

Fraktale Box-Dimension D Grundlage des Messverfahrens

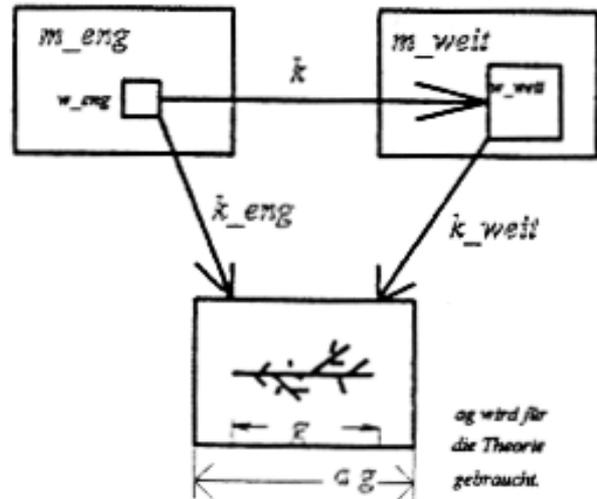
Gemessen wird bei einer bestimmten Gitterweite

w die Zahl m der Kästchen, die vom Fraktal getroffen werden. Es gilt die Gesetzmäßigkeit

$$m_{eng} = m_{weit} \cdot k^D$$

Hat man mehr als zwei Messungen, so ist es sinnvoll, sie gemeinsam graphisch auszuwerten. Dazu braucht man eine Bezugsgröße g, interpretierbar als Pixelbreite des Fraktals.

Aus dem Bild rechts ist (mit Operatoren) direkt ablesbar:



$$k = k_{eng} \cdot \frac{1}{k_{weit}} = \frac{g}{w_{eng}} \cdot \frac{w_{weit}}{g} = \frac{w_{weit}}{w_{eng}}$$

$$m_{eng} = m_{weit} \cdot \left(\frac{k_{eng}}{k_{weit}} \right)^D$$

also $\frac{m_{eng}}{k_{eng}^D} = \frac{m_{weit}}{k_{weit}^D} = \frac{1}{1} = 1$ Die beiden Einsen in dem Bruch beziehen sich darauf, dass

man als weites Raster auch den unteren Kasten nehmen kann. Ein Kasten, der von dem Fraktal getroffen wird, Streckfaktor 1 auf sich selbst.

Damit ist die Kennzeichnung von eng und weit unnötig geworden. Der Streckfaktor von der

Rasterweite auf die ganze Weite g sei nun k_{ganz} . Dann gilt: $m = k^D = \left(\frac{g}{w} \right)^D$.

Dies ist in doppelt-logarithmischer Auftragung eine Ursprungsgerade. Die Gleichung ist aber streng genommen nur richtig für $m \div 4$ bei dem wahren Fraktal. Es zeigt sich auch, dass wirklich erzeugte Messpunkte zwar mit erfreulicher Genauigkeit in doppelt-logarithmischer Darstellung auf einer Geraden liegen, jedoch nicht auf einer Ursprungsgeraden. Dieses Verhalten kann man erklären und merkt dabei, dass die Steigung dieser Geraden aber weiterhin D ist.(s.u.)

Durchführung der Messung:

I Zähle auf dem Blatt mit dem gerasterten Fraktal sorgfältig, wie viele Kästchen von dem Fraktal "betreten" werden.

II Bestimme eine Bezugsgröße g. Eins der Raster mit Weite W sei K Kästchen breit. Dann ist $g=K \cdot W$.

III Lege eine Tabelle an:

1	2	3	4	5
Weite	g/Weite	Log(g/Weite)	m	Log m
36	630/36=17,5	1,243	96	1,9822

Weiterführen für alle Messungen an diesem Fraktal

IV Trage die Wertepaare aus den Spalten 3 und 5 in einem Koordinatensystem ein.

V Lege mit Augenmaß eine Ausgleichsgerade durch die Punkte. Bestimme ihre Steigung durch Einzeichnung eines Steigungsdreiecks.

VI Die Steigung ist der gesuchte Messwert für die Boxdimension des Fraktals.

VII Grenzen des Verfahrens: a) Die Gitterweite muss deutlich kleiner als das Fraktal, aber größer als die kleinste Schrittweite des Fraktals bei dieser Stufe sein.

b) Gezeichnet ist nie das wahre Fraktal, sondern eine Stufe. Diese muss schon wesentliche Merkmale des wahren Fraktals aufweisen.

c) Die zufällige Lage des Fraktals im Raster erzeugt Schwankungen der Messpunkte.