Fragen

Die Bezeichnung ***Fermi-Fragen*** geht auf den Physiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi zurück. Sie bezeichnet Fragen bzw. Aufgaben, deren Lösung aus einer sehr großen Zahl besteht. Die Größe dieser Zahl kann nur durch Abschätzungen ermittelt werden. Besonders reizvoll ist es, wenn zwei verschiedene Personen oder Personengruppen sich Lösungen überlegen und dann vergleichen.

Beispiele für *Fermi-Fragen*

1. Wie viele Bäume gibt es in Deutschland?
2. Wie viele Haare hat ein erwachsener Mensch (Mann bzw. Frau) am Kopf?
3. Wie viele Buchstaben "e" stehen in dem Buch *Harry Potter und der Stein der Weisen?*
4. Wie viele Reiskörner können von einem Güterzug mit 30 Waggons transportiert werden?
5. Wie viel Eis bedeckt die Insel Grönland? Welches Gesamtgewicht hat es?
6. Wie viele Gummibärchen passen in einen Schulbus?
7. Wie viele 100 W Glühbirnen würden dieselbe Energie wie die Sonne liefern?
8. Wie viele Gebäude gibt es in den USA?
9. Wie viele Schneeflocken benötigt man, um einen 120 cm großen Schneemann zu bauen?
10. Wie viele DIN A 4 Blätter würde man benötigen, um die Bodenflächen im Empire State Building vollständig mit Papier zu bedecken?

http://m.holzapfel.bei.t-online.de/verschiedenes/fermifragen.html 05.02.2004

Infoblatt „geschlossene Aufgaben“

Das Gros aller Mathematikaufgaben, die man in den Schulbüchern und Klassenarbeiten findet, sind keine offenen Aufgaben. Sie sind ganz im Gegenteil kunstvoll maßgeschneidert auf einen bestimmten Zweck, den sie im methodischen Fortgang des Lehrbuches oder bei der Leistungsbewertung zu erfüllen haben. Die folgende Übersicht gibt einige Charaktesristika solcher Aufgaben vom „geschlossen“ Typ an.

Charakteristika geschlossener Aufgaben:

Eindeutige Zweckorientierung
Übungsaufgaben sollen eine bestimmte Fähigkeit einschleifen (z.B. die sichere Anwendung der binomischen Formeln).
Einstiegsaufgaben sollen auf eine Problemsituation führen, welche die Einführung einer neuen Methode oder eines neuen Begriffs nahelegen.
Prüfungsaufgaben haben das Ziel, möglichst deutlich Schwierigkeiten und Stärken eines Schülers oder einer Schülerin offenzulegen und sind oft zum Zwecke der besseren Überprüfbarkeit – und auch der gerechten Bewertung – standardisiert.

Eingleisigkeit des Rechenweges
Die Art der Aufgabenstellung oder der fachliche bzw. methodische Unterrichtsgang lassen im Wesentlichen nur einen Weg zur Lösung zu. Abwege, Umwege, Näherungslösungen werden (explizit oder implizit) nicht akzeptiert.

Existenz einer eindeutigen Lösung
Der Zielzustand ist eindeutig definiert, Schülerinnen und Schüler wissen aufgrund der Aufgabenstellung oder vorher getroffener (expliziter oder impliziter) Vereinbarungen genau, wann und ob sie das Problem gelöst haben. Es ist bereits im Voraus klar, dass das Problem mit den (meist unmittelbar vorher behandelten Mitteln) zu lösen ist.

Engführung in der Aufgabenstellung
Durch eine kleinschrittige Gliederung der Aufgabenstellung oder Einschränkung der zu verwendenden Methoden („Berechne ohne Benutzung der Potenzgesetze....“) gibt es keine Möglichkeiten (oder Anlässe), eigene Lösungswege zu zuchen.

Die Anlage von Aufgaben in geschlossener Form bedeutet prinzipiell keine Abwertung solcher Aufgabenstellungen. Immerhin gewährleisten sie das effektive Erreichen eines bestimmten Ziels, beispielsweise einer klar definierten Leistungskontrolle, einer schnellen Hinführung zu einem zentralen Problem, einem intensiven Üben von grundlegenden Fertigkeiten usw. Zudem sind gerade die klare Definition von *richtig* und *falsch*, die gerechte Bewertbarkeit und ein überschaubarer, klarer Rechenweg Eigenschaften, die Schüler an einer Aufgabe schätzen, ja geradezu einfordern.

Bedenklich wird der Einsatz geschlossener Aufgaben erst, wenn er zum Ausschließlichkeitsprinzip wird und die Unterrichtsmethode dominiert. Dann entstehen problematische Bilder vom Mathematikunterricht, wie die folgenden:

Der Mathematikunterricht erscheint als eine Enklave **klar definierter Wahrheiten.** Wenn Schüler spüren, dass individuelle Vorstöße und kreative Ansätze ausgegrenzt werden, verlieren sie die Freude oder gar den Mut, solche vorzubringen – schließlich existiert ja bereits eine abschließende, vorherbestimmte Wahrheit, die am Schluss der Diskussion ohnehin vom Lehrer oder einem Mitschüler geliefert wird.

Hierunter leidet vor allem die **Kommunikation** in der Gruppe. Beiträge von Mitschülern werden dahingehend bewertet, ob sie „zielführend" sind, d.h. inwieweit der Lehrer signalisiert, dass eine Idee wertvoll ist. Eine wirkliche Diskussion, bei der die Schüler z.B. auch darauf achten müssen, dass ihre Mitschüler ihre Argumentation nachvollziehen können, findet nur schwerlich statt.

Es entsteht ein falsches **Bild vom Umgang mit Fehlern**, das nicht im Sinne einer unterrichtlichen Produktivität vermieden werden muss, sondern auch im Hinblick auf die Arbeit der Mathematik als Wissenschaft zutiefst unrealistisch ist. Das Prinzip von Versuch und Irrtum, die Produktivität von Fehlern, das Einschlagen von Seitenwegen, subjektive Wertungen, das Akzeptieren vorläufiger oder näherungsweiser Lösungen sind alles nicht nur wichtige, sondern auch typische Bestandteile aller mathematisch orientierten Wissenschaften, insbesondere auch der Mathematik.

Das Lernen im Mathematikunterricht läuft Gefahr, zum Streben nach der erfolgreichen **Nachahmung von Schemata** zu verarmen. Schülerinnen und Schüler bemühen sich dann darum, die im Unterricht behandelten Methoden möglichst exakt zu kopieren. Gelingt ihnen dies einmal nicht, so führt dies zu ungerichtetem Probieren, zur falschen Generalisierung oder zum Aufgeben. Übergeordnete Strategien (*Metastrategien*) können nicht herangezogen werden, da sie im Rahmen von geschlossenen Aufgaben auch nicht erarbeitet und eingeübt werden können.

Mathematikunterricht wird also erst dadurch reichhaltig, dass im größeren Umfang auch offene Aufgaben einbezogen werden. Im Folgenden sollen nicht nur Kriterien für diese Dimension einer Aufgabe formuliert, sondern zugleich auch Ansätze vorgeführt werden, wie eine geschlossene Aufgabe **in eine offenere Form transformiert** werden kann.

Infoblatt „Eigenschaften offener Aufgaben“

Einige Charakteristika offener Aufgaben
1. **Es gibt mehre Lösungswege. Welcher Weg einzuschlagen ist, liegt nicht sofort auf der Hand.** 2. **Die Problemsituation muss erst mathematisiert werden.** 3. **Es werden „weiche mathematische Tätigkeiten“ verlangt.** 4. **Eine unscharf definierte Problemstellung führt zu divergenten, konkurrierenden Ansätzen.** 5. **Zur Lösung der Aufgabe bedarf es der Integration von mathematischen Kenntnissen aus verschiedenen Bereichen, eventuell besteht die Notwendigkeit einer Erweiterung der Wissensbasis.**

Offene Aufgaben fördern und fordern wesentliche Momente einer Unterrichtskultur:
Schülerinnen und Schüler haben eine angemessene **Frustrationstoleranz** gegenüber Problemen, auf die nicht auf Anhieb eine gut eingeübte Lösungsmethode passt. Sie üben einen toleranten und **reflektiertenden Umgang mit Fehlern.** Es gibt **curriculare Freiräume**: Erst eine Loslösung von der engen Zweckbindung von Aufgaben ermöglicht ein wirklich divergentes Arbeiten. Schüler merken sonst sehr schnell, wenn ihre Ideen allein nach dem Kriterium der Nützlichkeit für das „geplante Stundenthema“ bewertet werden. Es gibt **zeitliche Freiräume**: Nur eine Loslösung vom engen Zeitschema der Stunde erlaubt es, gegebenenfalls auf Schülerlösungen länger einzugehen, Schülerideen zur Weiterentwicklung an die Gruppe zurückzugeben, gleichberechtigt alternative Lösungen zu präsentieren usw. Das funktioniert nur bedingt, wenn in der selben Stunde Hausaufgaben besprochen, ein Ergebnis an der Tafel und im Heft festgehalten und Übungsaufgaben durchgearbeitet werden müssen. Die Schüler besitzen eine **Referenzfähigkeit**, also Fertigkeiten, die es ihnen erlauben, mit vernetztem Wissen zu arbeiten. Hierzu gehört die Aktivierung von Vorwissen, z.B. durch Nachschlagen in alten Aufzeichnungen (Schulhefte, Regelhefte) oder das Verwenden von anderen Wissensbasen (Schulbücher, Internet etc.). Die **Kommunikation** in der Gruppe ist reziprok und effektiv: Zu einer solchen Gesprächskultur gehört beispielsweise, dass Schüler in der Lage sind, ihre eigenen Ideen vorzutragen, Rückmeldung entgegenzunehmen und sicherzustellen, dass sie von Mitschülern verstanden werden.

Infoblatt „Aufgaben öffnen"

Um offene Aufgaben zu finden muss man nicht unbedingt auf die Suche nach innovativen, ungewöhnlichen Aufgaben gehen. Im Prinzip kann man bereits von einfachen Schulbuchaufgaben ausgehen, aus denen man durch eine Reihe einfacher Veränderungen offene Problemstellugen gewinnen kann. Oft bieten Schulbücher „fertige Probleme", d.h. Aufgabestellungen, bei denen der gesamte Arbeitsprozess bereits vorgezeichnet ist, z.B. in Form einer Skizze, einer Erklärung und eines Arbeitsauftrages. Hier kann man vor allem durch Weglassen, aber auch durch Umformulieren und Variieren die Qualität der Aufgabe maßgeblich verändern.

Wie öffnet man eine Aufgabe?
Zulassen von verschiedenen Lösungswegen Aufgaben auch außerhalb des aktuellen Kontextes stellen, so dass nicht von vornherein klar ist, dass soeben eingeübte Techniken angewendet werden müssen (und damit vernetztes Lernen fördern) Alternative Lösungswege auch im Unterricht thematisieren und würdigen (z.B. in der Sammlungsphase von Gruppenarbeit) **Weglassen von Eingangsinformationen** Schüler erst aushandeln lassen, welche Informationen notwendig und sinnvoll sind Benötigte Daten nicht angeben, sondern aus Alltagserfahrung schätzen lassen Den Effekt des Weglassens kann man auch durch das Gegenteil erreichen: Ein Übermaß von Information anbieten, aus dem erst sinnvoll ausgewählt werden muss. (Diese Situation ist in der Realität z.T. der Normalfall) **Weglassen von Informationen über das Arbeitsziel** Weglassen oder Ausdünnen des Arbeitsauftrages Divergente Arbeitsaufträge stellen („*Probiert alles aus, was euch einfällt.*")