

Fraktale Geometrie -- Chaos und Ordnung



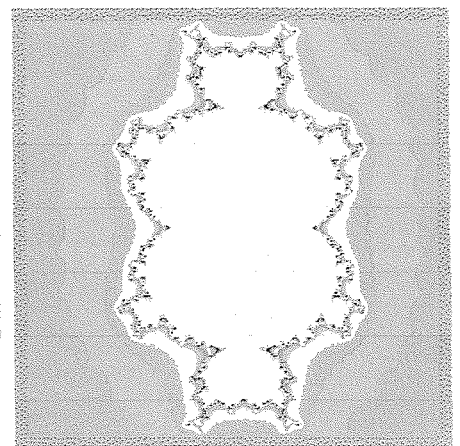
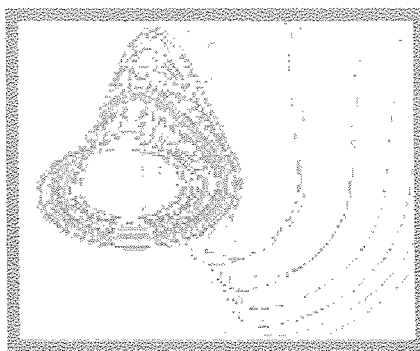
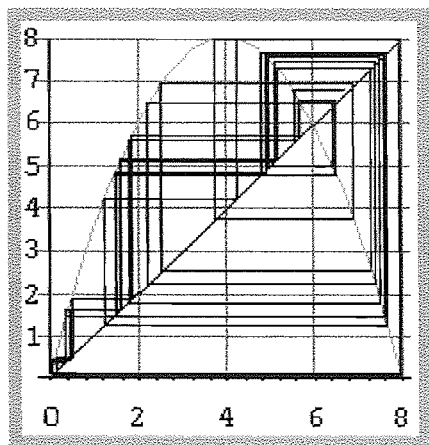
Prof. Dr. Dörte Haftendorn
Leuphana Universität
Lüneburg

Wintersemester 07/08

montags,

12:15 Uhr- 13:45
Uhr

Ort: Wilschenbrucher Weg
Raum 216



Lassen Sie sich in die vielfältige Welt der Fraktale einführen. Lernen Sie die Ordnung in den nur scheinbar chaotischen Vorgängen kennen.

Erfahren Sie, wie durchsichtig und einfach die mathematischen Grundlagen sind. Erkunden Sie die Möglichkeiten, selbst Fraktale zu erfinden.

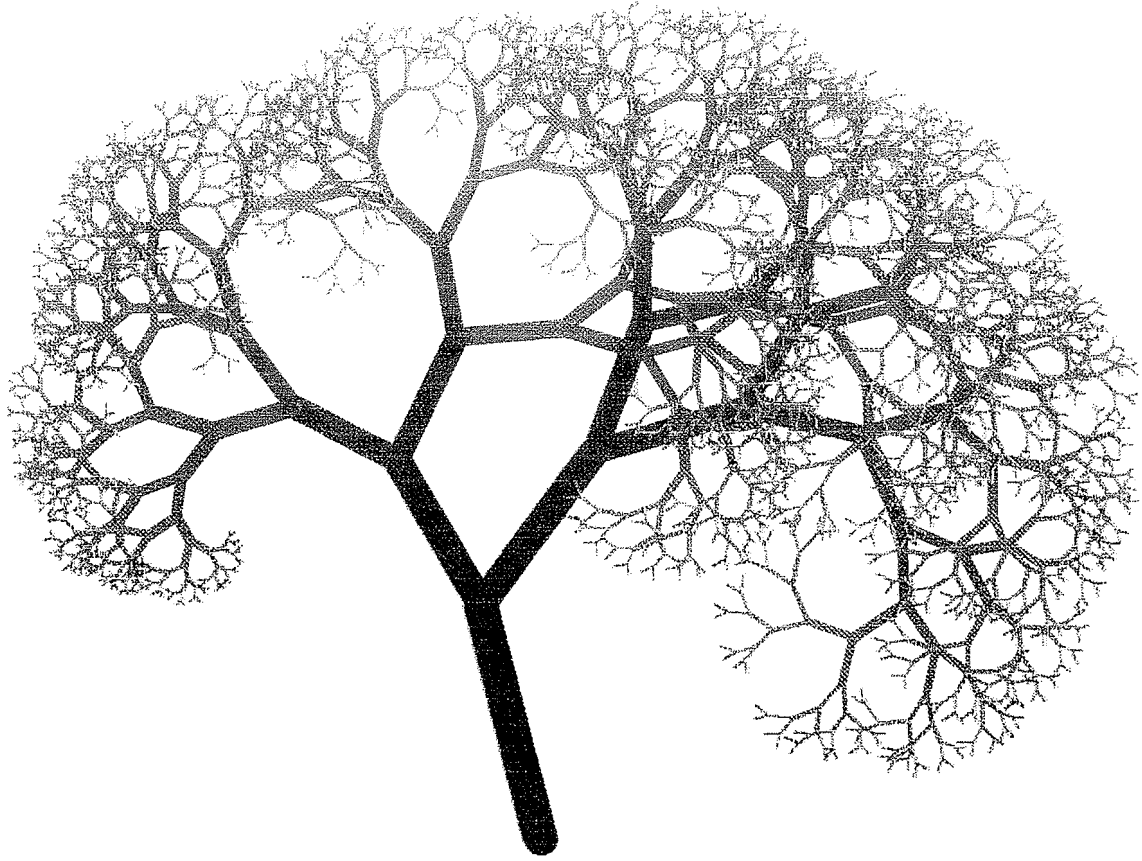
Mit dem mathematischen Schulwissen und dem Mut zu neuen Wegen ausgestattet, haben Sie gute Chancen, an dieser Vorlesung Freude zu haben. Diese Blätter sind eine -unvollkommene- Zusammenstellung aus den im Internet verfügbaren Seiten

<http://haftendorn.uni-lueneburg.de> oder www.mathematik-verstehen.de Bereich Fraktale Geometrie

Obige Abbildungen zeigen Beispiele für

- (1) Fraktale mit rekursiven Wegen, Lindenmeyersysteme
- (2) Fraktale mit iterierten Funktionen, IFS,
- (3) Chaotisches Verhalten an der logistischen Parabel,
- (4) Attraktoren in dynamischen Systemen, Rösslerhut
- (5) Verwandte des Apfelmännchens.

Weitere Themen der Vorlesung sind: Juliamengen, das Feigenbaumscenario, fraktale Dimension, zelluläre Automaten, Anwendungen in anderen Wissenschaften, Bedeutung und Möglichkeiten für Schule und Pädagogik.

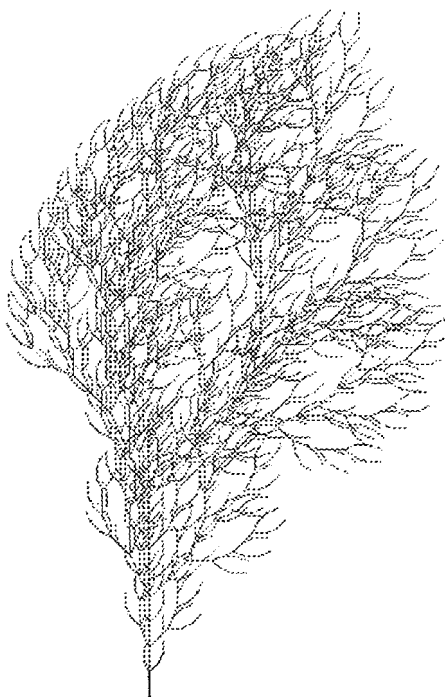
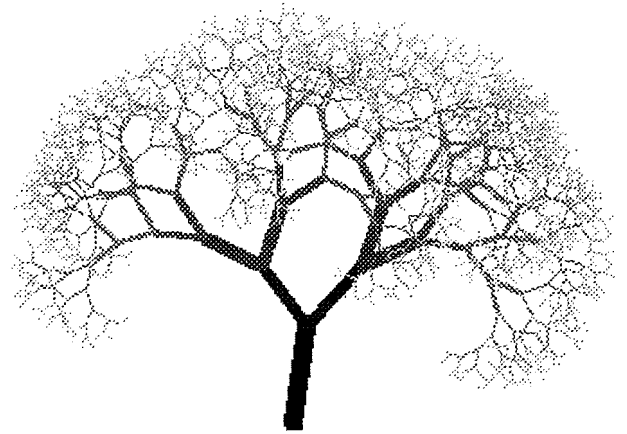
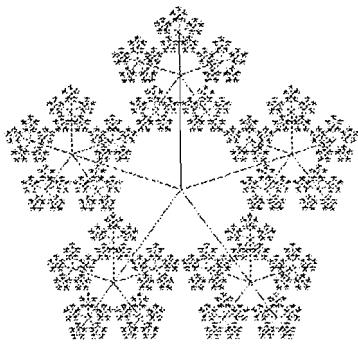
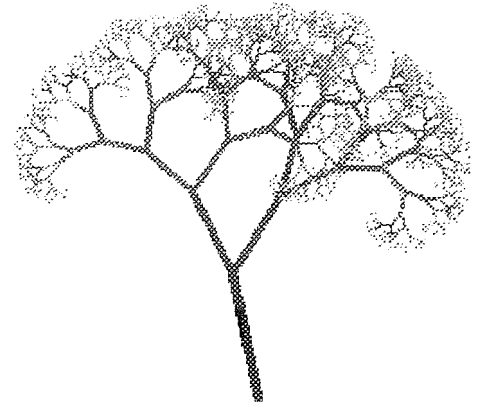
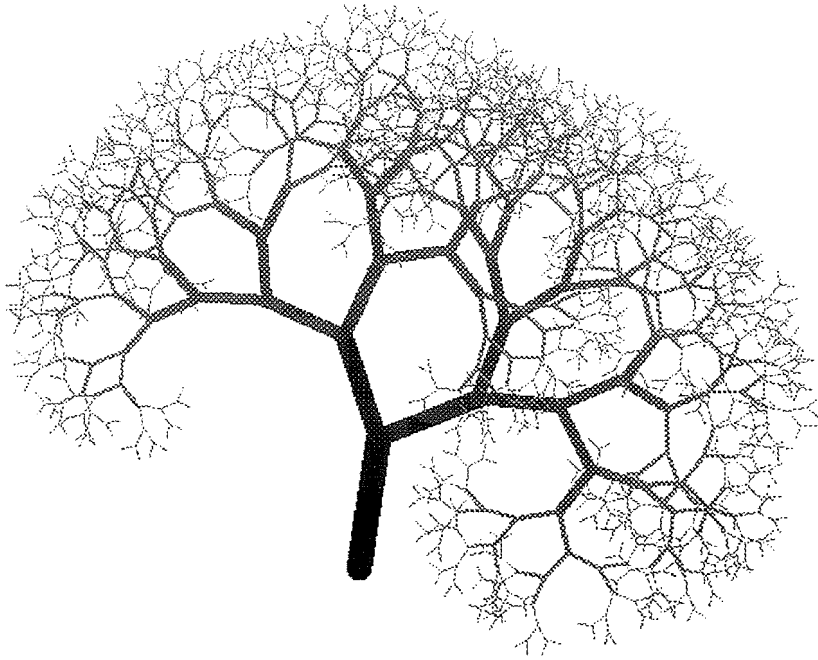


Die nämlichen Bäume

Auf der nämlichen Erde
stehen die nämlichen Bäume
beisammen

Und auch am heutigen Tag
schlagen die nämlichen Blätter
raschelnd zusammen.

Onoe Saishû



1.1.95

- | | | |
|-------|---|--|
| 1 | Wegfraktale | |
| 1.1 | rekursive Prozeduren (Prg. Zweig) | Reichhaltiges Programm, vieles zum Ansehen, Zufalls-Baum u.a. |
| 1.2 | Lindenmayersysteme (Prg Linde) | Eigene Erfindungen möglich, Variationen empfohlen, reichhaltige Auswahl. Das Verzeichnis LINDATEN ist wichtig. |
| 2 | Ifs-Fraktale | |
| 2.1 | Chaosspiel (prg Sierpi) | Einführungsbeispiel in das Thema. |
| 2.2 | Bekannte IFS-Fraktale Prg(IFS) | Reichhaltiges Programm mit vielen kreativen Möglichkeiten. Variationen empfohlen. <u>Das Verzeichnis IFSDATEN ist wichtig.</u> |
| 3 | Logistische Parabel prg Logisvgl | Verständnis-Programm, man kann nur den Parameter ändern |
| 3.1 | Darstellungen rekursiver Folgen | |
| 3.1.1 | Iteration an der Logistischen Parabel | |
| 3.2 | Feigenbaumszenario (prg Kaosfeig) | Man kann eigene Ausschnitte wählen und sich die "Inseln der Ruhe" genauer ansehen. |
| 4 | Apfelmännchen (prg ApfJulia) | Reichhaltiges Programm, in dem es viele schöne Bilder zu entdecken gibt. |
| 4.1 | Komplexe Zahlen, Darstellung | Vorsicht mit zu hoher Iterationstiefe. |
| 4.2 | Erklärungen zum Apfelmännchen | Folge im Einzelnen ansehen: opt.<v> |
| 4.2.1 | Mandelbrot-Rekursion | |
| 4.3 | Juliamengen | |
| 4.3.1 | Zusammenhang mit der Mandelbrot-Rekursion | |
| 4.4 | Verwandte Rekursionen | = TYP... kann gewählt werden Freie Erfindung von verallgemeinerten Mandelbrotmengen nur in Pascal mgl. |
| 5 | Dynamische Systeme (prg Lorenz) | Man kann sehen, wie die Attraktoren beim Wandern der Punkte entstehen und wie benachbarte Punkte auseinanderlaufende Bahnen haben. |
| 5.1 | Veranschaulichung von Differentialgleichungen | |
| 5.2 | Lorenzattraktor | Auch als Anaglyphen mit rotgrüner Brille räumlich zu sehen. |
| 5.2.1 | Visualisierung des Lorenzattraktors | Man kann die Blickrichtung ändern. |
| 5.3 | Weitere Dynamische Systeme | |
| 5.3.1 | Roesslerattraktor | |

Zelluläre Automaten

Progr. **lebenfrb** =Game of Life (Conway)

Progr. **linauto** und **linzauto**

Progr. **drahtwlt**

Mathematik Prg. **Kegelschnitte**

Progr. **dglnumer**

Man setzt Muster auf ein Karogitter und sieht sich an, wie es sich von Takt zu Takt eentwickelt. (auch für Kinder ab 11 J.)
Lineare Zell. Automaten, erzeugen von selbst div. Muster. Regeln sind variabel.
Man kann elem. Elektronik simulieren.
Alles zum Thema Kegelschnitt-Eigensch.
numerische Differentialgleichungen

Initiator



, meist ein gerader Strich, allg. ein Linienelement.

Generator



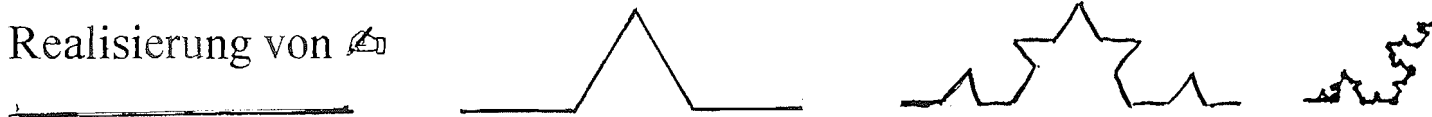
ist aufgebaut mit den Linienelementen des Initiators.

Der Generator klärt, durch was der Initiator ersetzt werden soll. Am einfachsten geht es, wenn man den Generator aus geraden gleichlangen Stücken zusammensetzt.

Regel: Jedes Linienelement (zunächst des Generators, dann in jeder Stufe) wird durch den verkleinerten Generator ersetzt. Das wird stets wiederholt.

Es sind hier auch vielfältige Variationen möglich, z.B. können zwei Generatoren im Wechsel oder in zufälliger Wahl wirken. Es könnten auch nur ein Teil der Linienelemente ersetzt werden u.v.m.

Realisierung von



Realisierung mit rekursiven Turtlegraphik-Prozeduren

$fd(a)$ steht für : laufe a Pixel vorwärts, $lt(b)$ steht für : drehe den Kopf um den Winkel b nach links, entsprechend $rt(b)$ nach rechts.

```

Procedure koch(stufe:integer);
begin if stufe=1 then begin fd(a);lt(60);fd(a);rt(120);fd(a);lt(60);fd(a); end
      else begin koch(stufe-1);lt(60);koch(stufe-1);rt(120);koch(stufe-1);lt(60);koch(stufe-1); end;
end; {proc}
    
```

Realisierung mit Lindenmayer-Systemen¹⁾

Aus einem **Axiom** und einer oder mehreren **Ersetzungsregeln** wird zuerst entsprechend der gewählten Stufe ein langes Wort gebildet.

Dessen Buchstaben werden dann einzeln gelesen und in Turtlegraphik-Befehle umgesetzt.

Dabei steht F z.B. für $fd(a)$, $+$ für $lt(b)$, $-$ für $rt(b)$.

Für die Kochkurve ist das **Axiom** F (Stufe 0), die **Ersetzungsregel** $F \Rightarrow F+F-F+F$ (Stufe 1), In Stufe 2 ist dann $F+F--F+F + F+F--F--F--F+F--F+F$ entstanden. Für Stufe 3 ist wieder jedes F mit der Ersetzungsregel zu ersetzen, u.s.w. .

Stets wird beim Zeichnen ein **Weg** durchlaufen, deshalb habe ich diese Fraktale **Wegfraktale** genannt. In der einschlägigen Literatur wird meist nur "klassische Fraktale" (weil es sie schon länger gibt) gesagt, oder sie bekommen den Namen L-Systeme, nach der letzten der obigen Konstruktionen..

DER KREATIVITÄT WERDEN (FAST) KEINE GRENZEN GESETZT

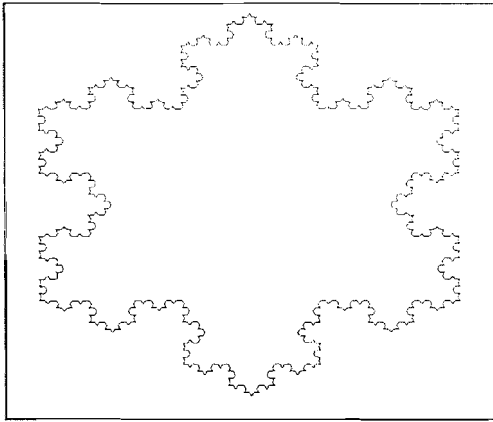
¹⁾ Ursprünglich 1968 entwickelt von dem Biologen Aristid Lindenmayer zur Beschreibung des Pflanzenwachstums.

Chaos und Fraktale 1.1.1. Kochkurve und Varianten

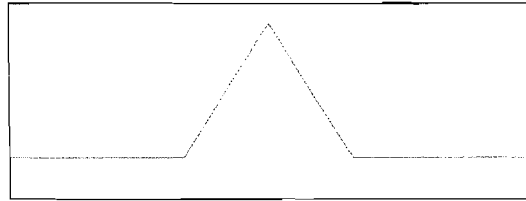
Dr. Dörte Haftendorn

1.1.1. Kochkurve und Varianten

25. Oktober 1994



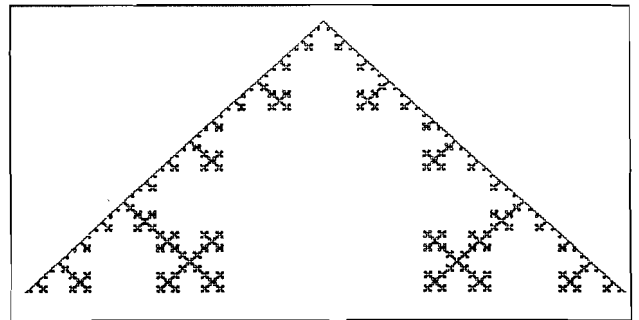
Die Kochkurve, hier dreifach als Schneeflockenkurve gestaltet, ist ein Paradebeispiel für selbstähnliche Fraktale. Ihr Axiom ist F , bzw. $F--F--F--$, die Ersetzungsregel, dh. der Generator, ist $F+F--F+F$, mit



$+/- = 60^\circ$.

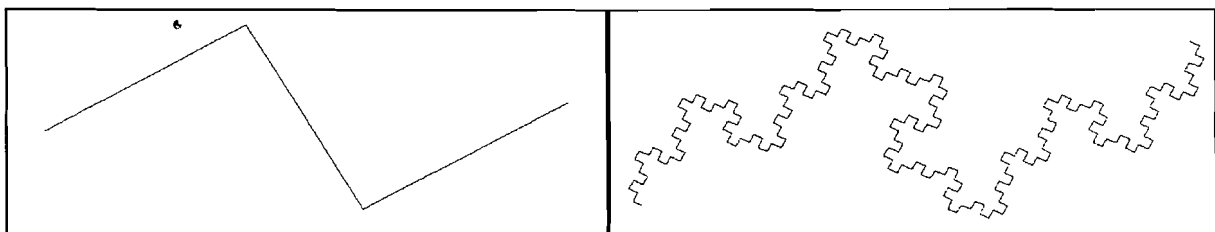
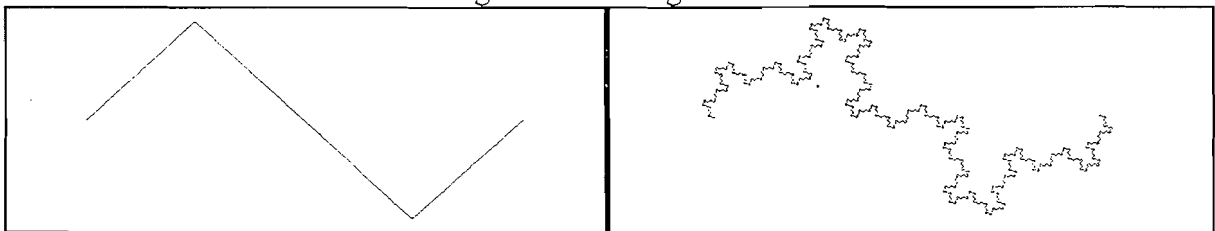
Zahlreiche Varianten sind denkbar.

Für die Verwirklichung auf Karopapier eignet sich besonders der Generator $F+F-F-F+F$ mit $+/- = 90^\circ$. Das Fraktal könnte man **Quadro-Kochkurve** nennen. Rechts ist die 5. Stufe gezeichnet, man kann aber deutlich den Generator und auch die nächsten Stufen erkennen.



Auch als Kreuzstichmuster hat die Quadro-Kochkurve schon gedient, eigentlich aber hat der schwedische Mathematiker **Helge von Koch** 1904 die obige Kurve eingeführt, um ein Beispiel für eine nirgends differenzierbare und dennoch stetige Kurve aufzuzeigen.

Aber sie hat noch weitere bemerkenswerte Eigenschaften: Die Länge der Kurve wächst bei jedem Schritt mit dem Faktor $q=4/3$, (bei der Quadro-Kochkurve ist $q= 5/3$), also bilden die Längen der einzelnen Stufen eine geometrische Folge, die gegen Unendlich strebt. Damit ist bei dem Schneeflockenfraktal auf deutlich sichtbar endlichem Platz eine unendlich lange Kurve untergebracht.



Die beiden Generatoren, die hier zusammen mit ihrem Fraktal in 5. Stufe abgebildet sind, zeigen einen bemerkenswerten Unterschied. Das rechte untere Bild scheint gedreht zu sein. Die Generatoren sind:

oben: $+F--FF++F-$ mit $+/- = 45^\circ$ und unten: $+F---F+++F-$ mit $+/- = 30^\circ$

Zeichnet man sich den zweiten Generator wirklich einmal ordentlich zu einem waagerechten Initiator auf, so stellt man fest, daß tatsächlich der Endpunkt des Generators höher liegt. Mit Tangens gerechnet sind es $3,435^\circ$ für jede Stufe. Überhaupt ergeben sich hier zahlreiche lohnende Anwendungen für die Kenntnisse aus Klasse 9 und 10. Die Schrittweite F muß ja bei jedem Schritt passend verkleinert werden, damit die Zeichnung insgesamt etwa dieselbe Größe behält. Unten gilt $F_{neu} = 1/\sqrt{5} \cdot F_{alt} = 0,4472 \cdot F_{alt}$.

Stufe 1

Dieses ist das Grundelement. (Generator)
Es besteht aus 5 gleichlangen Strichen.

Rechne im Folgenden mit 3 cm für jeden dieser

Striche.
Es hat eine Weglänge w_1 von knapp 15 cm und eine Stielänge von 9 cm.

Die folgenden Fragen sind eher für ☺ als für ☹

Stufe 2

Jeder gerade Strich aus Stufe 1 ist nun durch

einen kleinen Baustein vom Typ Stufe 1 ersetzt.
Mit welchen Faktor muss man jeden kleinen

Baustein von Stufe 2 strecken, damit er so groß

wird wie Stufe 1? Antwort: Mit $k =$ _____

Wieviele solcher Bausteine sind es? $z =$ _____

Stufe 3

Jeder gerade Strich aus Stufe 2 ist nun durch

einen kleinen Baustein vom Typ Stufe 1 ersetzt.
Man erkennt Bausteine, die wie die vorige Stufe

aussehen.
Wieviele Bausteine vom Typ Stufe 2 hat Stufe 3?

$z =$ _____

Mit welchem **Streckfaktor** gelangt man vom

Baustein Typ Stufe 2 in Stufe 3 nach Stufe 2?
Welche Weglänge hat Stufe 3? $w_3 =$ _____

Stufe 4

Beantworte die entsprechenden Fragen wie oben:

$z =$ _____

Offenbar sind k und z immer gleich.

Kann man die Weglänge mit Verwendung von k und z ausdrücken?

Wie verändert sich die gezeichnete Weglänge von Stufe zu Stufe? Begründe:

$$w_{n+1} = \frac{3}{5} w_n$$

Wie lang ist der Zweig mit allen Ästen jetzt?

$w_4 =$ _____

Die Weglänge wächst über alle Grenzen.

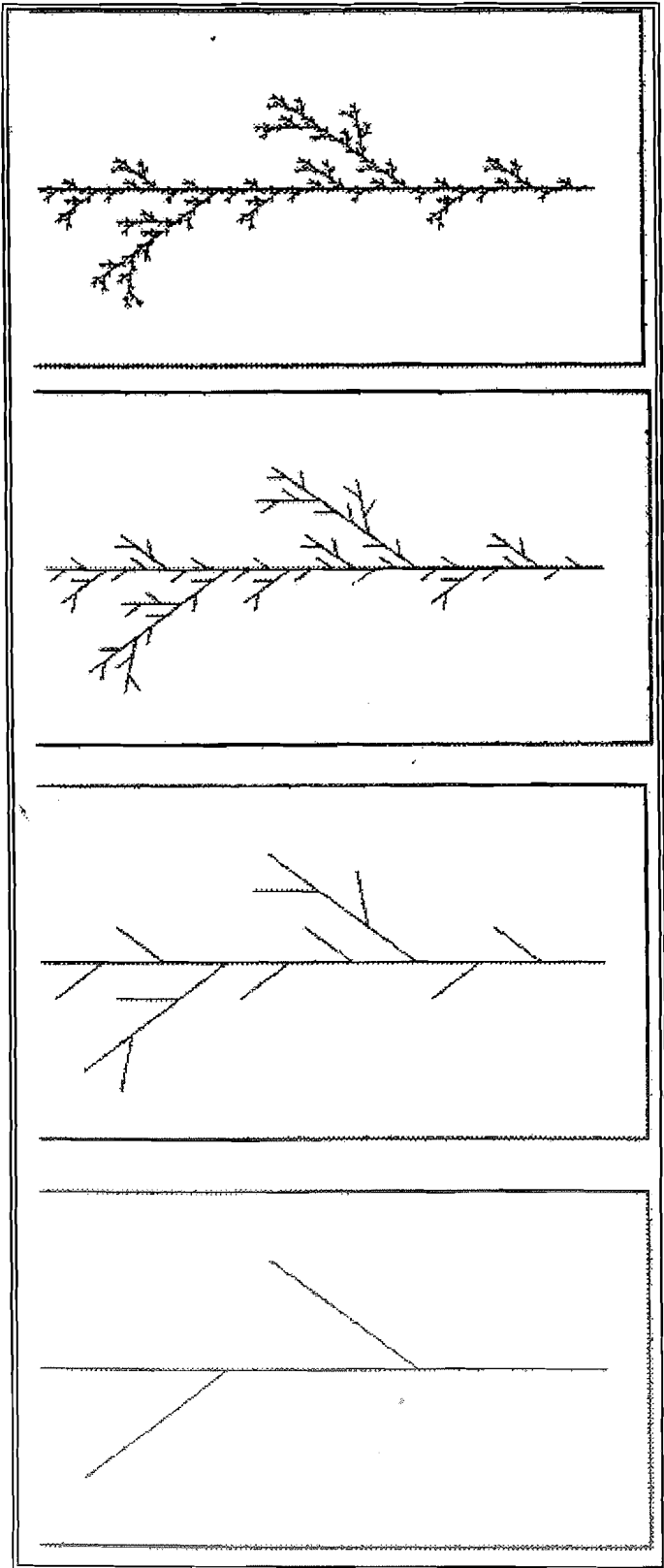
Aber wächst auch der Zweig?

Hier ist doch etwas gaaaanz merkwürdig???

selbstähnliche Fraktal.

Stelle dir vor, es geht immer so weiter. Die "Grenzfigur", die man nie zeichnen kann, die man sich aber gut vorstellen kann, ist das echte

Die beobachtete Merkwürdigkeit führt zum Begriff der "fraktalen Dimension".



M.H. 02

allerlei Fraktale - und ihre Vorläufer.

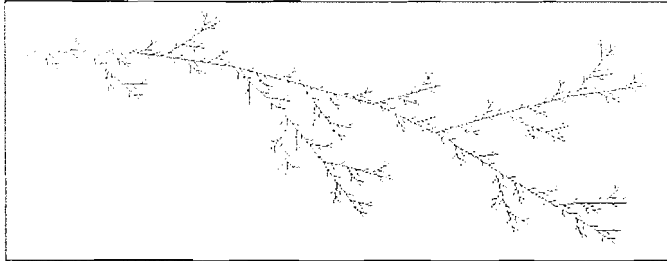
Ha 28. Januar 1992

Versuche, jeweils den Grundbaustein, der aus höchstens 5 Strichen besteht, herauszufinden. Skizziere die zweite, bzw. auch die 3. Stufe auf dem Weg zum Fraktal.

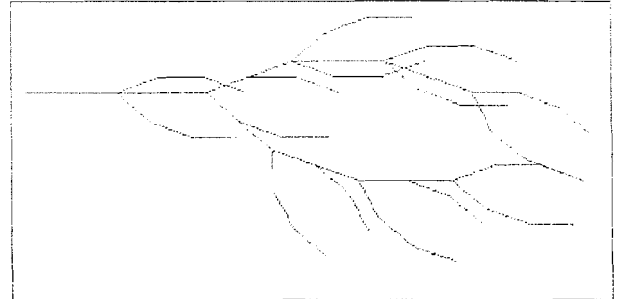
Finde heraus, welche Stufe hier jeweils gezeichnet ist.

Wie groß ist die Zahl der Bausteine vom Typ einer bestimmten Stufe in der nächsten Stufe? z gesucht jeweils

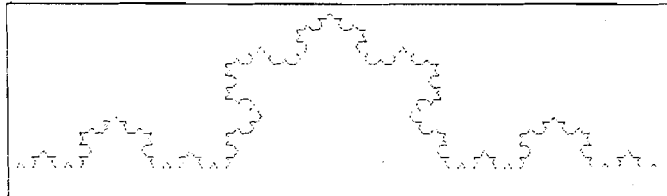
Mit welchem Faktor muß man den Baustein strecken, um die vorige Stufe wider zu erreichen? k gesucht jeweils



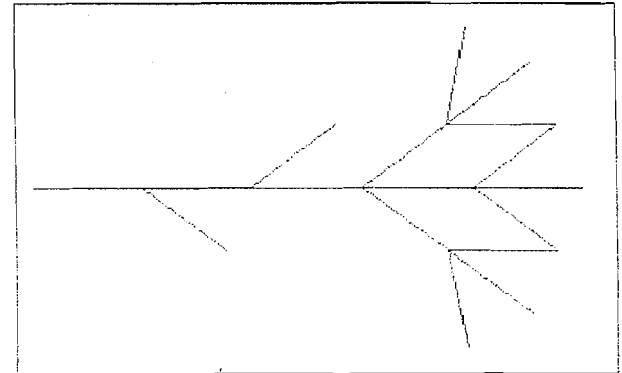
runder Zweig



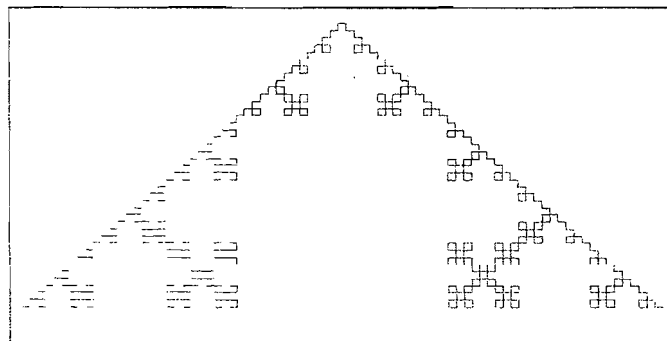
Wedel



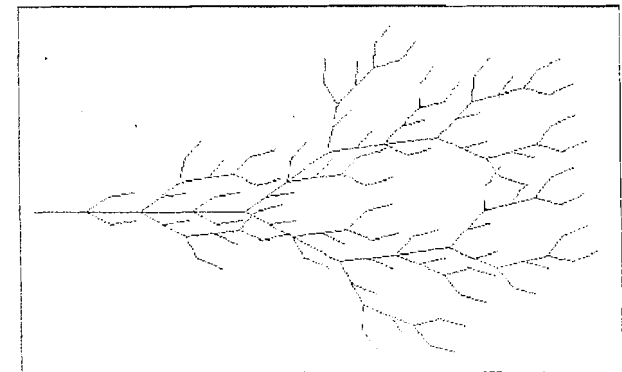
Kochkurve



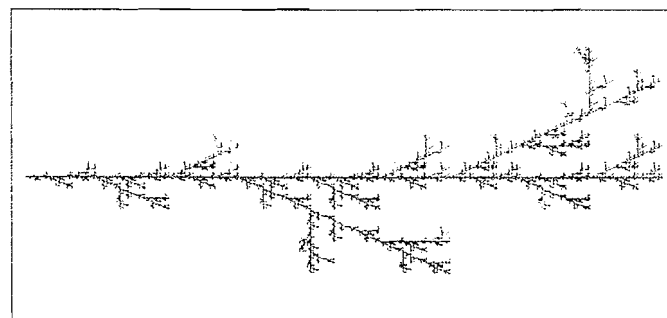
Dolde



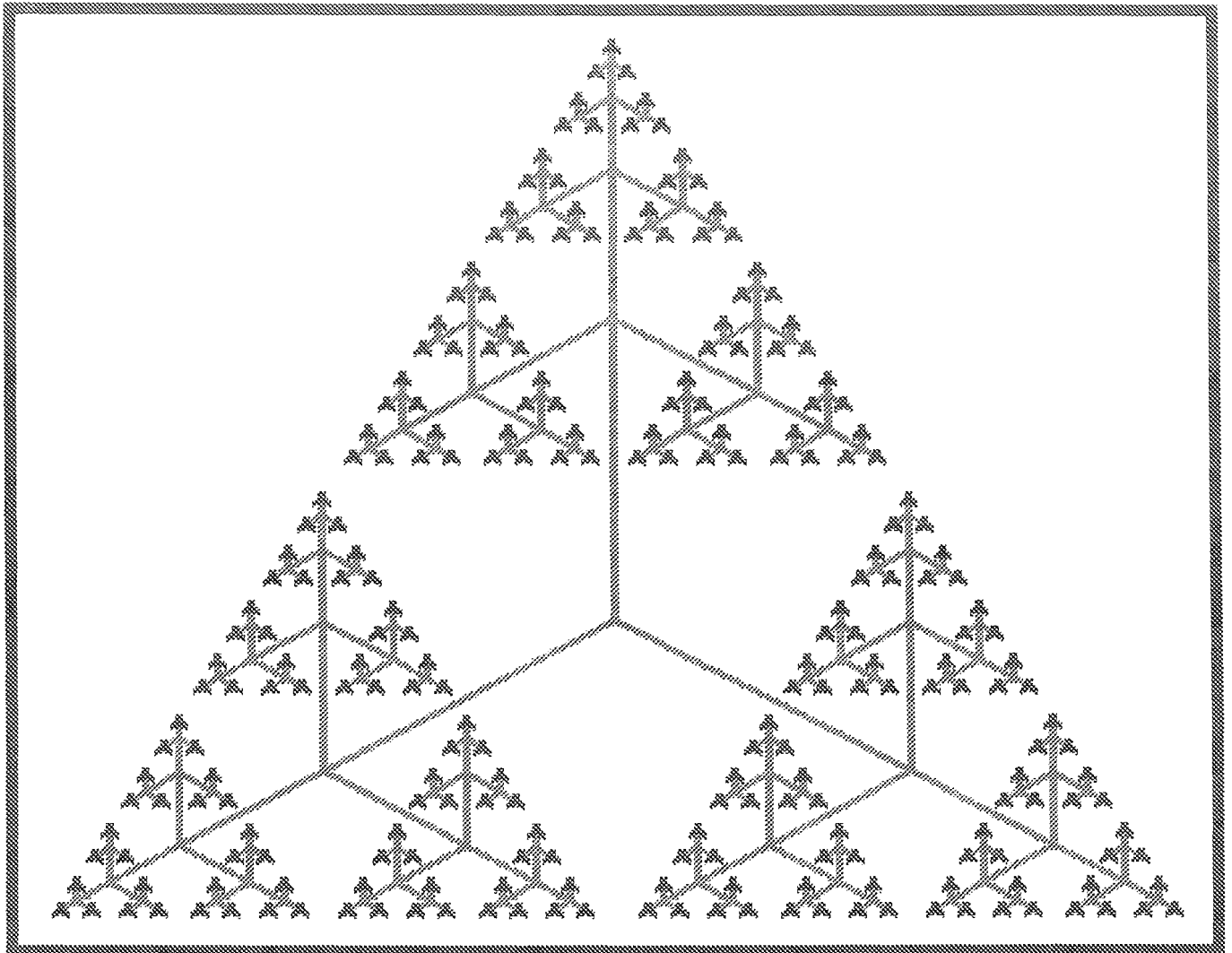
Quadro-Kochkurve



Busch



Zweig



Ternärer Baum

```
procedure ternärerBaum(i:integer;VAR gr,x,y:integer);
```

Mit rekursiver Prozedur in Pascal

```
var xk,yk,g_1:integer;
```

```
begin g_1:=round(v*gr);
```

```
if i=1 then begin setcolor(2);
```

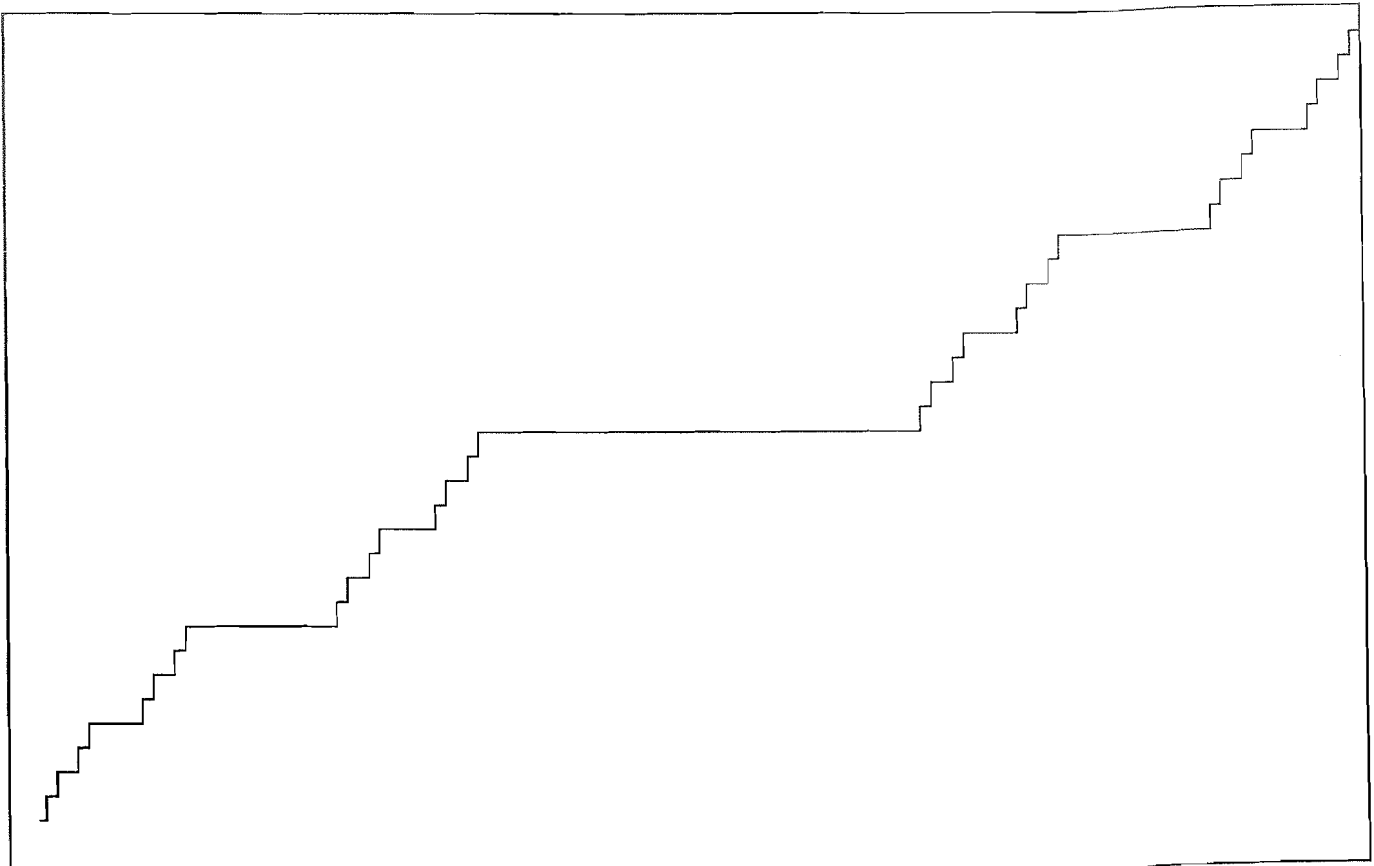
```
fd(gr);zkn(i,x,y); lt(120);fd(gr);zkn(i,x,y); lt(120);fd(gr);zkn(i,x,y);lt(120); setcolor(5); end
```

```
else begin fd(gr);kn(i,xk,yk);ternärerBaum(i-1,g_1,xk,yk); zkn(i,xk,yk); zkn(i,x,y);
```

```
lt(120);fd(gr);kn(i,xk,yk);ternärerBaum(i-1,g_1,xk,yk);zkn(i,xk,yk); zkn(i,x,y);
```

```
lt(120);fd(gr);kn(i,xk,yk);ternärerBaum(i-1,g_1,xk,yk);zkn(i,xk,yk); zkn(i,x,y);lt(120); end;
```

```
end;
```

teufel.lin erstellt mit Linde.pas Ha 3/95, ohne Farben ebenso in LOGO teufel.log

Lindenmayer-System

Berücksichtigt man die Deutung, so kann man das Axiom in der Abbruchbedingung der Rekursion wiedererkennen.

Axiom **A**
Regeln **A → ABA**

Der Baustein B tritt als eigene Prozedur auf.

B → BBB

Deutung **A = F + V -**
 B = FFF

+ = 90° links - = 90° rechts

F und V erscheinen als vorwärts-Befehle mit Schrittweiten a bzw. b

Weg-Prozeduren mit Igelgraphik

Hier gezeigt in LOGO, ebenso geht es mit Turtlegraphik in Pascal.

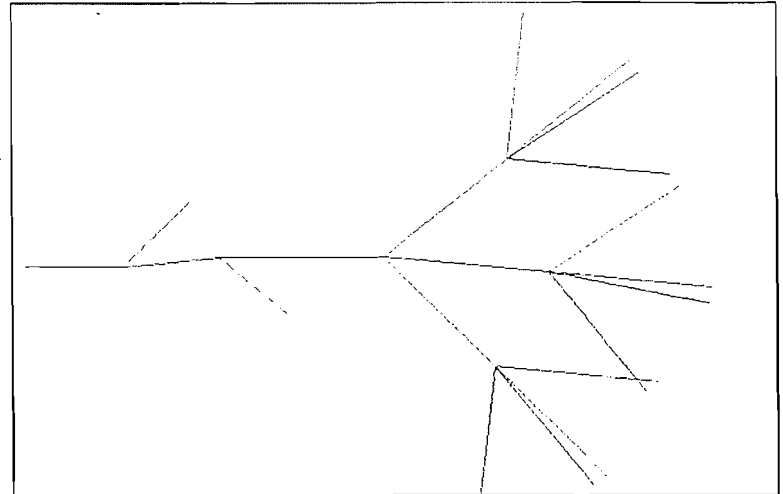
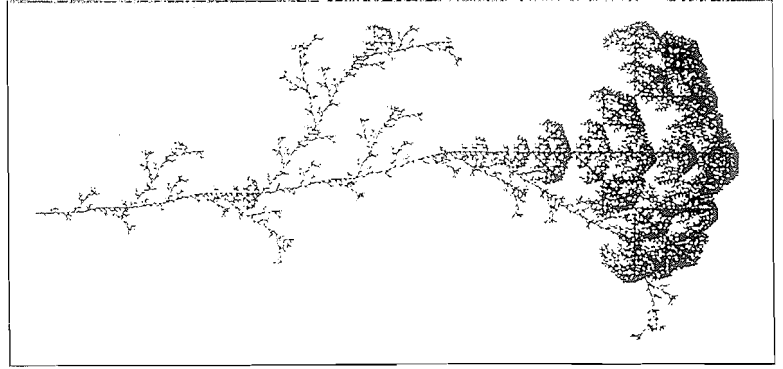
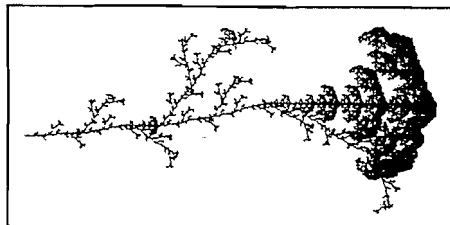
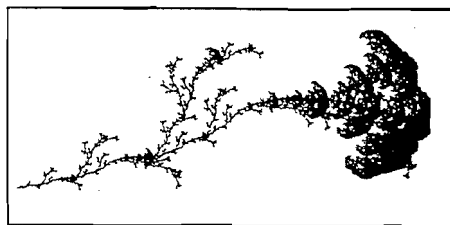
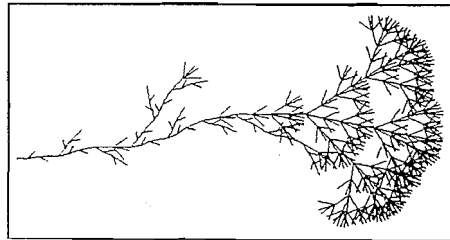
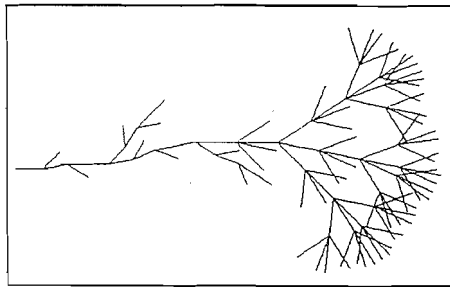
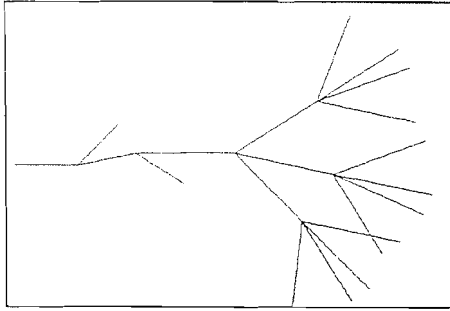
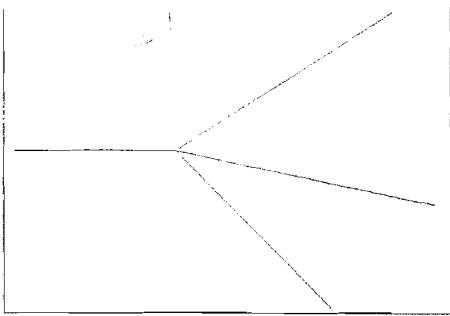
```
PR teufel :n :a :b
  ( wenn :n = 0 dann vw :a li 90 vw :b re 90
    sonst ( teufel (:n-1) (:a/3) (:b/2)
            teufelmitte (:n-1) (:a/3)
            teufel (:n-1) (:a/3) (:b/2) ))
ENDE
PR teufelmitte :n :a
  ( wenn :n=0 dann vw :a vw :a vw :a
    sonst ( teufelmitte (:n-1) (:a/3) teufelmitte (:n-1) (:a/3)
            teufelmitte (:n-1) (:a/3) ))
ENDE
```

Fazit: L-Systeme lassen sich in rekursive Weg-Prozeduren übersetzen.

Hier ist dies für ein Beispiel ohne Knoten gezeigt. In Pascal lassen sich auch die Knoten einfach rekursiv verwalten. In LOGO ist es vernünftig, eine dynamische Liste für die Knotenkoordinaten zu eröffnen. Die naheliegende Versuch, das Lindenmayerwort wirklich zu bilden, stößt leider sehr schnell an die Grenzen der Speichermöglichkeiten. Man muß es während seiner Bildung sofort "abarbeiten". Dies ist Teufel.txt

Dolde mit dem Lindenmeyersystem

1.2.95
12. Januar 1995



Im Folgenden sind F und V verschiedene Weglängen, +/- bzw. L/R verschiedene Winkelpaare, r der Stauchfaktor. Aus dem Axiom entsteht unter Verwendung der Bausteine A und B aufgrund der Ersetzungsregeln Stufe für Stufe ein immer längeres Wort. Dieses wird "gelesen" und in Zeichenbefehle (Turlegraphik) umgesetzt.

Die linke einfarbige Dolde hat das Axiom A.
Bausteine $A=V$, $B=F$. $+/-=35^\circ$, $L/R=48^\circ$ $r=0.43$
Regeln: $F \Rightarrow F$, $A \Rightarrow A(LA)-A(RA)+B$
 $B \Rightarrow B+(B)R(B)-(B)LB$

Die obere farbige Dolde hat das Axiom $A(+B)R(2B)-(B4)L$.
Die Zahlen bewirken die Umschaltung der Zeichenstiftfarbe.
Bausteine $A=5V2$, $B=F$. $+/-=42^\circ$, $L/R=48^\circ$ $r=0.43$
Regeln: $F \Rightarrow F$, $A \Rightarrow A(LA)-A(RA)+B$
 $B \Rightarrow B+(3B4)R(B)-(6B2)LB$

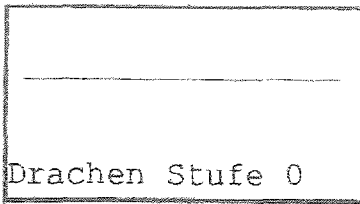
Dateinamen: doldlin1.wpg...doldlin5.wpg, doldlinv.wpg, im Prog: dolde
rechte Spalte doldlindr.wpg doldlinx.wpg. Im Programm dolde2f
Dieser Text: doldlin.txt.
Alle Zeichnungen beruhen auf dem Programm LINDE © Ha94

Wegfraktale Drachenkurve

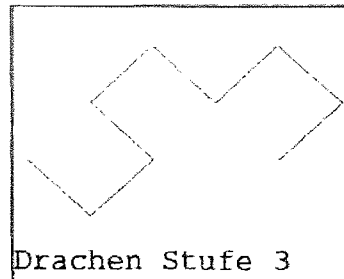
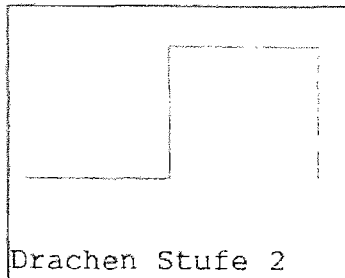
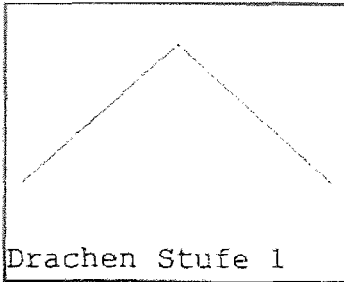
Prof. Dr. Dörte Haftendorn

www.mathematik.uni-erlangen.de/~math/lehramt

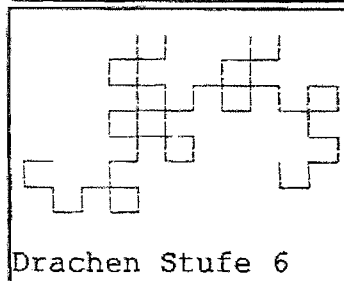
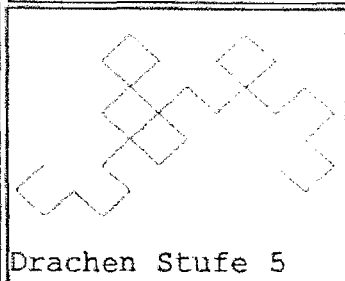
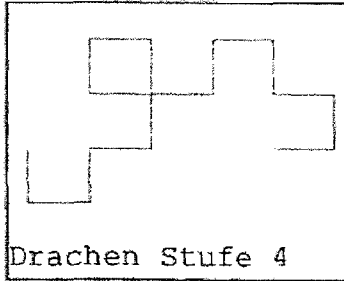
5. Nov. 96, Apr. 2005



Die **Drachenkurve** entsteht durch fortgesetztes Papierfalten, wenn man einen langen Streifen Papier immer links über rechts faltet, dann jeden Knick rechtwinklig hinstellt und von oben betrachtet. Beim handwerklichen Falten verliert man schon bald die Übersicht, aber auf Karopapier kann man gewisse Gesetzmäßigkeiten entdecken.

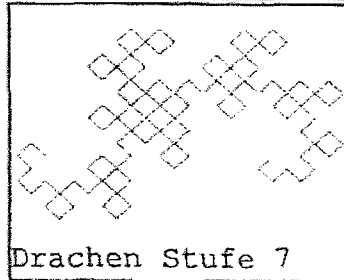


Schreibt man Linksknicks als 1 und Rechtsknicks als 0,



so ergeben sich nacheinander

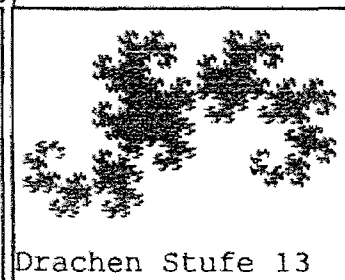
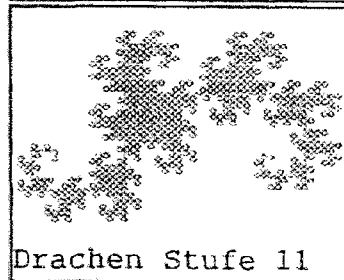
0,
100,
1100100,
110110001100100,



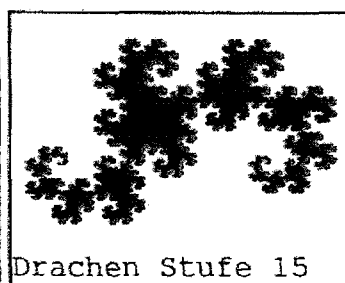
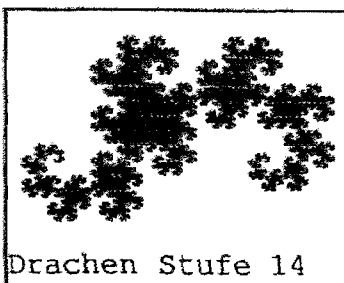
101100111001000110110001100100
u.s.w., Zahlen, die man ganz leicht immer weiter schreiben kann. Die entstehenden Zahlen lassen sich als Dualzahlen interpretieren.

Dann konvergieren Sie gegen die sogenannte **Papierfaltungszahl**.

Manchmal wird die in Stufe 15 annähernd abgebildete Grenzfigur der **Drachen** genannt, ihr Rand ist dann die **Drachenkurve**.

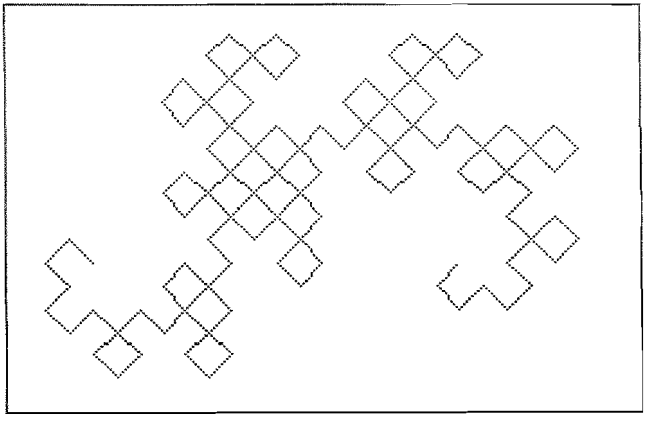
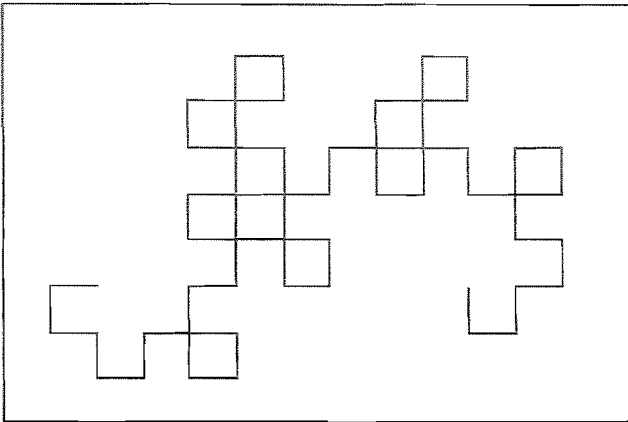


Man kann auch mit Varianten herum probieren. Nimmt man Stufe 2 als Initiator und Stufe 3 als Generator, so erhält man den **Zwillingsdrachen**, dessen Rand eine Kochkurven-Variante mit dem Generator +F--FF++F- ist (+ = 45°).



In dem Buch "Dino-Park" von Chrichton, das als "Jurassic Park" verfilmt worden ist, werden die Kapitel mit den Stufen des Drachenfraktals eingeleitet.

Drachenfraktal

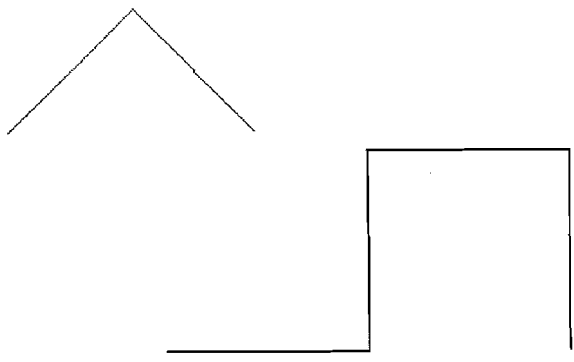


Als **Lindenmeyersystem** wird der Drachen so beschrieben:

Axiom F B
 Regeln F-> (Nichts)
 A -> - F A ++ F B -
 B -> + F A -- F B +

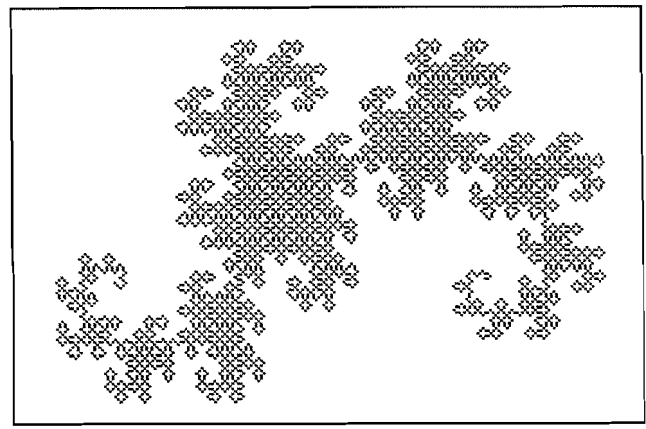
Die Bausteine A und B sind leer.
 Die Übersetzung in Logo geht direkt.
 (Winlogo, Otte/ Dümmlers)
 In anderen Logoverversionen etwas andere Syntax.

Drachen 1 100 und
 Drachen 2 100



```
PR aaa :n :xPR
wenn :n=0 dann rk
re 45 fff :n-1 :x aaa (:n-1) :x*:r
li 45 li 45 fff :n-1 :x bbb :n-1 :x*:r
re 45
ENDE
PR bbb :n :x
wenn :n=0 dann rk
li 45 fff :n-1 :x aaa :n-1 :x*:r
re 45 re 45 fff :n-1 :x bbb :n-1 :x*:r
li 45
ENDE
PR fff :n :x
wenn :n=0 dann vw :x rk
ENDE

PR drachen :n :x
setze "r" 1/2*qw 2
wenn :n=0 dann fff :n :x rk
bbb :n :x
ENDE
PR start
bild punkt 100 100 re 90 vi
ENDE
```



Dargestellt sind oben die Stufen 6 und 7,
 dann 1 und 2 und unten 11.
 Alle in LOGO mit Länge 100

4.3.04

Stelle dir eine geometrische Figur vor und strecke sie dann mit dem Streckfaktor k .

Hast du die vorher die Länge L_{alt} gemessen, so hat deine Figur nachher die k -fache Länge.

Die rechte Abbildung zeigt dir, dass aber der Flächeninhalt k^2 -fach so groß wird, das Volumen wird sogar k^3 -fach so groß.

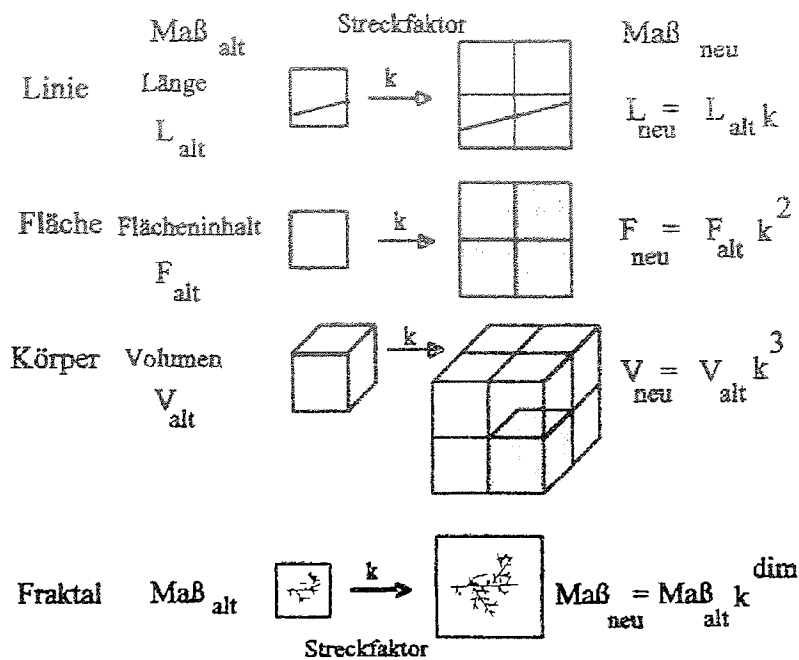
Man sagt:

Eine Linie hat die Dimension 1.

Eine Fläche hat die Dimension 2.

Ein Körper hat die Dimension 3.

Ein Fraktal hat die Dimension dim .



Wenn wir Länge, Flächeninhalt, Volumen... als **Maß** bezeichnen, so gilt offenbar:

$$Maß_{neu} = Maß_{alt} \cdot k^{dim}$$

Die "selbstähnlichen" Fraktale haben nun die merkwürdige Eigenschaft, dass sie sich beim Strecken weder wie Linien, noch wie Flächen, noch wie Körper verhalten. Man muss bei ihnen zulassen, dass die Dimension nicht notwendigerweise ganze Zahl ist. Sie kann also eine Bruchzahl oder eine beliebige Kommazahl sein. Weil "fractum" (lat.) gebrochen, bzw. "fraction" (engl.) Bruch heißt, nennt man diese geometrischen Gebilde

Fraktale.

Nicht genug, dass die Fraktale eine Erweiterung des Dimensionsbegriffes erfordern, es sind, je nach Art des oben genannten Maßes, auch noch verschiedene "Dimensionen" für ein Fraktal sinnvoll.

Wir werden die "Selbstähnlichkeitsdimension" d und die "Boxdimension" D genauer kennenlernen. Den Begründungen sind eigene Seiten gewidmet.

Die Zahlen d und D stimmen nicht immer überein.

Bei selbstähnlichen Fraktalen, die sich nicht selbst überschneiden, gilt: $d = D$.

d bestimmt man durch Nachdenken über Bausteinzahl z und Streckfaktor k (s.u.).

Dann rechnet man aus: $d = \frac{\log z}{\log k}$ d ist nur bei selbstähnlichen Figuren sinnvoll.

D bestimmt man durch Messungen von Fraktalen, die mit verschiedenen Box-Gittern gerastert sind. Bei jeder geometrischen Figur, d.h. auch bei jedem Fraktal, kann man D wenigstens näherungsweise bestimmen. (s.u.) Die Boxdimension ist vor allem für die Anwendung des Fraktalbegriffes in den Naturwissenschaften und der Medizin wichtig und sinnvoll.

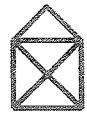
10.02

Fraktale : Grundüberlegung am Nikolaushaus

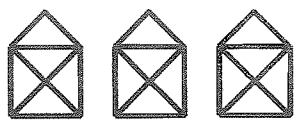
Prof. Dr. Dörte Haftendorn <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~haftendorn/>

14. November 1996, Apr. 2005

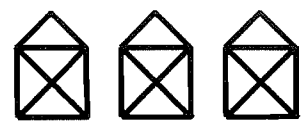
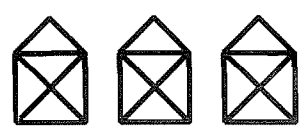
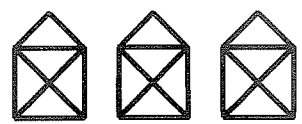
Das ist das Haus
vom Nikolaus.
Es hat eine Weglänge von etwa 17 cm,
einen Flächeninhalt von 5 cm².



Das sind drei Häuser
vom Nikolaus.
Sie sind untereinander kongruent.
Sie haben eine Weglänge von etwa 3 mal 17 cm, also 51 cm,
und einen Flächeninhalt von 3·5 cm².

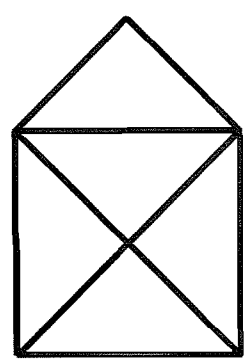


Das sind z = 9 Häuser
vom Nikolaus.
Sie sind untereinander kongruent.
Sie haben eine Weglänge von etwa z·17 cm, also 153 cm,
und einen Flächeninhalt von z·5 cm², also 45 cm².



**z Häuser haben z-fache Länge
z-fache Fläche
z-faches Volumen**

Das ist das dreifach so breite Haus
vom Nikolaus.
Es ist den kleinen Häusern ähnlich, Streckfaktor **k=3**.
Es hat eine Weglänge von etwa k·17 cm, also 51 cm,
eine Breite von k·2 cm, also 6 cm
und einen Flächeninhalt von k²·5 cm², also 45 cm².



**Auf das k-fache gestreckte Häuser haben
k-fache Länge
k²-fache Fläche
k³-faches Volumen**

Das **Zweigfraktal** besteht aus **z=5** kleinen Zweigen. Jeder hat das Maß M_{klein} .

Das ganze Zweigfraktal hat daher das Maß $5 \cdot M_{\text{klein}}$.

Das Zweigfraktal entsteht aus einem kleinen Zweig durch Streckung mit dem Faktor **k=3**.

Das ganze Zweigfraktal hat daher das Maß

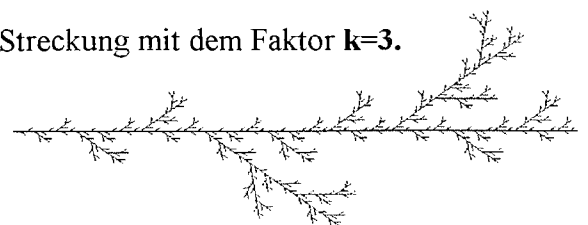
$3 \cdot M_{\text{klein}}$, wenn das Maß eine Länge ist.

$3^2 \cdot M_{\text{klein}}$, wenn das Maß eine Fläche ist.

$3^3 \cdot M_{\text{klein}}$, wenn das Maß ein Volumen ist.

Keine der Gleichungen **$5=3$, $5=3^2$, $5=3^3$** ist richtig,

Daher ist das für Fraktale sinnvolle Maß weder Länge, noch Fläche, noch Volumen.



Erfüllbar und sinnvoll ist höchstens die Gleichung $z \cdot \text{Ma\ss}_{\text{klein}} = k^d \cdot \text{Ma\ss}_{\text{klein}}$ also $z = k^d$,

umgeformt: $d = \frac{\log z}{\log k}$. Dabei ist **d die fraktale Dimension** eines selbstähnlichen

Fraktals.

Ein Fraktal wird "streng selbstähnlich" genannt, wenn es aus gleichen Bausteinen besteht, die bei passender Vergrößerung genau wie das ganze Fraktal aussehen.

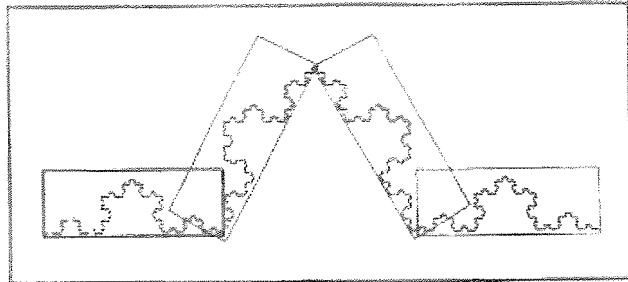
Leider kann man nie ein Fraktal genau zeichnen, sondern immer nur in "Stufen". Oft kann man ab der 3. Stufe schon sehen und überlegen wie es weitergeht, wenn die Stufenzahl immer mehr erhöht wird. Die "Kochkurve" ist in dieser Hinsicht schön übersichtlich.

$z = 4$ Bausteine



$k = 3$

→ auf das Ganze



Wenn also z Bausteine das ganze Fraktal bilden und jeder Baustein, gestreckt mit dem Faktor k , ebenfalls das ganze Fraktal bildet, dann muss man ein Maß, das diese Abbildung "mitmacht", auf zweierlei Arten berechnen können:

$$Ma\beta_{neu} = Ma\beta_{alt} \cdot z \text{ und } Ma\beta_{neu} = Ma\beta_{alt} \cdot k^d, \text{ also } Ma\beta_{alt} \cdot z = Ma\beta_{alt} \cdot k^d$$

und es folgt : $z = k^d$. Dann ergibt sich

$$d = \frac{\log z}{\log k}$$

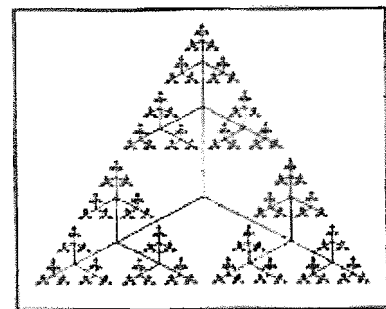
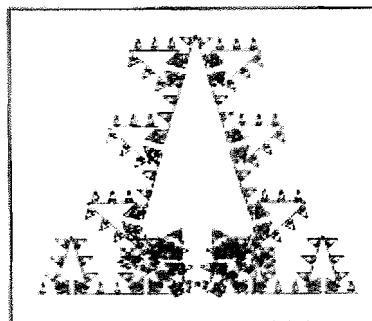
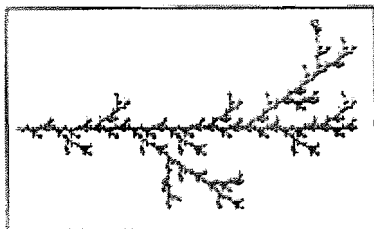
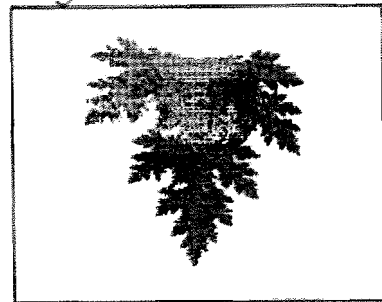
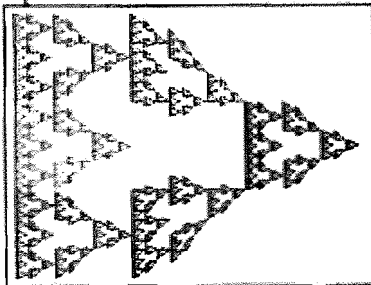
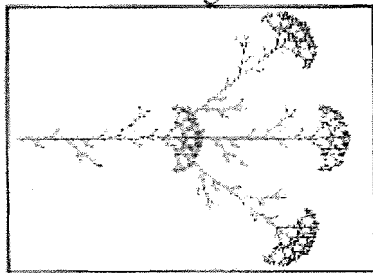
. Dabei kann \log jeder Logarithmus sein.

Für die Kochkurve errechnet man nun: $d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26\dots$ als

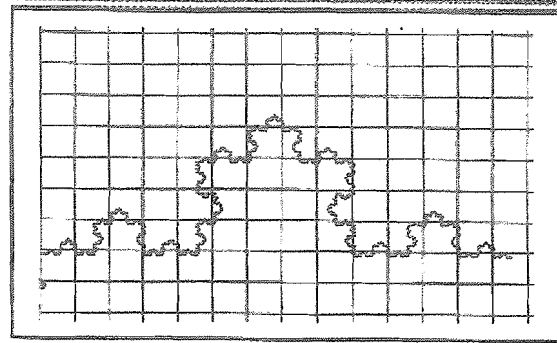
Selbstähnlichkeits-Dimension.

Übung: Bestimme unten d , wenn es geht.

Suche in den folgenden Fraktalen passende Bausteine, rahme sie fabig ein.



Fraktal derselben Stufe wie im mittleren Bild.
Gezeichnet mit weitem Raster.
Es werden m_{weit} Kästchen getroffen.



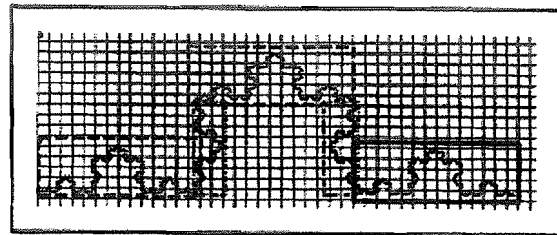
Ausgangsbild, enges Raster

Es werden m_{eng} Kästchen getroffen.

Überlegung: In dem dicken Rahmen rechts unten werden von dem Baustein genau so viele Kästchen getroffen, wie im untersten Bild, denn das ist eine wirkliche Ausschnittvergrößerung. Die Anzahl sei m_{bau} .

Die gestrichelten Kästen zeigen, dass sicher gilt:

$$m_{eng} > (3 + \sqrt{3})m_{bau} > 3 \cdot m_{bau}$$



↑ · 3

Dies ist also eine wirkliche Ausschnittvergrößerung des darüber dick eingerahmten Bausteins.

Sie ist daher nicht so fein untergliedert wie Fraktal derselben Stufe wie das Fraktal in der Mitte. (Die Stufe ist um 1 geringer.) Bei einem wahren (idealen) Fraktal ist aber so eine Ausschnittvergrößerung wieder genauso wie das wahre Fraktal.

Dem kommt die oberste Zeichnung näher, obwohl

dort das Fraktal feiner gezeichnet ist, gilt etwa $m_{bau} \approx m_{weit}$

Zusammen gilt sicher deutlich: $m_{eng} > m_{weit} \cdot 3 = m_{weit} \cdot k$. Also ist die Kochkurve keine normale Linie.

Für das wahre Fraktal ist dann die Gleichung

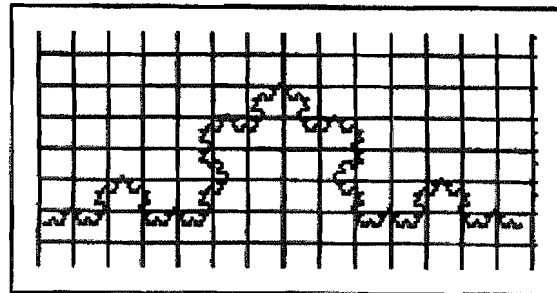
$$m_{eng} = m_{weit} \cdot k^D$$

sinnvoll, und der

Exponent D heißt **Boxdimension des Fraktals**.

Bei der Kochkurve und anderen überschneidungsfreien Fraktalen stimmt die Boxdimension D mit der Selbstähnlichkeitsdimension d überein. Das kann man sich plausibel machen, Beweise gehen auf die Hausdorff -Dimension zurück. Im Überschneidungsfall ist $D < d$. Damit ist die Boxdimension eher als die Selbstähnlichkeitsdimension geeignet, das äußere Erscheinungsbild der fraktalen Figur zu beschreiben. Bei $1 < D < 2$ ist das Fraktal umso linienähnlicher je dichter D an 1 liegt, und umso flächiger, je dichter D an 2 ist. Mit räumlichen Gittern kann man auch Boxdimensionen von fraktalen Körpern (Schwämmen, Riffen, Wolken, Baumkronen, Lungen,..) bestimmen.

↓ · 3



Fraktale Box-Dimension D Grundlage des Messverfahrens

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt

1992, Apr. 2005

1.3.0

Gemessen wird bei einer bestimmten Gitterweite w die Zahl m der Kästchen, die vom Fraktal getroffen werden. Es gilt die Gesetzmäßigkeit

$$m_{eng} = m_{weit} \cdot k^D$$

Hat man mehr als zwei Messungen, so ist es sinnvoll, sie gemeinsam graphisch auszuwerten. Dazu braucht man eine Bezugsgröße g , interpretierbar als Pixelbreite des Fraktals.

Aus dem Bild rechts ist (mit Operatoren) direkt ablesbar:

$$k = k_{eng} \cdot \frac{1}{k_{weit}} = \frac{g}{w_{eng}} \cdot \frac{w_{weit}}{g} = \frac{w_{weit}}{w_{eng}}$$

$$m_{eng} = m_{weit} \cdot \left(\frac{k_{eng}}{k_{weit}} \right)^D$$

also $\frac{m_{eng}}{k_{eng}^D} = \frac{m_{weit}}{k_{weit}^D} = \frac{1}{1} = 1$ Die beiden Einsen in dem Bruch beziehen sich darauf, dass

man als weites Raster auch den unteren Kasten nehmen kann. Ein Kasten, der von dem Fraktal getroffen wird, Streckfaktor 1 auf sich selbst.

Damit ist die Kennzeichnung von *eng* und *weit* unnötig geworden. Der Streckfaktor von der

Rasterweite auf die ganze Weite g sei nun k_{ganz} . Dann gilt: $m = k^D = \left(\frac{g}{w} \right)^D$

Dies ist in doppelt-logarithmischer Auftragung eine Ursprungsgerade. Die Gleichung ist aber streng genommen nur richtig für $m \rightarrow \infty$ bei dem wahren Fraktal. Es zeigt sich auch, dass wirklich erzeugte Messpunkte zwar mit erfreulicher Genauigkeit in doppelt-logarithmischer Darstellung auf einer Geraden liegen, jedoch nicht auf einer Ursprungsgeraden. Dieses Verhalten kann man erklären und merkt dabei, dass die Steigung dieser Geraden aber weiterhin D ist. (s.u.)

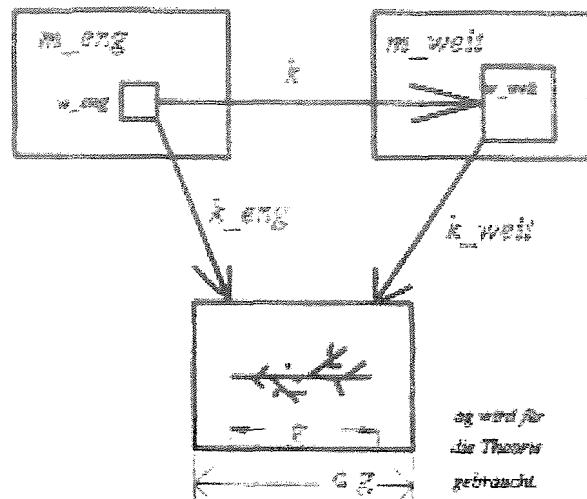
Durchführung der Messung:

- ① Zähle auf dem Blatt mit dem gerasterten Fraktal sorgfältig, wie viele Kästchen von dem Fraktal "betreten" werden.
- ② Bestimme eine Bezugsgröße g . Eins der Raster mit Weite W sei K Kästchen breit. Dann ist $g=K \cdot W$.
- ③ Lege eine Tabelle an:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|------------------|------------------------------|-----|-----------------|
| Weite | g/Weite | $\text{Log}(g/\text{Weite})$ | m | $\text{Log } m$ |
| 36 | $630/36=17,5$ | 1,243 | 96 | 1,9822 |

Weiterführen für alle Messungen an diesem Fraktal

- ④ Trage die Wertepaare aus den Spalten 3 und 5 in einem Koordinatensystem ein.
- ⑤ Lege mit Augenmaß eine Ausgleichsgerade durch die Punkte. Bestimme ihre Steigung durch Einzeichnung eines Steigungsdreiecks.
- ⑥ Die Steigung ist der gesuchte Messwert für die Boxdimension des Fraktals.
- ⑦ Grenzen des Verfahrens: a) Die Gitterweite muss deutlich kleiner als das Fraktal, aber größer als die kleinste Schrittweite des Fraktals bei dieser Stufe sein.
b) Gezeichnet ist nie das wahre Fraktal, sondern eine Stufe. Diese muss schon wesentliche Merkmale des wahren Fraktals aufweisen.
c) Die zufällige Lage des Fraktals im Raster erzeugt Schwankungen der Messpunkte.



Fraktale Messung der Boxdimension durch Vergleich zweier Bilder 1.3.12

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/math/lehramt

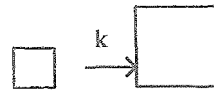
1992, Apr. 2005

Hat man nur zwei gerasterte Fraktalbilder, so lohnt sich die logarithmische Auftragung nicht. Die Boxdimension D lässt sich aus der (gedachten) Steigung bestimmen, die dann mit folgender Formel zu berechnen ist:

k = Streckfaktor von kleinen Gitterkaro auf das große Gitterkaro

m = Anzahl der getroffenen Karos im engen Gitter

n = Anzahl der getroffenen Karos im weiten Gitter



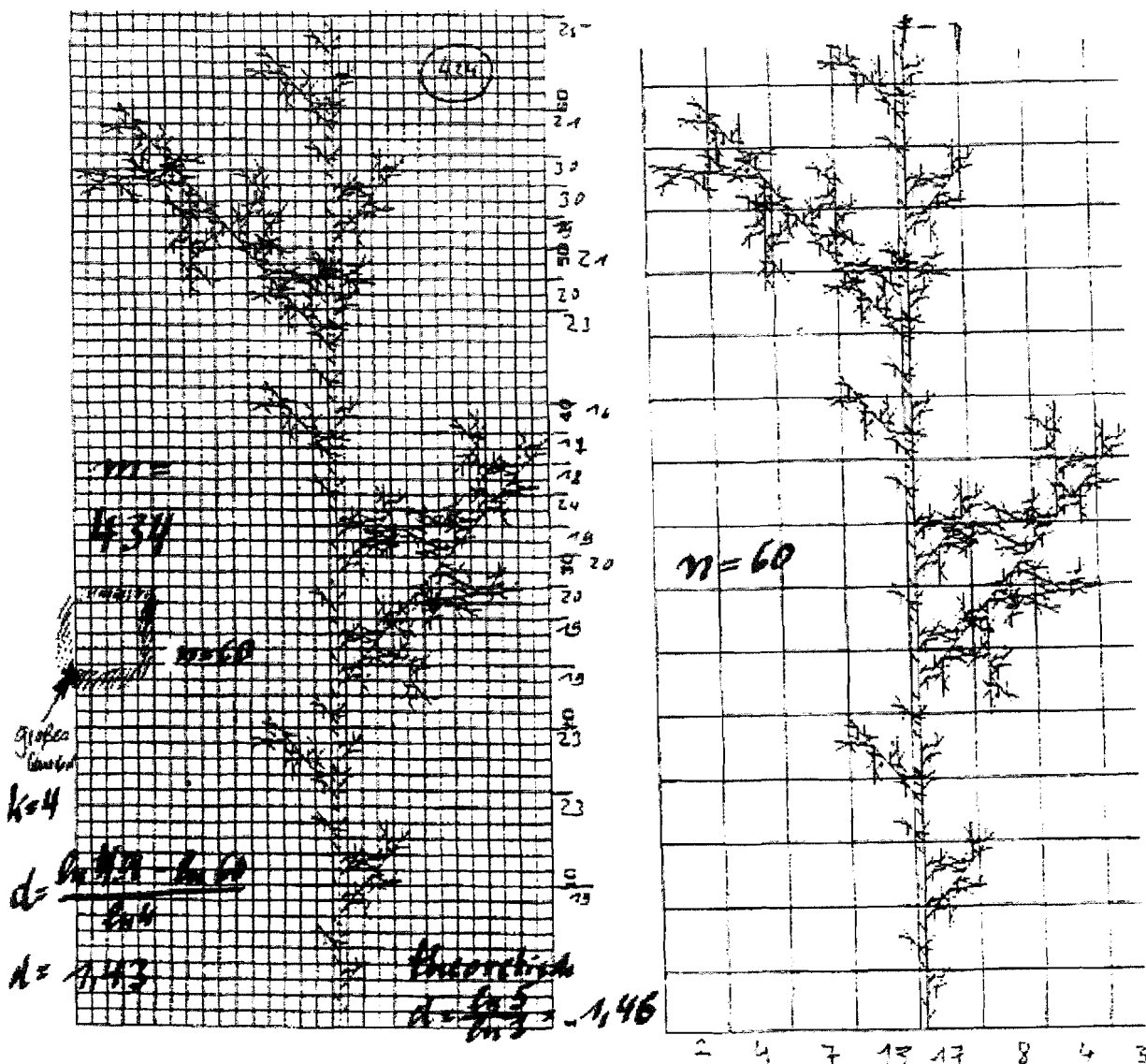
Boxdimension

$$D = \frac{\log m - \log n}{\log k}$$

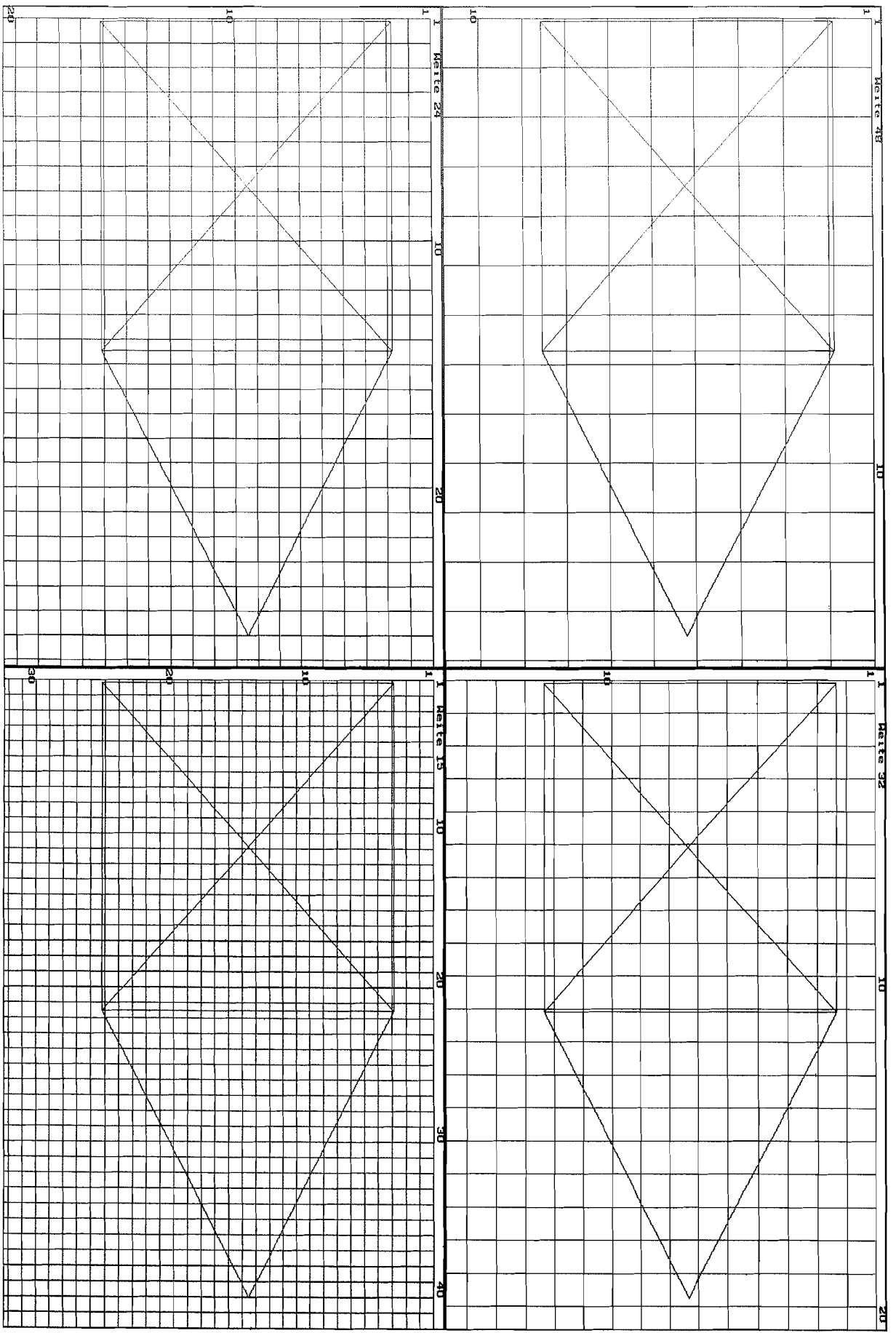
Hier: $D = \frac{\log m - \log n}{\log k} = \frac{\log 434 - \log 60}{\log 4} = 1,43.$

Die Selbstähnlichkeitsdimension ist in diesem Fall:

$$d = \frac{\log z}{\log k'} = \frac{\log 5}{\log 3} = 1,46.$$



1.3.07



Nikolaus

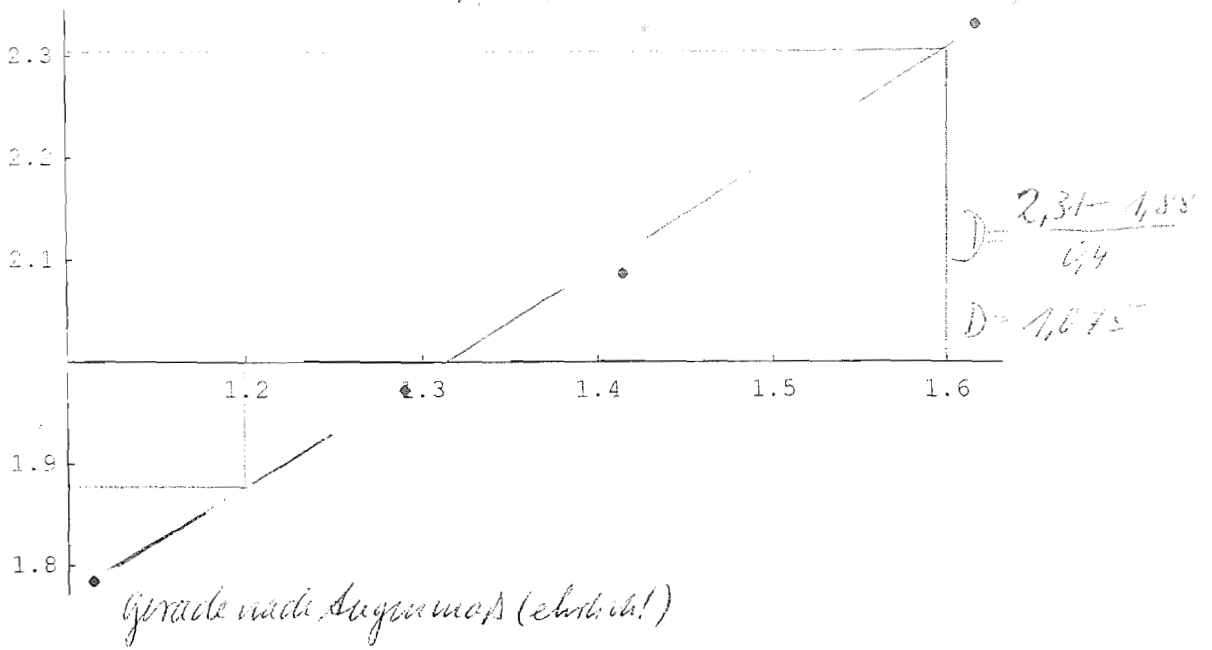
Zähle, wieviele Karos von der Linie getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension Ha 95

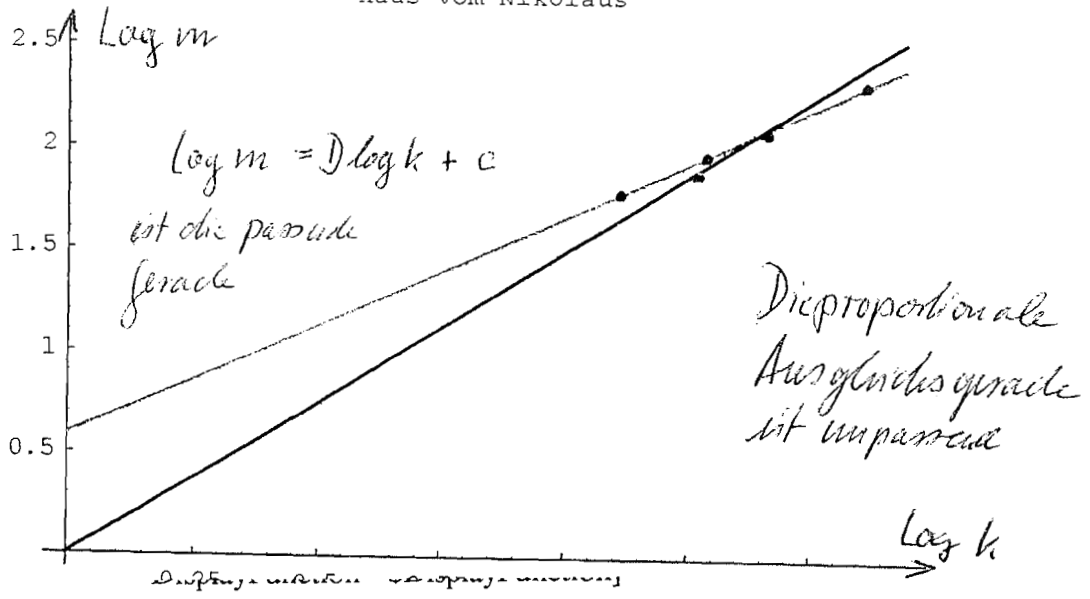
dopLgPunkte=ListPlot[dopLgDaten]

Mitlerweile (2. m)

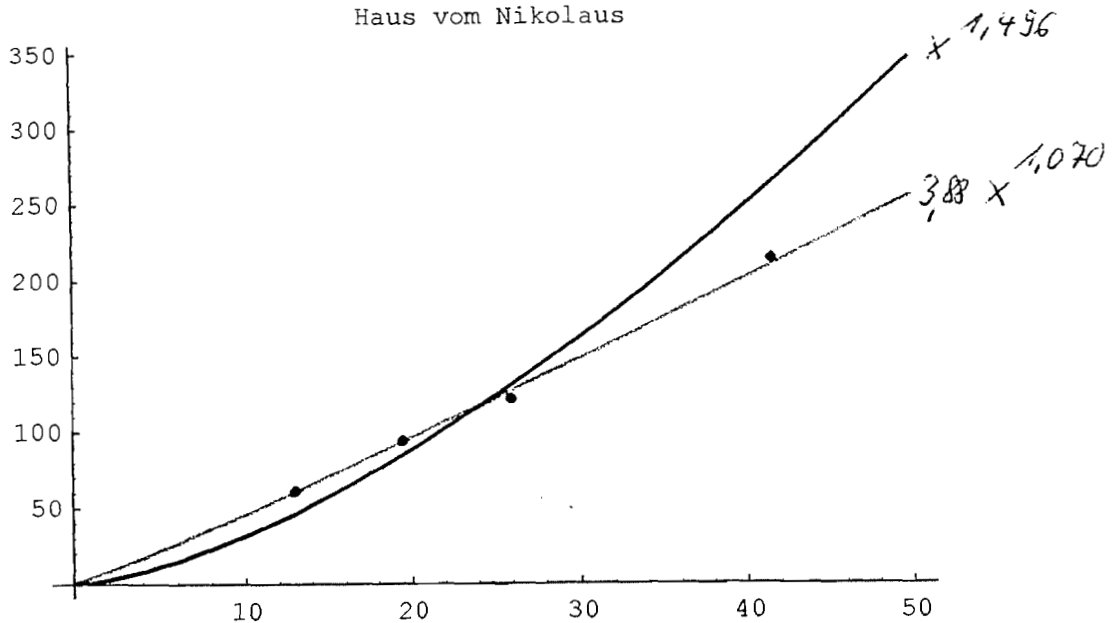
1.3.18



Haus vom Nikolaus

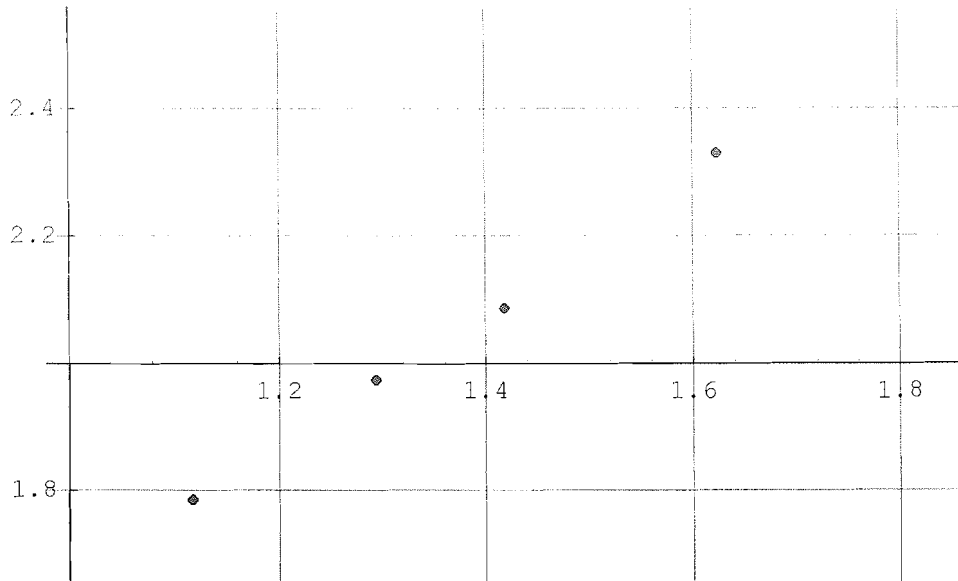


Haus vom Nikolaus

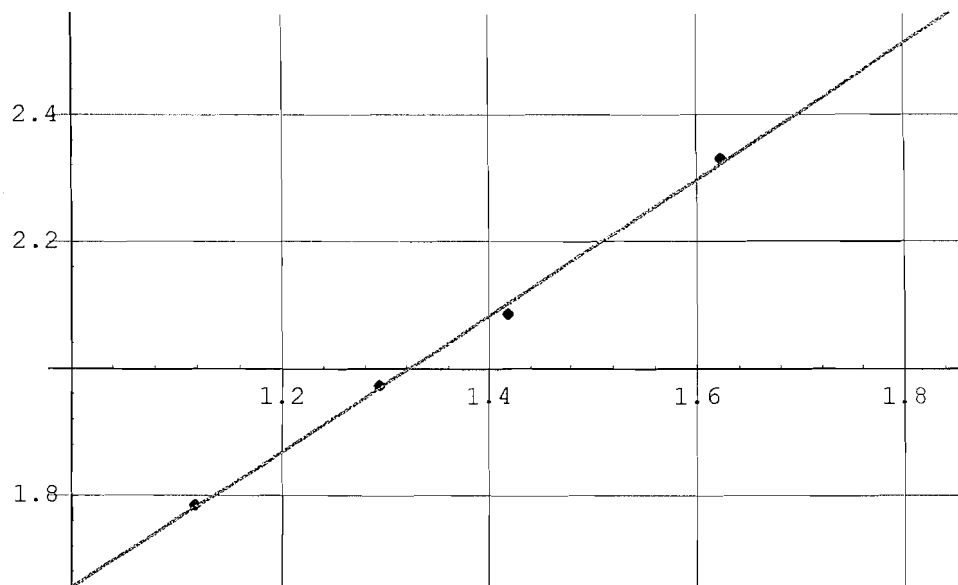


1.3.59

Haus des Nikolaus



Haus des Nikolaus



Out[65]=

Gesamtmaß: K = 35 W = 18 g = 630

Out[66]//MatrixForm=

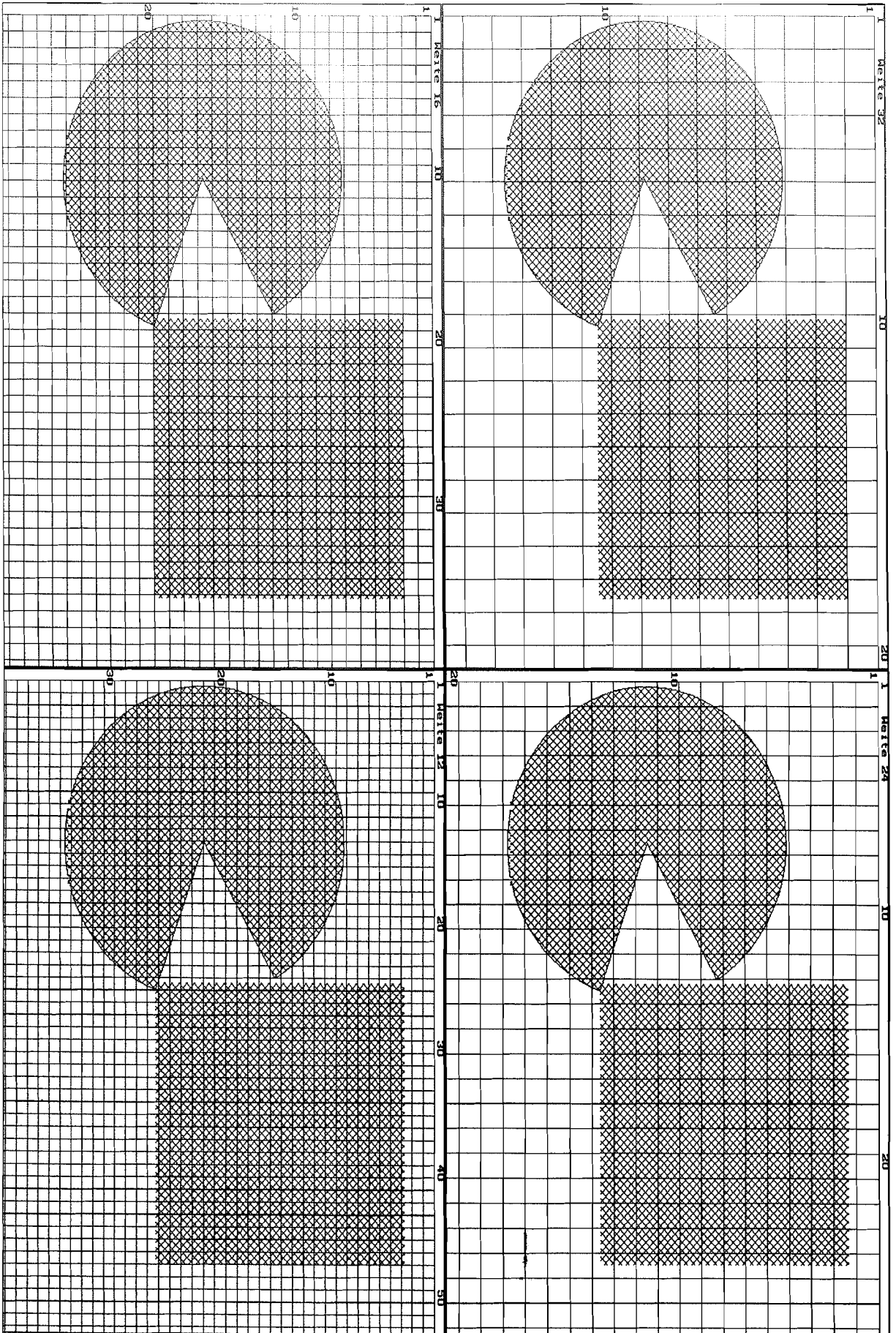
| | | | |
|----------------------|-----------------------|---------------------|-------------------|
| ⁴⁰ 13.125 | ³⁴ 19.6875 | ²⁴ 26.25 | ¹⁶ 42. |
| 61. | 94. | 122. | 214. |

| | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| 1.1181 | 1.29419 | 1.41913 | 1.62325 |
| 1.78533 | 1.97313 | 2.08636 | 2.33041 |

Out[67]=

0.584065 + 1.07045 x

Die Steigung dieser Geraden ist eine Näherung für die Boxdimension.

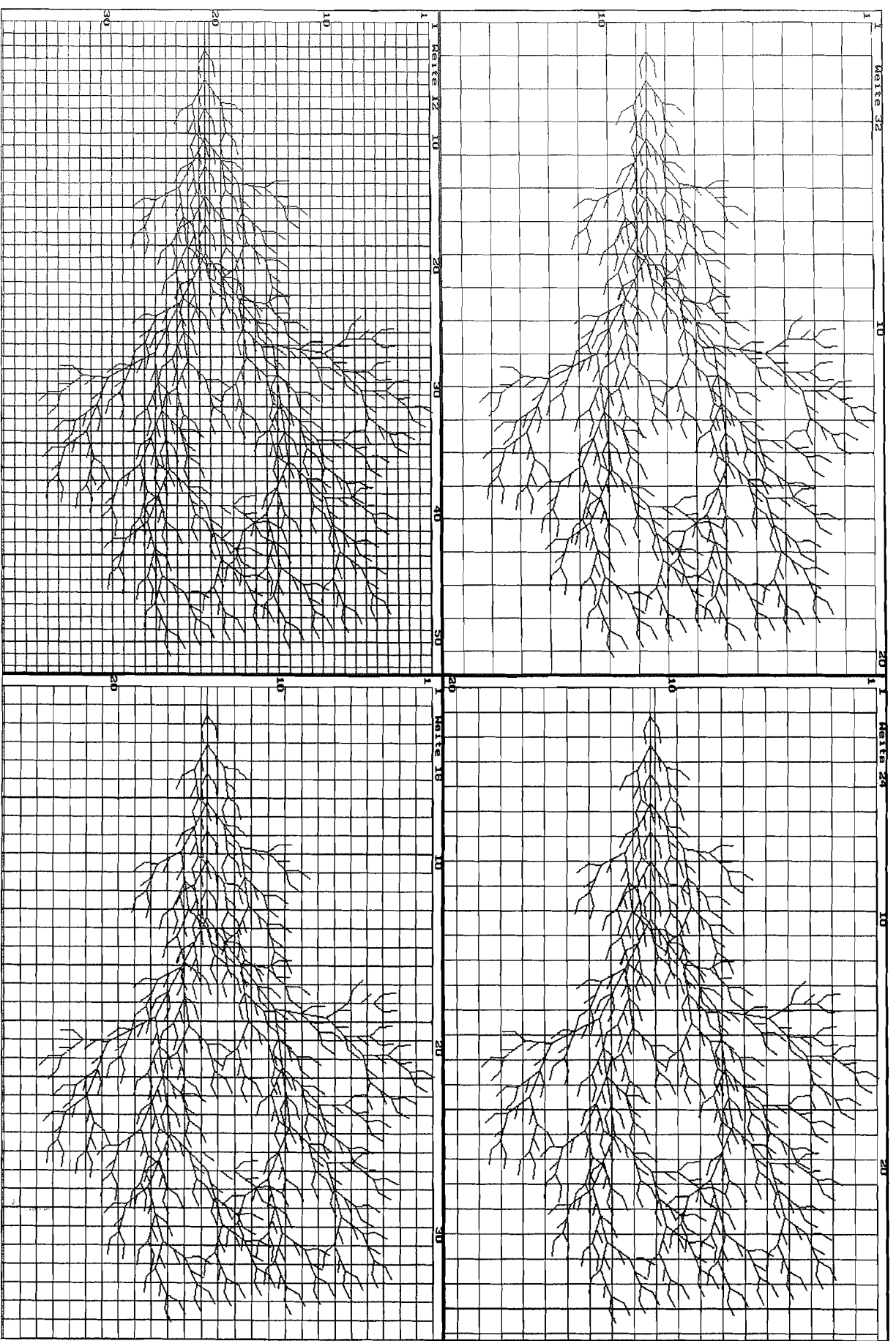


Fläche

Zähle, wieviele Karos von der Fläche getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension Ha 95

1.3.11



Busch 4

Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension H_a 95

C

In[39]:

xmax=60; ymax=800; name="Busch 4";

○ Achtung, bei Änderung der Daten hier Zeichenbereiche anpassen und Überschrift ändern. 2.3.02

In[40]:

Lg[x_] := Log[10,x]

In[41]:

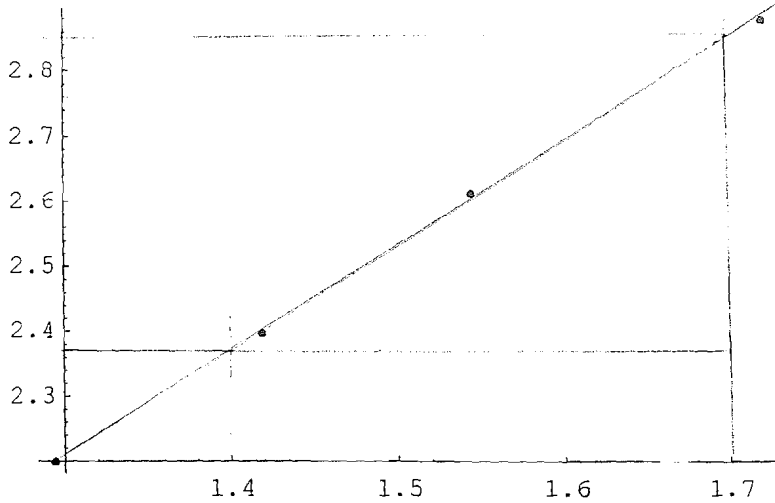
dopLgDaten = N[Map[Lg, daten]]

Out[41]:

{{1.29419, 2.19866}, {1.41913, 2.39794}, {1.54407, 2.61172},
{1.72016, 2.87795}}

In[42]:

dopLgPunkte = ListPlot[dopLgDaten]



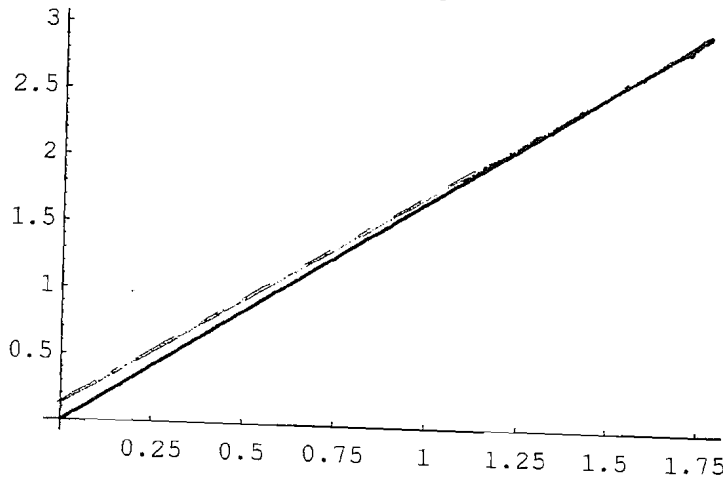
$$m = \frac{2,88 - 2,37}{0,3} = \frac{0,51}{0,3} = \underline{\underline{1,60}}$$

Oliver Hofer!!
das ist der
Wert der
mitt-prop.-geraden

Out[42]:

-Graphics-

Busch 4



Out[46]:

-Graphics-

In[47]:

```
d=gerade[[2,1]];
a=Power[10,gerade[[1]]/d];
dprop=geradeprop[[1]];
fkt=Power[a x,d]
fktprop=Power[x,dprop]
```

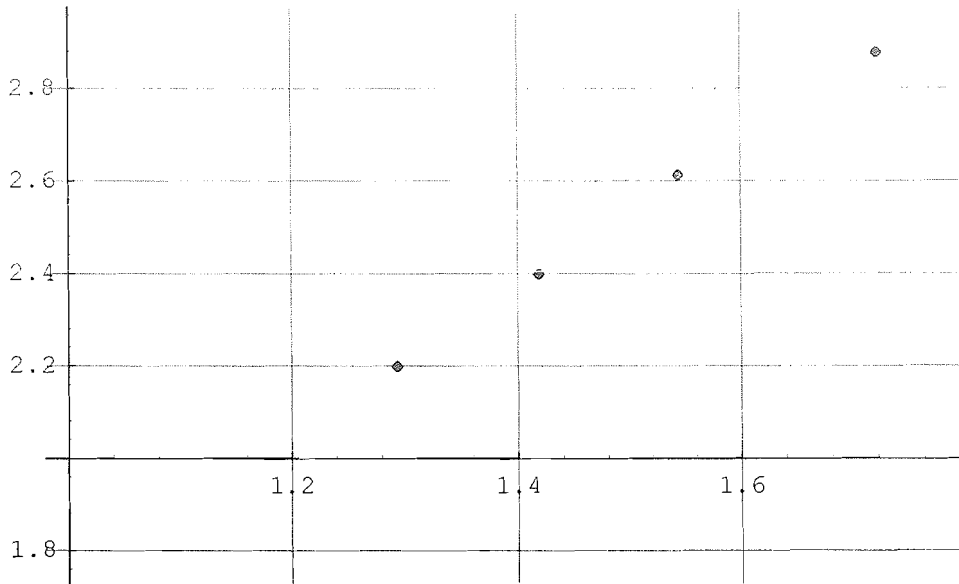
Out[50]:

1.34155 x 1.60197

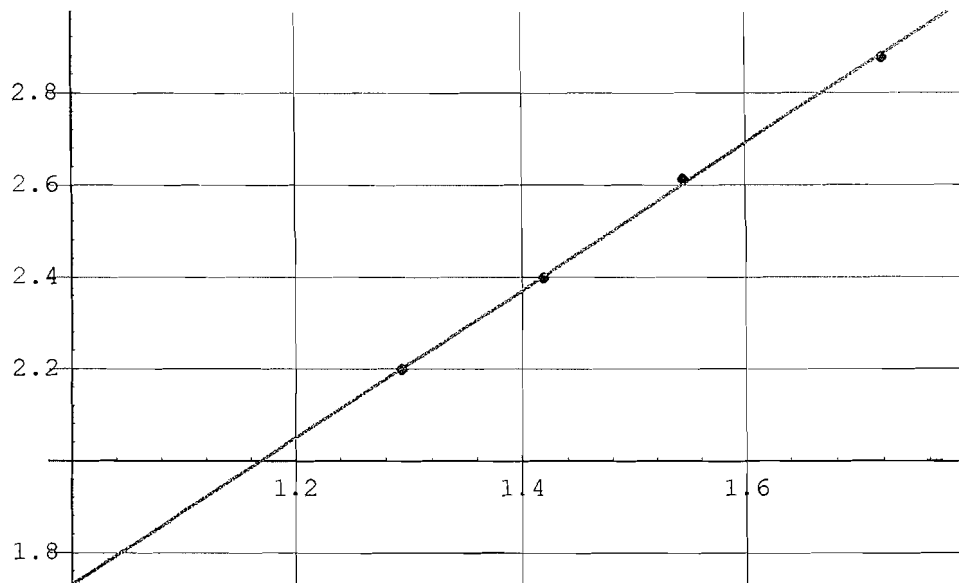
Out[51]:

1.68642
x

Busch 4



Busch 4



Out[403]==

Gesamtmaß: K = 35 W = 18 g = 630 Umrechnung k = 630: Weite

Out[404]//MatrixForm==

| | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| 32 | 24 | 18 | 12 |
| 158 | 250 | 409 | 755 |
| 19.6875 | 26.25 | 35. | 52.5 |
| 158. | 250. | 409. | 755. |
| 1.29419 | 1.41913 | 1.54407 | 1.72016 |
| 2.19866 | 2.39794 | 2.61172 | 2.87795 |

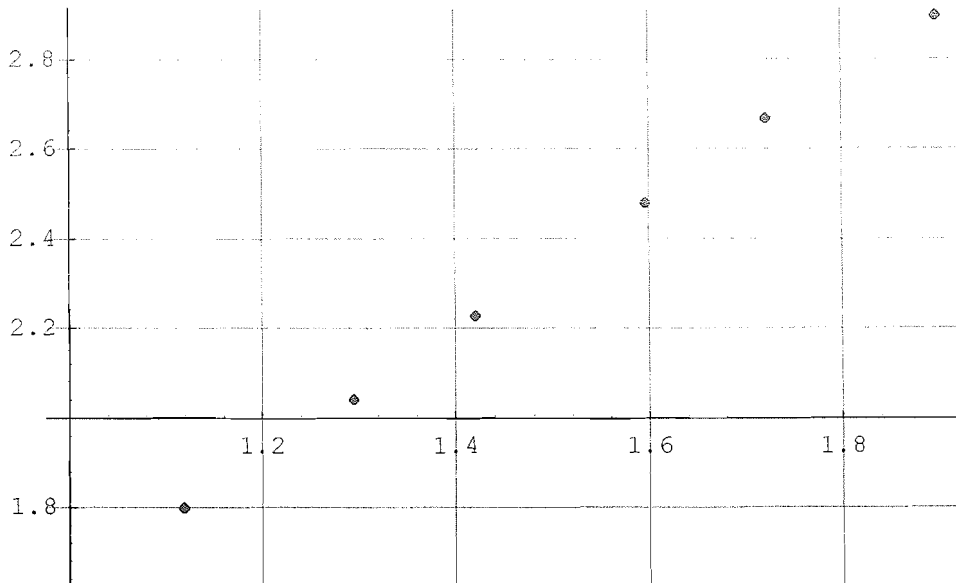
Out[405]=

0.127607 + 1.60197 x

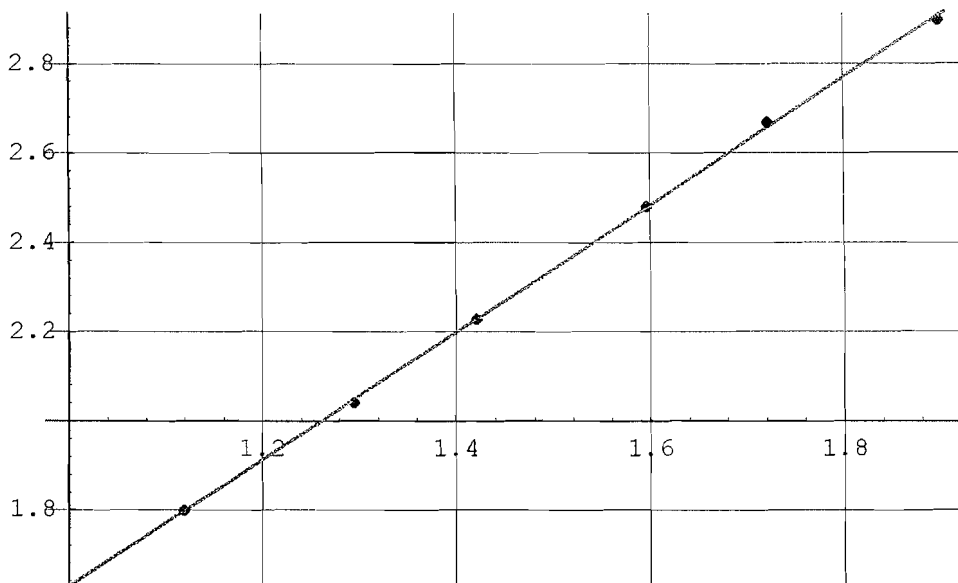
Die Steigung dieser Geraden ist eine Näherung für die Boxdimension.

7.3.12

5 ; Dolde f



5 ; Dolde f



StringForm["Gesamtmaß: K =` W =` g =` Umrechnung k =`: Weite",K,W,g,g]

MatrixForm[{rohDaten,daten,dopLgDaten}]

gerade

Out[787]=

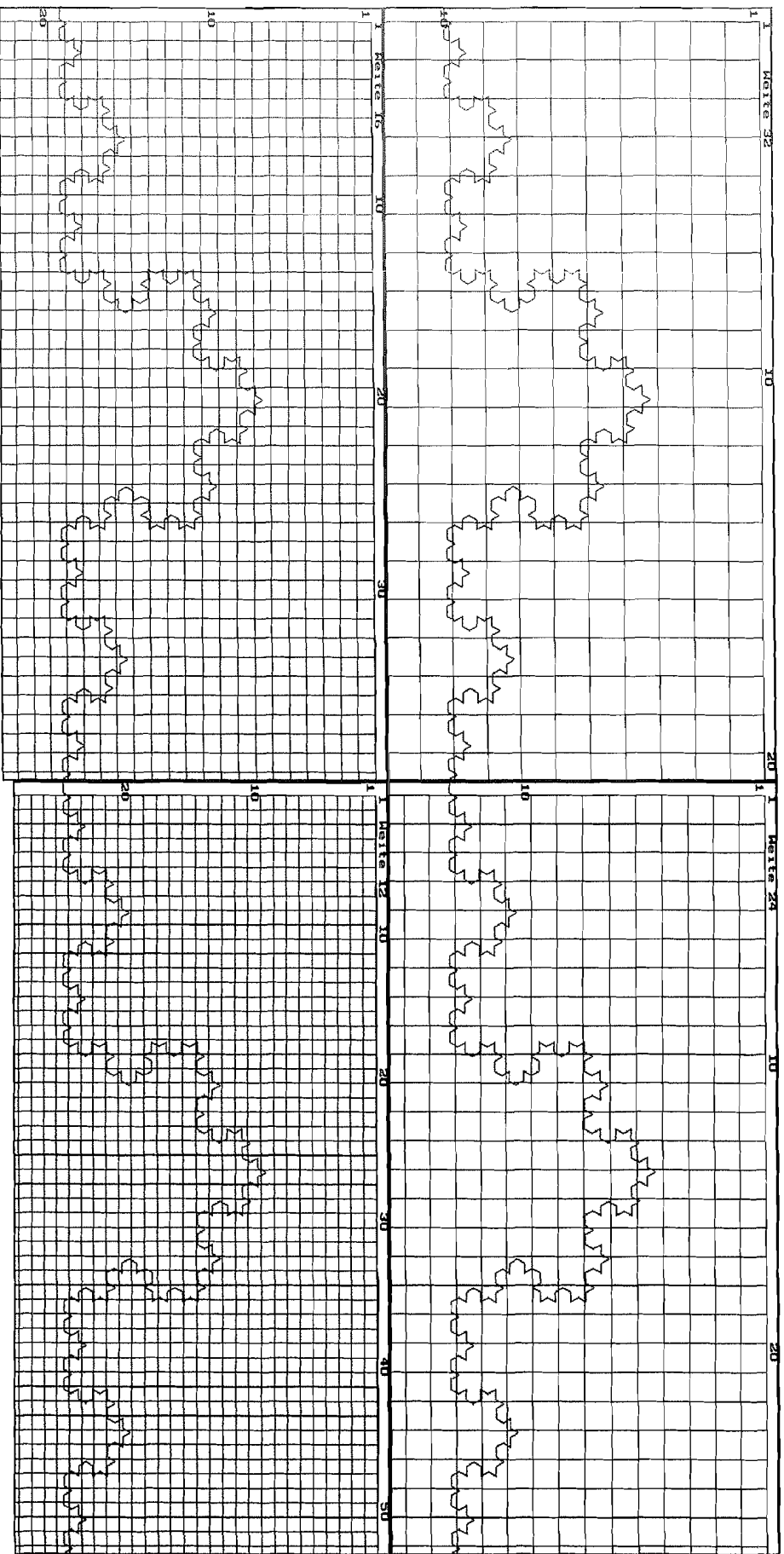
Gesamtmaß: K =79 W = 8 g = 632 Umrechnung k = 632: Weite

Out[788]//MatrixForm=

| | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 48 | 32 | 24 | 16 | 12 | 8 |
| 63 | 110 | 169 | 302 | 465 | 788 |
| 13.1667 | 19.75 | 26.3333 | 39.5 | 52.6667 | 79. |
| 63. | 110. | 169. | 302. | 465. | 788. |
| 1.11948 | 1.29557 | 1.42051 | 1.5966 | 1.72154 | 1.89763 |
| 1.79934 | 2.04139 | 2.22789 | 2.48001 | 2.66745 | 2.89653 |

Out[789]=

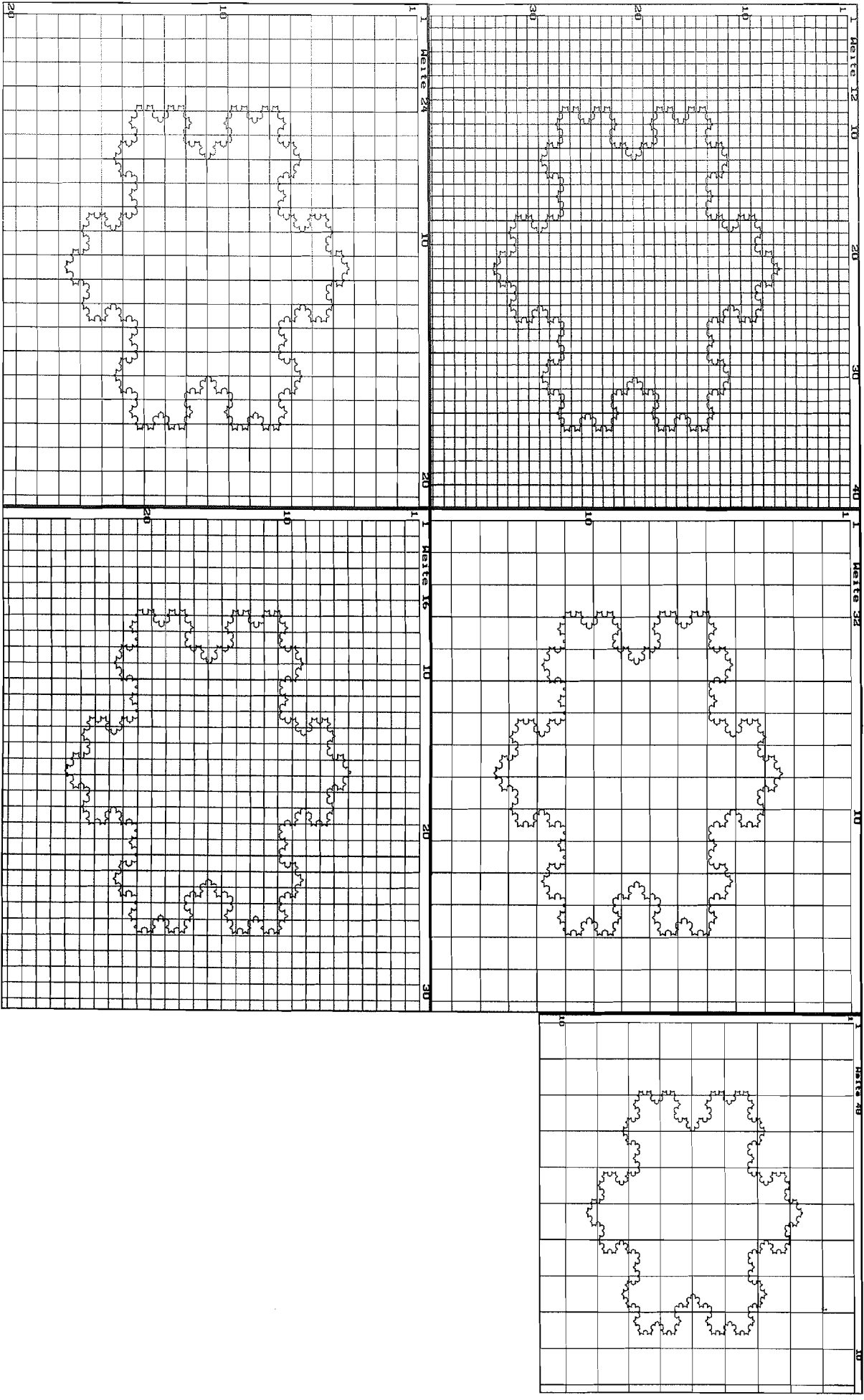
0.203821 + 1.42407 x



Kochkurve 4

Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden.

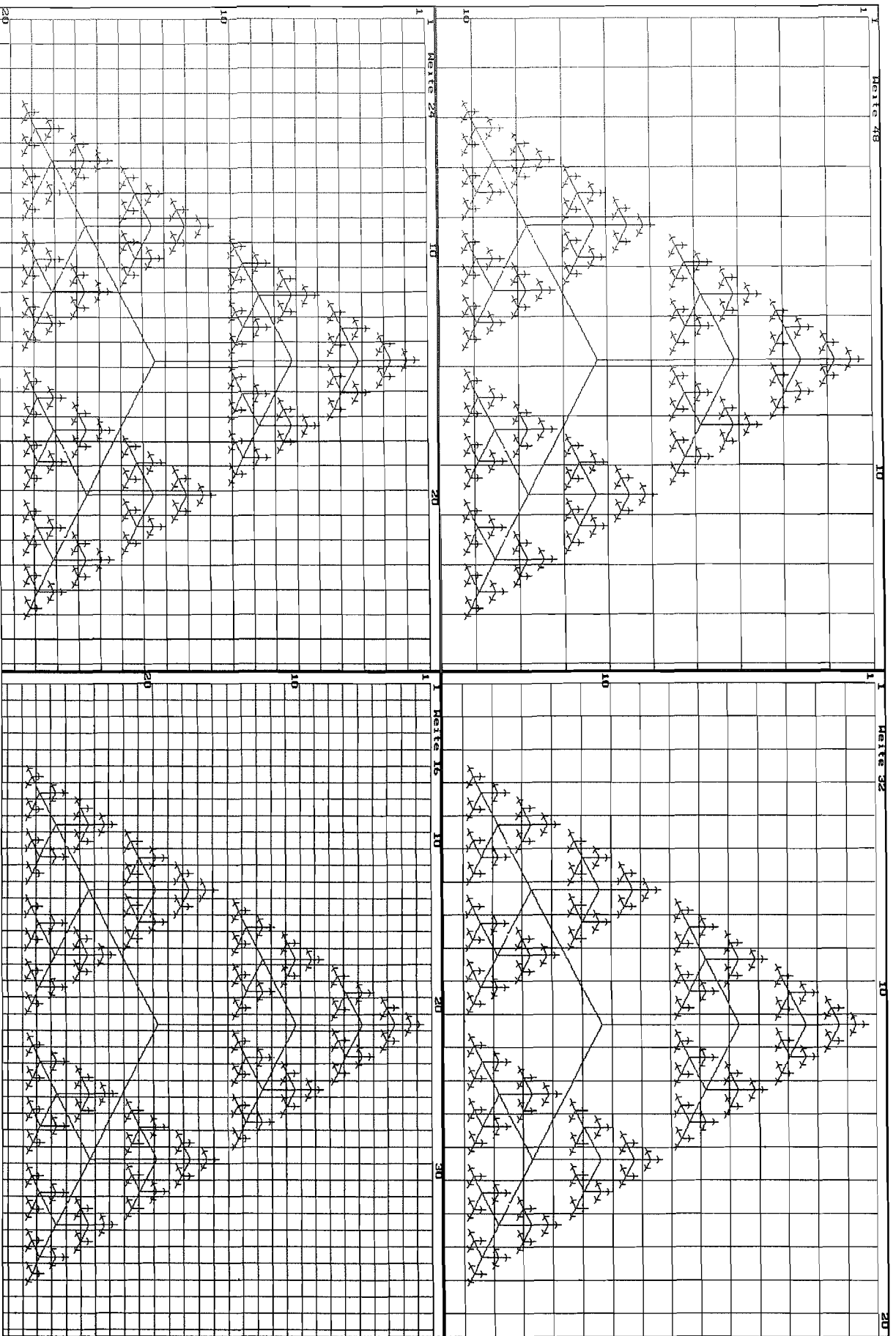
Bestimmung der Boxdimension H_a 95



Schneeflocke 4

Zähle, wieviele Karos von der *Reihe* getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension H_{\square} 95

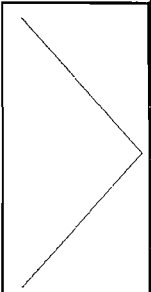
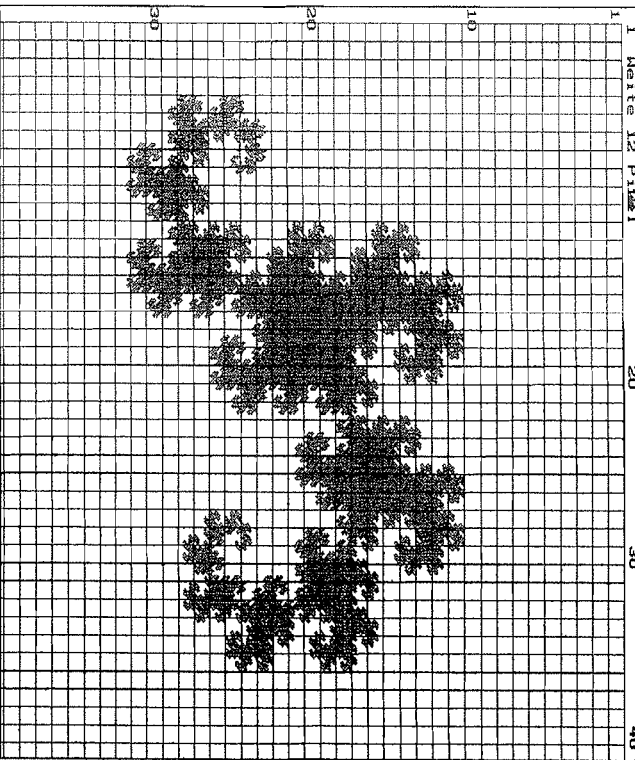
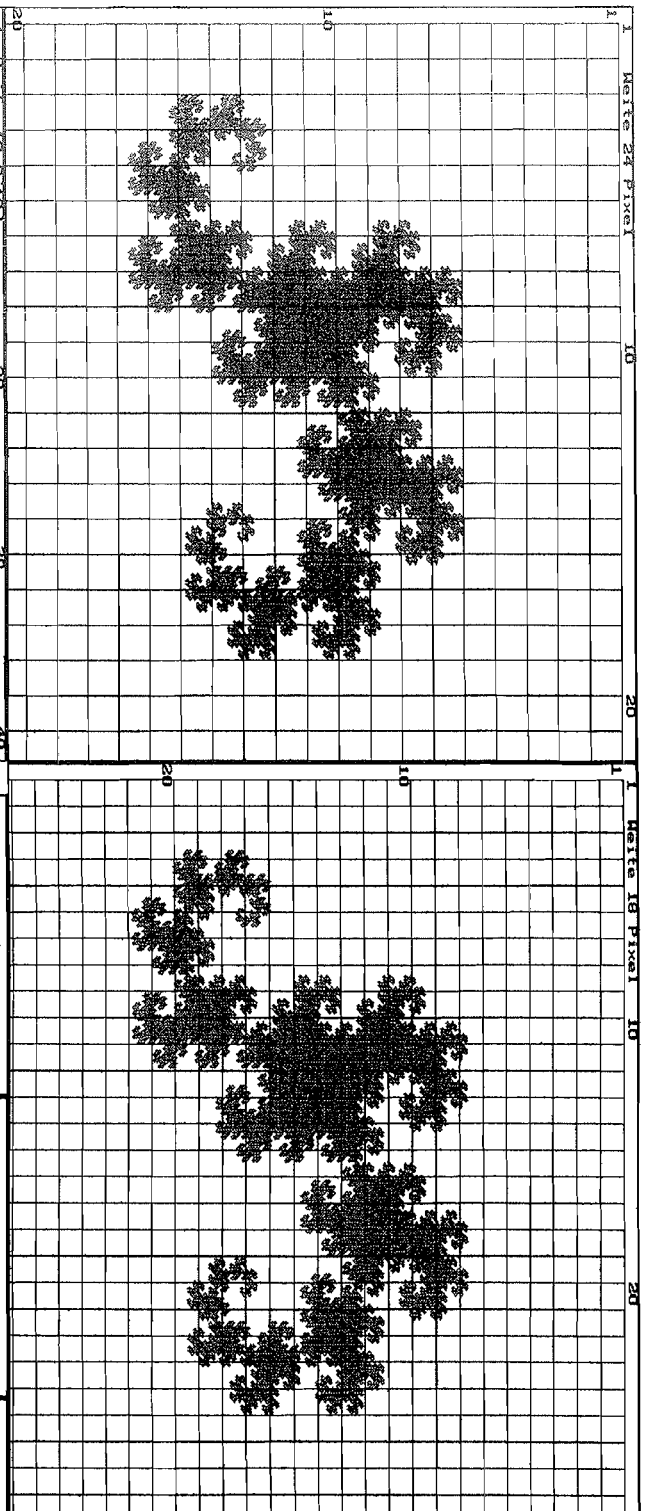


Ternärer Baum 6

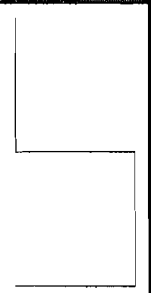
Zähle, wieviele Karos von dem ~~Linie~~ getroffen werden.

Fractal

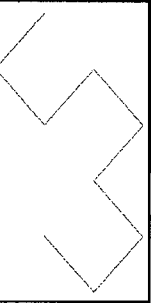
Bestimmung der Boxdimension Ha 95



Stufe 1



Stufe 2



Stufe 3

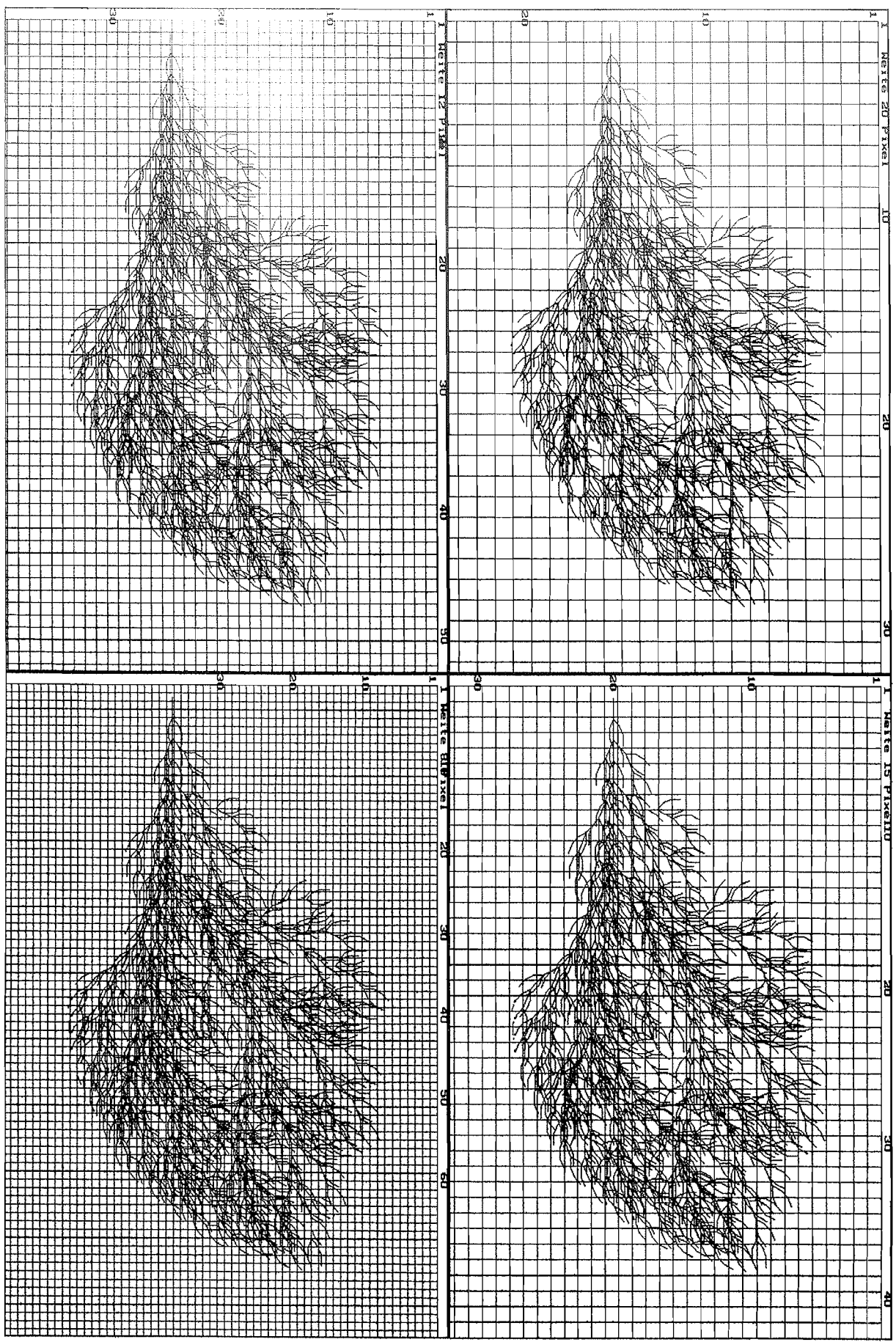
Kennst du das Drachenfraktal aus dem spannenden Buch **Dinopark** von Michael Crichton ?

Am Anfang eines jeden Kapitels ist es um eine Stufe mehr gezeichnet. Es hat 7 Kapitel, dies aber ist die 15. Stufe.

Drachen 15

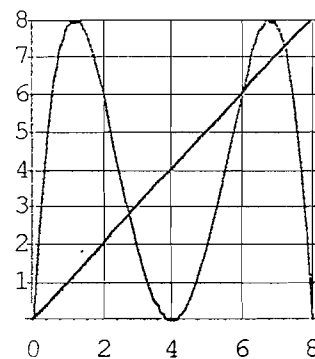
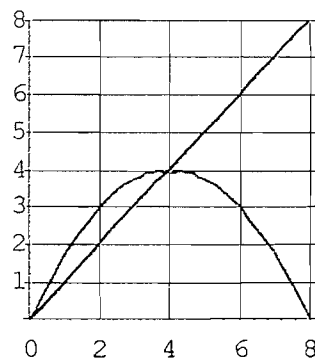
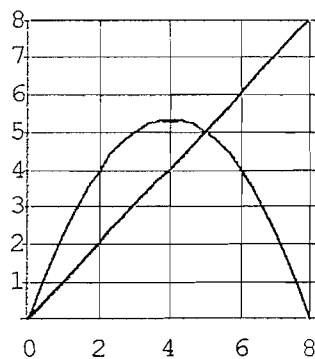
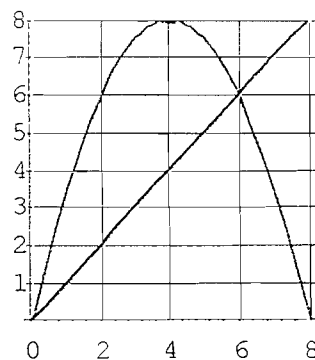
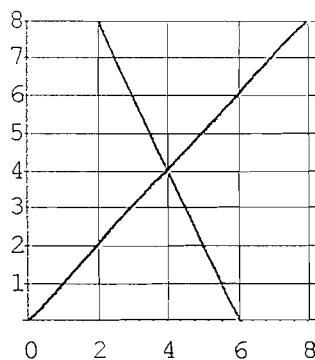
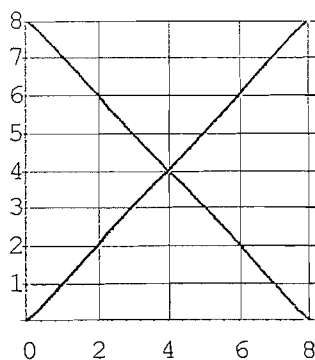
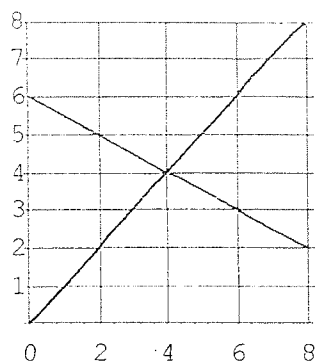
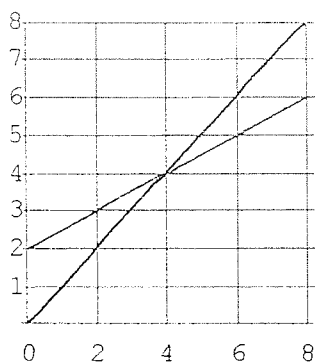
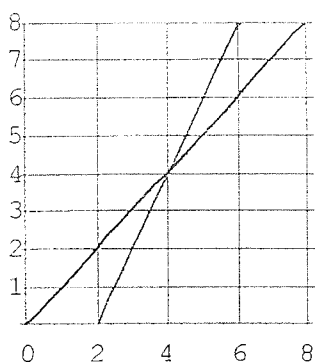
Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension Ha 95



Wedel (Lindenmayer) 4

Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden. Bestimmung der Boxdimension H_a 95



| | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--|
| $f_1(x) = 2x - 4$ | $f_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$ | $f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 6$ |
| $f_4(x) = -x + 8$ | $f_5(x) = -2x + 12$ | $f_6(x) = \frac{1}{2}x(8 - x)$ |
| $f_7(x) = \frac{1}{3}x(8 - x)$ | $f_8(x) = \frac{1}{4}x(8 - x)$ | $f_9(x) = \frac{1}{2}f_6(x)(8 - f_6(x))$ |

Gezeichnet sind die **Trägerfunktionen** für entsprechende **rekursiv definierte Folgen**.

Es gilt $a_{n+1} = f(a_n)$. Als Startwert a_0 kann jeder Wert genommen werden. In diesen Zeichnungen sollte er zwischen 0 und 8 liegen.

Zeichnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0 . Wiederhole oft:

senkrecht zur Kurve, waagrecht zur Winkelhalbierenden

Rechnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0 . Berechne a_1 mit der Formel, notiere und speichere a_1 . Berechne a_2 mit der Formel, notiere und speichere a_2 . Und so weiter.

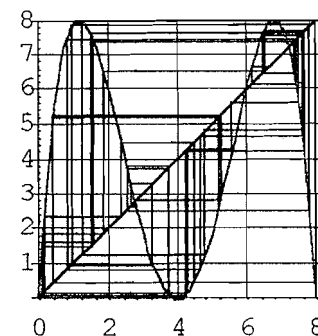
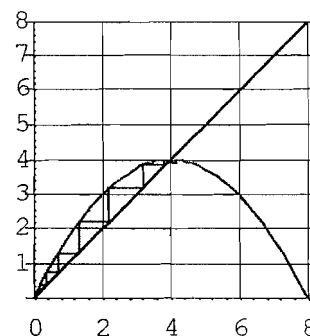
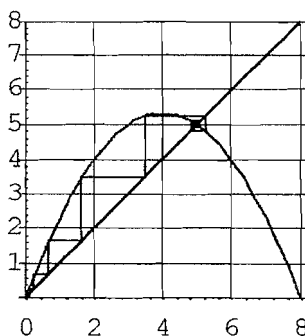
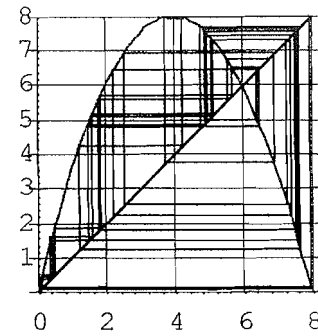
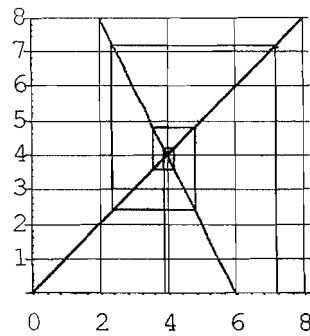
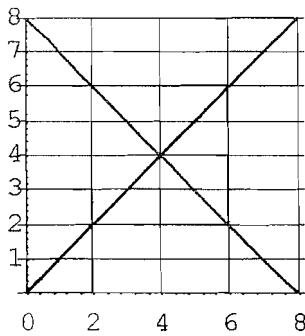
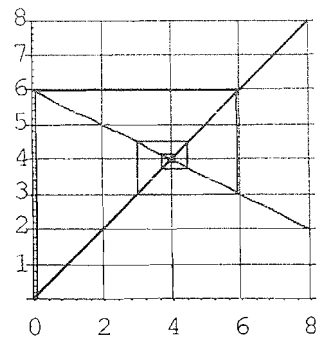
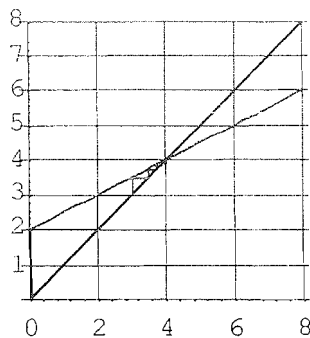
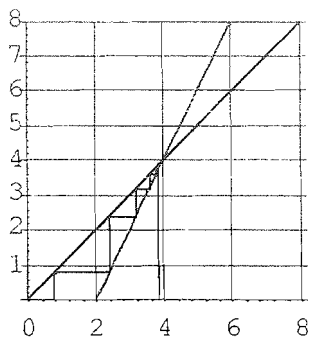
Chaos und Fraktale ▶▶ Rekursion ◀◀

2.1.92

Dr. Dörte Haftendorn

Erste Erfahrungen, Lösungen

21. November 1996



| | | |
|--|--|--|
| $a_{n+1} = f_1(a_n) = 2a_n - 4$ | $a_{n+1} = f_2(a_n) = \frac{1}{2}a_n + 2$ | $a_{n+1} = f_3(a_n) = -\frac{1}{2}a_n + 6$ |
| $a_{n+1} = f_4(a_n) = -a_n + 8$ | $a_{n+1} = f_5(a_n) = -2a_n + 12$ | $a_{n+1} = f_6(a_n) = \frac{1}{2}a_n(8 - a_n)$ |
| $a_{n+1} = f_7(a_n) = \frac{1}{3}a_n(8 - a_n)$ | $a_{n+1} = f_8(a_n) = \frac{1}{4}a_n(8 - a_n)$ | $a_{n+1} = f_9(a_n) = \frac{1}{4}f_6(a_n)(8 - f_6(a_n))$ |

- {f1, {3.9, 3.8, 3.6, 3.2, 2.4, 0.8, -2.4, -8.8}},
- {f2, {0.1, 2.05, 3.025, 3.5125, 3.75625, 3.87812, 3.93906, 3.96953}},
- {f3, {0.1, 5.95, 3.025, 4.4875, 3.75625, 4.12187, 3.93906, 4.03047}},
- {f4, {0.1, 7.9, 0.1, 7.9, 0.1, 7.9, 0.1, 7.9}},
- {f5, {3.9, 4.2, 3.6, 4.8, 2.4, 7.2, -2.4, 16.8}},
- {f6, {0.1, 0.395, 1.50199, 4.87997, 7.61283, 1.47373, 4.80899, 7.67277}},
- {f7, {0.1, 0.263333, 0.679107, 1.65722, 3.5038, 5.25126, 4.81145, 5.11385}},
- {f8, {0.1, 0.1975, 0.385248, 0.733393, 1.33232, 2.22087, 3.20867, 3.84345}},
- {f9, {0.1, 1.50199, 7.61283, 4.80899, 1.25538, 7.97273, 0.428873, 5.17619}}

Definition: Eine Folge heißt

streng rekursiv,

wenn $a_n = f(a_{n-1})$ gilt.

f soll sonst nur Konstanten enthalten.

Jedes gegebene a_0 definiert zusammen mit der rekursiven Formel eine neue Folge. Dann gibt es die

Trägerfunktion f der Folge, deren Funktionsterm durch Einsetzen von x anstelle der Folgenglieder entsteht.

a ist Fixpunkt, wenn gilt $a=f(a)$

Der Fixpunkt a ist

anziehend, wenn gilt $|f'(a)| < 1$

unklarer Art, wenn gilt $|f'(a)| = 1$

abstoßend, wenn gilt $|f'(a)| > 1$

Beispiel Logistische Parabel

$a_n = r \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1})$ hat die Trägerfunktion $f(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$

Sei $r > 0$. Wichtig ist das Intervall $[0,1]$. Startwerte sollen in diesem Intervall liegen.

Fragen:

- ① Welche Fixpunkte hat $\{a_n\}$?
- ② Welche Steigung hat f_r in den Fixpunkten?
- ③ Für welche r gibt es zwei / einen / keinen anziehenden Fixpunkt im Intervall $[0,1]$?
- ④ Für welches r hat die Parabel den maximalen Wert 1? Was bedeutet es für die Folge, wenn r noch größer wird?
- ⑤ g mit $g(x) = f(f(x)) = (f \otimes f)(x)$ heißt die zweifach Iterierte von f .
Welches ist die zweifach Iterierte der logistischen Parabel, welchen Graphen hat sie? (Z.B. für $r=3,5$) Untersuchen Sie möglichst mit CAS, (Computer-Algebra-System oder Graphikzeichner), welche Wirkung r auf die zweifach Iterierte hat und überlegen Sie, was das für die Folgen bedeutet.

Weitere Beispiele lassen sich leicht finden. Man braucht lediglich eine von einem Parameter abhängige Kurvenschar, die für irgendwelche Parameterwerte die Winkelhalbierende schneidet. Wenn dann die Steigung im Schnittpunkt sowohl Werte annimmt, die betragsmäßig kleiner 1 sind, als auch solche, die betragsmäßig größer als 1 sind, dann gibt es alle an der logistischen Parabel beobachteten Phänomene, insbesondere auch ein Attraktor-Diagramm (=Feigenbaum-Diagramm) mit Bifurkationskaskade. Das beste schulgemäße Werkzeug hierfür ist Turboplot www.turboplot.de, beschrieben auch in www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt. Insbesondere können Lernende selbst solche Kurven erfinden und erkunden. Besonders einfach sind Parabelscharen, aber auch Heron-Verfahren, rekursiv formulierte Schnittprobleme wie $x = r \cdot \cos(x)$ u.s.w.

Logistische Parabel

$$a_n = r \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1})$$

$$f(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$$

f ist die Trägerfunktion für die rekursive Folge a_n .

Die **logistische Gleichung** beschreibt viele Vorgänge in Natur und Technik. Insbesondere in der Biologie kann man a_n deuten als Bevölkerungszahl z.B. einer Mäusepopulation in einem begrenzten Lebensraum. Der Parameter r ist dann aus Geburten- und Sterberate zusammengesetzt, mit n ist die Zyklus-Zeit, etwa Wochen, gemeint. Die logistische Gleichung sagt dann aus, dass die Bevölkerungszahl proportional ist zum Produkt aus (momentaner) Bevölkerungszahl und "Abstand" von der Bevölkerungsgrenze.

Wie sich die Folge verhält, wird rechts auf zwei Arten dargestellt. Links ist a_n über a_{n-1} aufgetragen. Man nennt die Darstellung auch **Spinnwebverfahren**, Web-Darstellung, Phasendiagramm.

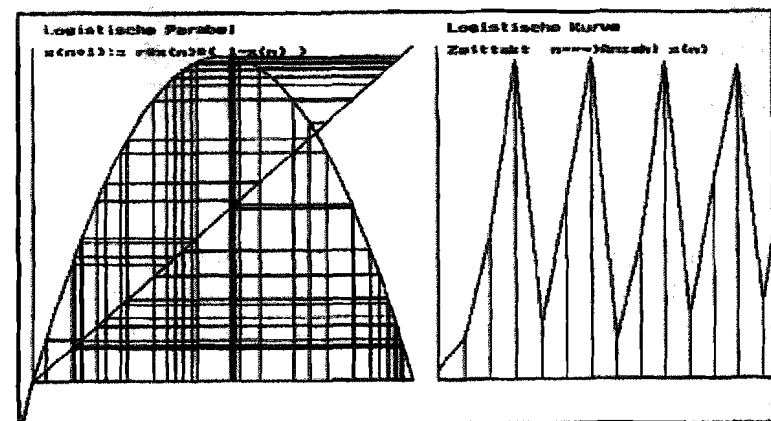
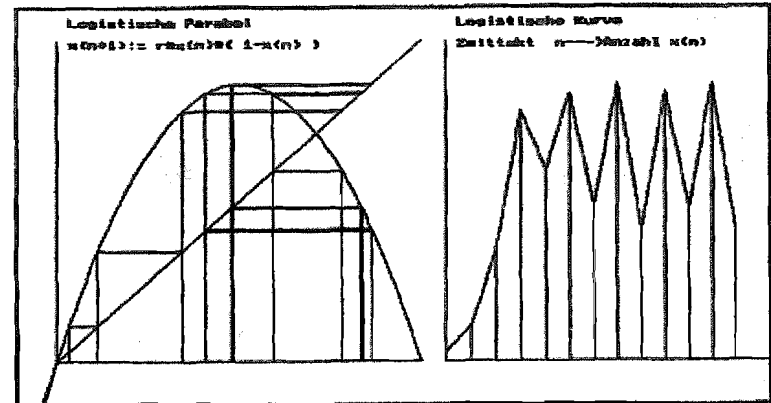
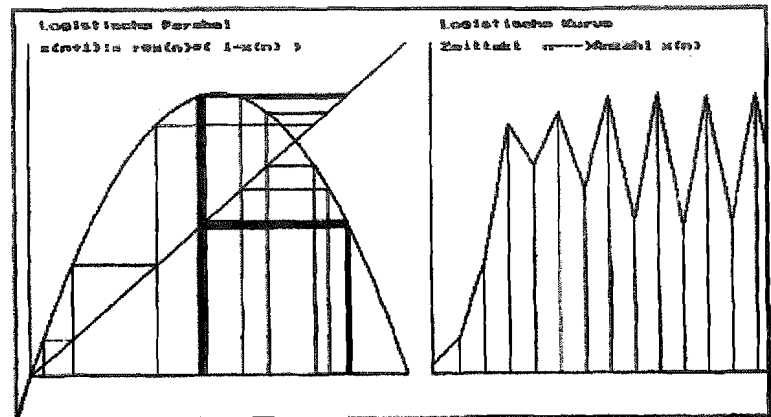
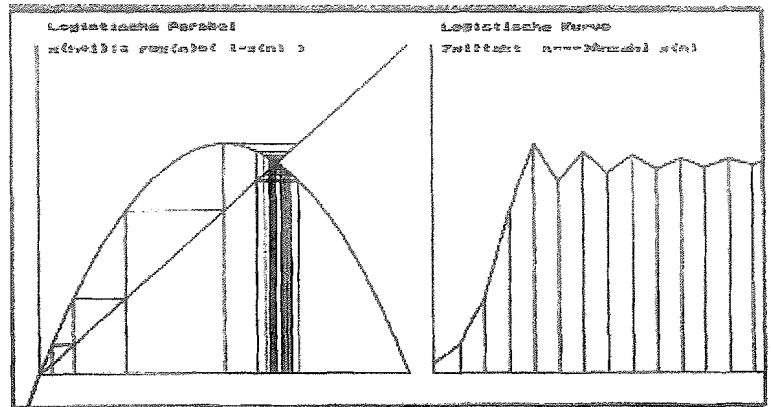
Man startet bei beliebigem a_0 und zeichnet immer abwechselnd senkrecht zur Kurve und waagrecht zur Winkelhalbierenden.

Rechts sind die so zustande gekommenen Bevölkerungszahlen über der Zeit n aufgetragen.

Das Verhalten der Folge wird im Wesentlichen von dem Parameter r beeinflusst.

Für $0 < r \leq 1$ konvergiert die Folge gegen 0. Für $1 < r \leq 3$ konvergiert die Folge gegen den rechten Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden. Er ist dann anziehender Fixpunkt. Das ist er nämlich genau solange, wie die Steigung von f im Schnittpunkt betragsmäßig kleiner ist als 1. Für $r \leq 1$ schneidet die Parabel rechts nicht.

Für $3 < r$ treten zuerst mehrere Häufungspunkte auf, ab $r=3,57$ verhält sich die Folge chaotisch.



$$f(x) = -a(x - 2)^2 + 4$$

Suchen Sie die gezeigten Eigenschaften zu beschreiben und mit Zahlen zu versehen. Erkunden Sie in Turboplot, rechnen Sie, was Sie können auch genau aus.

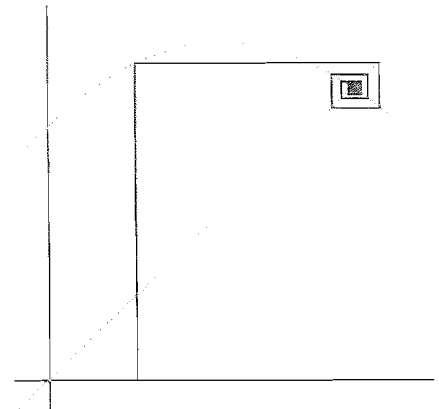


Abbildung 1

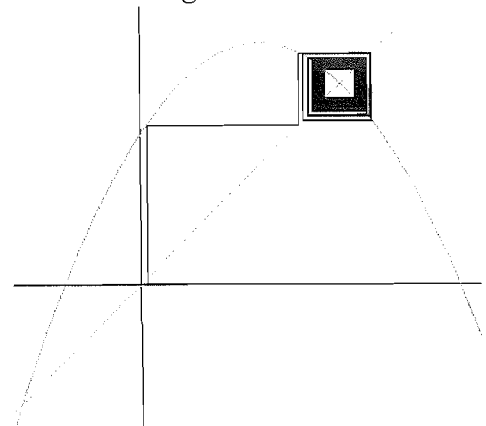


Abbildung 2

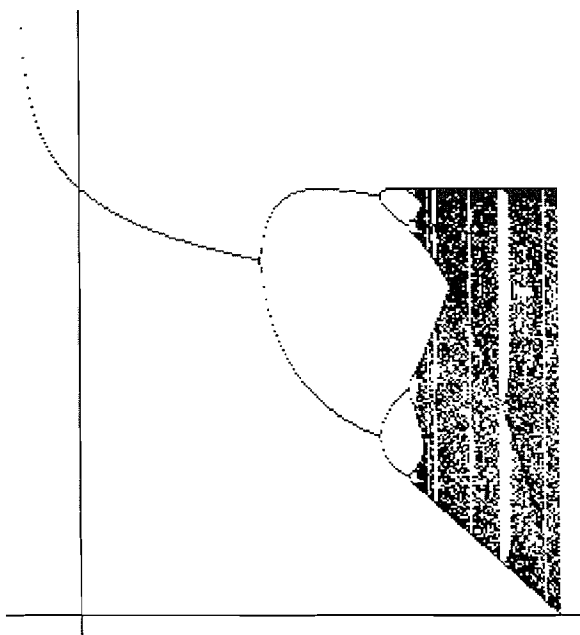


Abbildung 3

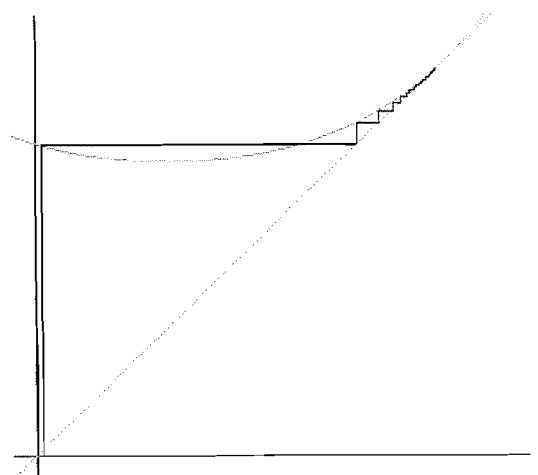


Abbildung 4

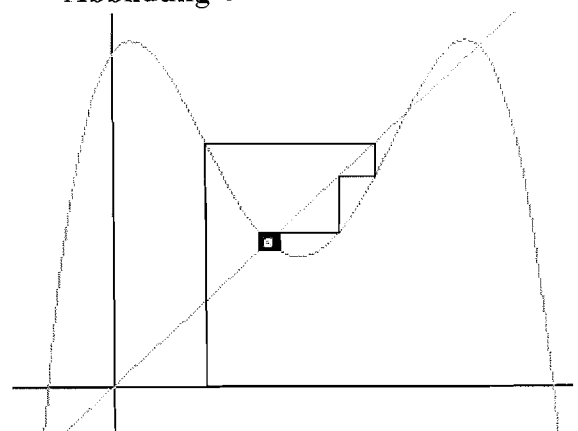


Abbildung 5

Das Feigenbaum-Szenario

wurde von Mitchel Feigenbaum in den 70-iger Jahren zuerst untersucht.

Auf der Hochachse ist von oben nach unten der Parameter r für die logistische Gleichung in einem vorher gewählten Bereich aufgetragen. Die Rechtsachse hat x -Werte zwischen 0 und 1.

Für jedes r aus dem Bereich entsteht eine Pixelzeile des Bildes. Es werden 100 Iterationen "m Dunkeln" gerechnet, für die nächsten 100 Iterationen wird ein Punkt in die Zeile gezeichnet. Wenn die Folge für dieses r konvergiert, sieht man nur das 200ste Pixel.

Beim oberen Bild geht r von 2,9 (oben) bis 4 (unten). Bei $r=3$ tritt die erste **Bifurkation** auf. Man sieht für die nun folgenden r das 199ste und 200ste Pixel. Es liegen zwei Häufungswerte vor, bis r auf 3,449489... angewachsen ist.

Diesen genauen Wert für r kann man aus den Schnitt-Steigungen der 2. Iterierten von f gewinnen.

Es folgt eine **Bifurkationskaskade**, das Verhältnis der r -Abstände konvergiert gegen eine mathematische universelle Konstante, die **Feigenbaum-Konstante** $\delta=4,6692016091\dots$

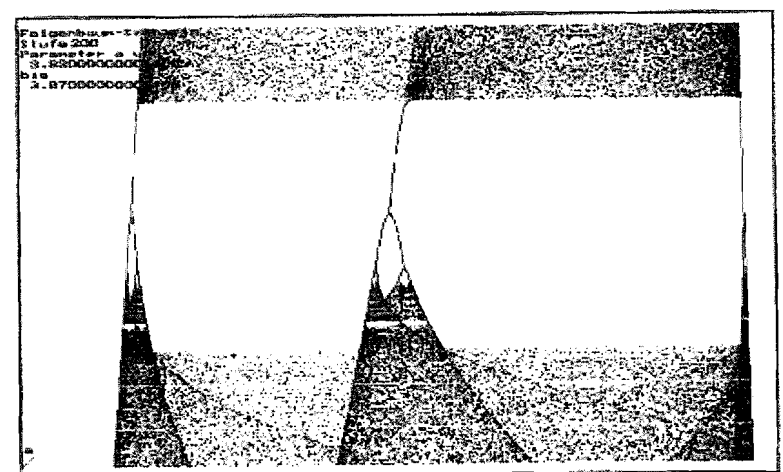
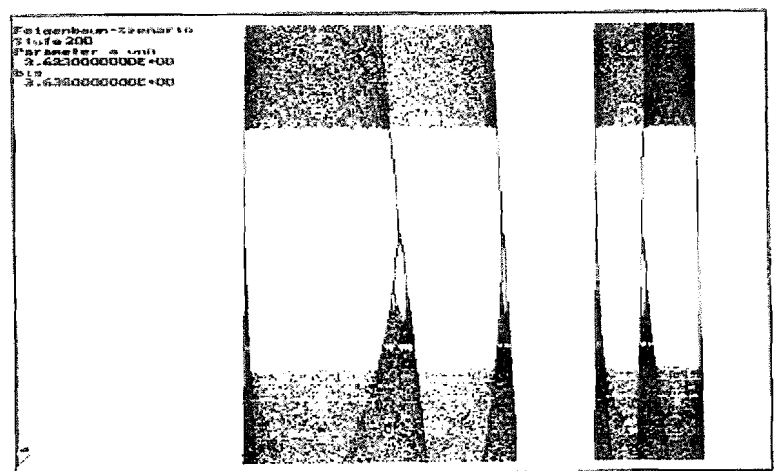
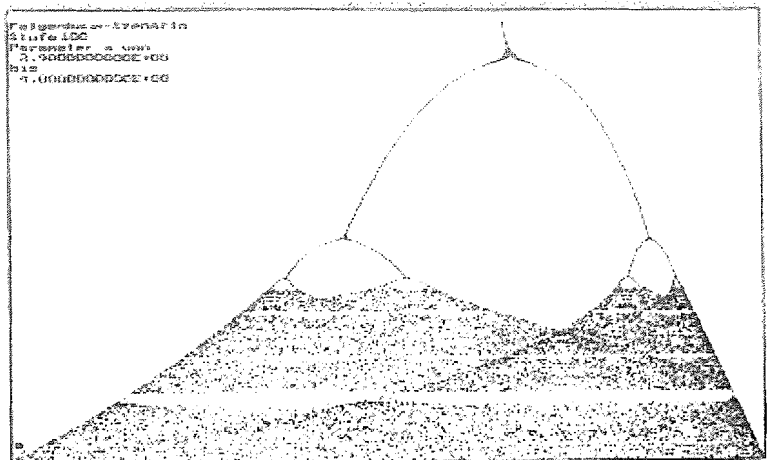
Der Eintritt ins Chaos erfolgt bei $r=3,5699456\dots$. Das ist hier daran sichtbar, dass die gezeichneten Pixel von Nr. 101 bis 200 als breites Band sichtbar werden.

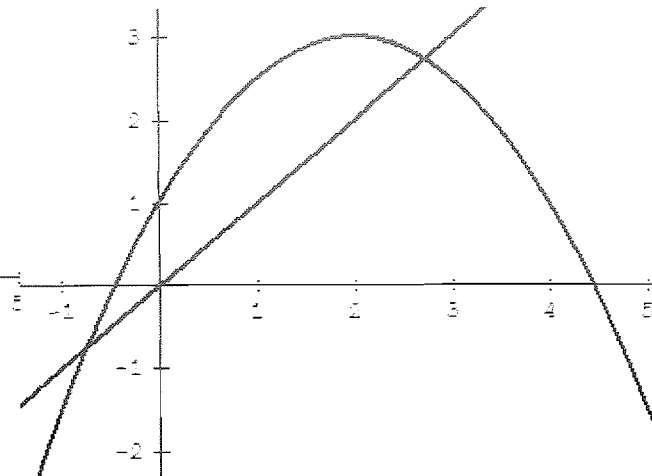
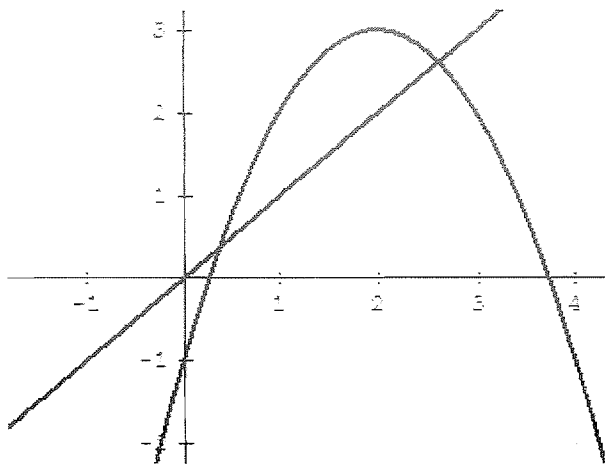
In dem chaotischen Bereich gibt es aber immer wieder **Inseln der Ruhe**. In ihnen sind zunächst wieder wenige Häufungspunkte zu sehen. Deren Zahl ist nun aber keine reine Zweierpotenz mehr. Dann folgt wieder eine Bifurkationskaskade und erneuter Eintritt ins Chaos.

Mathematisches Chaos ist gekennzeichnet durch **Sensitivität** in den Anfangsbedingungen: Zwei beliebig dicht startende Punkte können im betrachteten Bereich beliebig weit auseinander wandern.

Mathematisches Chaos hat die **Mischungseigenschaft**: Zu zwei beliebigen offenen Intervallen I und J kann man in J Punkte finden, die in I gestartet sind.

In mathematischem Chaos gibt es **periodische Punkte** und die "liegen dicht". Diese Eigenschaft ist mit Computern nicht zu prüfen. Sie geht in der Rechenungenauigkeit unter.



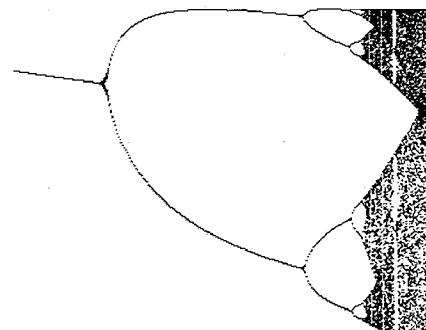
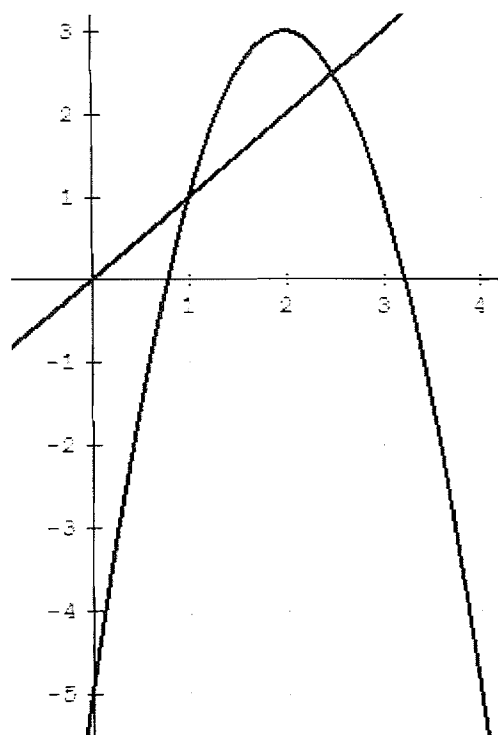


Aufgabe 3 zur Rekursion

$$f(x) = -r(x-2)^2 + 3$$

Dies ist die Trägerfunktion einer rekursiv gegebenen Folge. Oben sind die Graphen für $r=1$, $r=0,5$, rechts $r=2$.

- Notieren Sie die Rekursionsformel für a_n . Berechnen Sie für $r=1$ und den Startwert $a_0=1$ drei Folgenglieder und verfolgen Sie diese graphisch im linken oberen Bild.
- Entscheiden Sie welche Fixpunkte anziehend und welche abstoßend sind (nach Sicht und dranschreiben). Berechnen Sie bei einem der Beispiele die Fixpunkte und entscheiden Sie die vorige Frage rechnerisch.
- Markieren Sie beim rechten oberen Graphen auf der x-Achse Bereiche für Startwerte:
 - bei denen die Folge sicher konvergiert
 - bei denen die Folge sicher divergiert
 Markieren Sie die Tefferfälle.
- Markieren Sie beim rechten und beim obereb linken Graphen auf der x-Achse je zwei Bereiche für Startwerte:
 - bei denen die Folge unklares Verhalten zeigt, Chaosbereich.
 - bei denen die Folge gegen unendlich strebt.
- Erläutern Sie, wie das Feigenbaumdiagramm (rechts) zustande kommt. Wie hängt die erste Bifurkation mit Ihren obigen Betrachtungen zusammen?



2.4.95

Rekursion Aufgabenblatt Thema: Parabeln

Ha 95

Welche der folgenden Parabeln ist hier gezeichnet?

A: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$

B: $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + 1$

C: $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + 2$

D: $f(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$

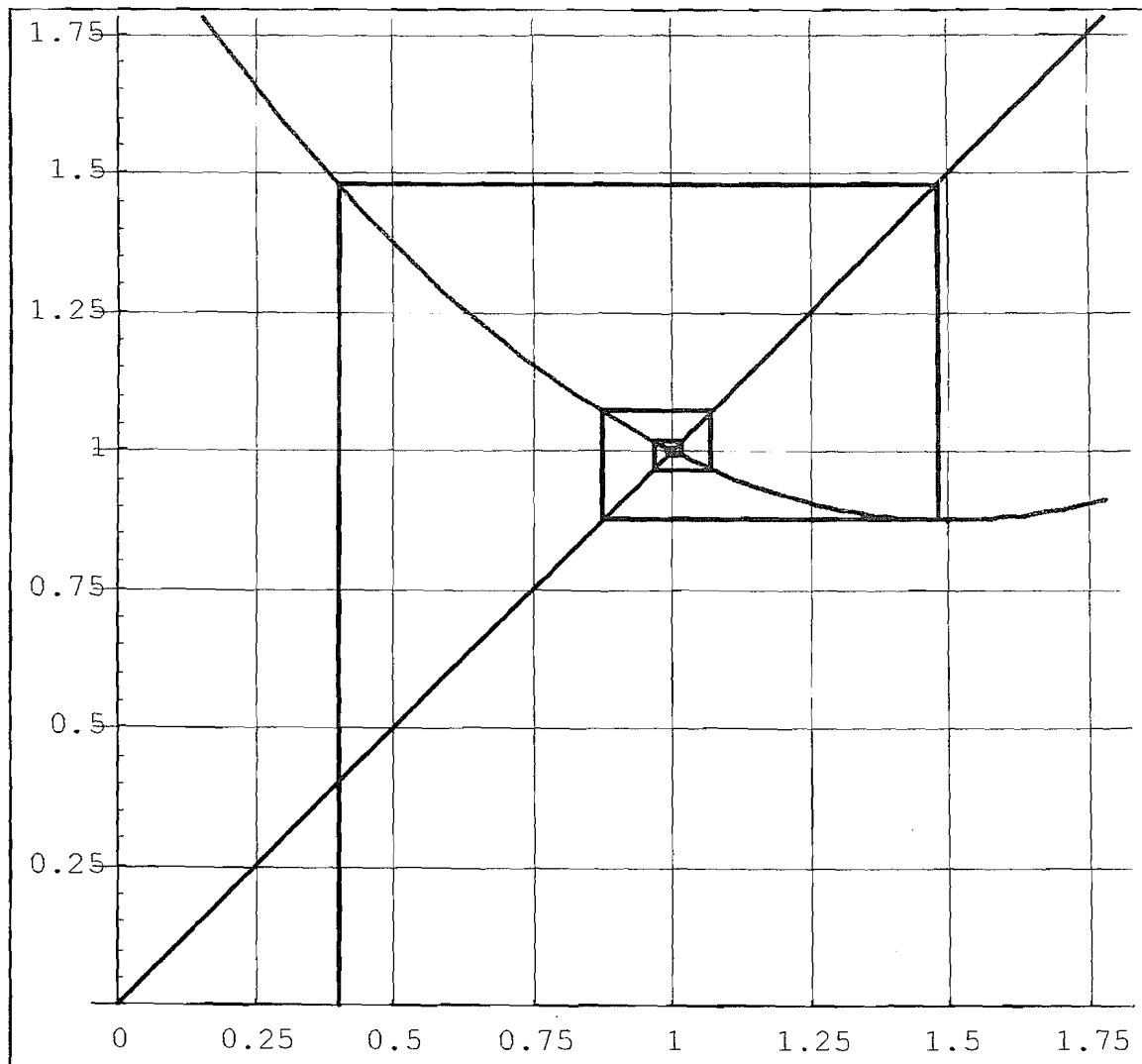
Welche Rekursionsformel gehört zu dem von dir gewählten Funktionsterm?

Startwert ist $x_0 = 0,2$. Berechne 5 Werte.

Wähle andere Startwerte, auch außerhalb des hier gezeichneten Bereichs. Berechne und zeichne, wie die Folge sich verhält. Zeichne dazu die Parabel ins Heft.

Schneidet der Graph weiter rechts noch einmal die Winkelhalbierende? Wenn ja: wo?

Wenn nein: warum?



Aufgabe 1 Gegeben ist die Parabel $p(x) = (x - 2,5)^2 + 1,75$

- Zeichne die Parabel.
- Sie ist Trägerfunktion der Folge x_n mit $x_{neu} = (x_{alt} - 2,5)^2 + 1,75$
- Welche Folge ergibt sich, wenn man mit $x_0 = 1,5$ startet? (6 Werte mind.)
- Bestimme die Fixpunkte der Folge. Welcher ist abstoßend, welcher anziehend?
- Für welche Startwerte gelangt man zum anziehenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte gelangt man zum abstoßenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte strebt die Folge ins Unendliche?
- Gibt es Startwerte, bei denen sich das Verhalten der Folge nicht entscheiden läßt?

Aufgabe 2 Gegeben ist die Parabel $p(x) = \frac{1}{4}(x - 5)^2 + 2$

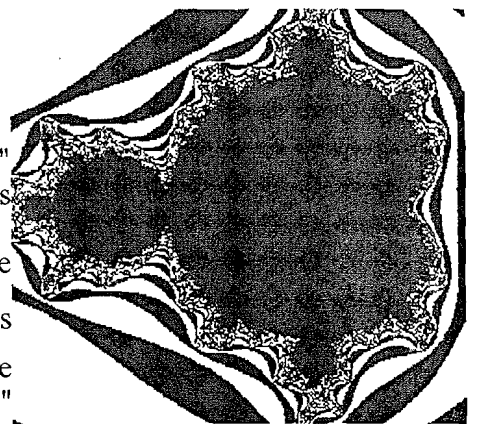
- Zeichne die Parabel.
- Sie ist Trägerfunktion der Folge x_n mit $x_{neu} = \frac{1}{4}(x_{alt} - 5)^2 + 2$
- Welche Folge ergibt sich, wenn man mit $x_0 = 10$ startet? (8 Werte mind.)
- Bestimme die Fixpunkte der Folge. Welcher ist abstoßend, welcher anziehend?
- Für welche Startwerte gelangt man zum anziehenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte gelangt man zum abstoßenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte strebt die Folge ins Unendliche?
- Gibt es Startwerte, bei denen sich das Verhalten der Folge nicht entscheiden läßt?

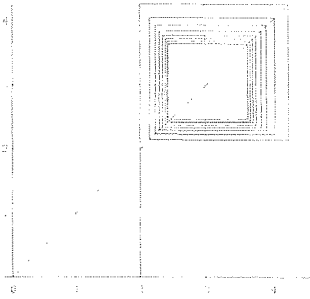
Aufgabe 3 Gegeben ist die Parabel $p(x) = \frac{3,3}{4}x(4 - x)$

- Zeichne die Parabel.
- Sie ist Trägerfunktion der Folge x_n mit $x_{neu} = \frac{3,3}{4}x_{alt}(4 - x_{alt})$
- Welche Folge ergibt sich, wenn man mit $x_0 = 1$ startet? (10 Werte mind.)
- Bestimme die Fixpunkte der Folge. Welcher ist abstoßend, welcher anziehend?
- Für welche Startwerte gelangt man zum anziehenden bzw. abstoßenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte strebt die Folge ins Unendliche?
- Gibt es Startwerte, bei denen sich das Verhalten der Folge nicht entscheiden läßt?
- Fällt dir ein besonderes Verhalten auf? Was ist, wenn du statt 3,3 3,8 schreibst?
- Was ist los, wenn man ganz andere Zahlen an diese Stelle schreibt?

Aufgabe 4 Gegeben sind viele Parabeln $p_c(x) = x^2 + c$, für jedes c eine andere.

- Zeichne in verschiedenen Farben mehrere von ihnen ein.
Für welche c existiert ein anziehender Fixpunkt?
Markiere diese c auf der y -Achse in dickem Schwarz.
Spiegelst du dieses Stück an der Winkelhalbierenden, so hast du gerade ein Stück aus dem dicken Bauch des "Apfelmännchens" gezeichnet. Es ist das Stück auf der Symmetrieachse vom Hals bis rechts das einheitliche Schwarz aufhört.
Das Innere des Apfelmännchens besteht aus allen Punkten c , für die die Folge mit der Rekursionsformel $z_{neu} = z_{alt}^2 + c$ nicht ins Unendliche entwindet. Dabei ist z aber eine sogenannte komplexe Zahl, dargestellt durch einen Punkt in der "Gaußschen Zahlenebene". Unser normaler Zahlenstrahl ist davon eine Teilmenge, nämlich die Symmetrieachse des Apfelmännchens.





Aufgabe 1 Rekursive Folge: $a_n = \frac{1}{4} (a_{n-1} - 5)^2$

Zeichnen Sie die Trägerfunktion in einem größeren als dem dargestellten Bereich.

Berechnen Sie die Fixpunkte der rekursiv definierten Folge. Entscheiden Sie, falls möglich, welcher der Fixpunkte anziehend, welcher abstoßend ist.

Markieren Sie auf der x-Achse Bereiche für Startwerte bestimmt divergenter und konvergenter Folgen, bzw. Folgen unklaren Verhaltens. Zeichnen Sie noch

typische "Treppchen" ein.

Es gibt den Satz: "Monotone und beschränkte Folgen sind konvergent."

Sehen Sie hier Teilfolgen, auf die Sie diesen Satz anwenden können?

Aufgabe 2 zum Schnitt zweier Kurven, diverse Verfahren

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Kosinusfunktion mit der Hauptwinkelhalbierenden

A) direkt, indem Sie aus der Schnittpunktgleichung eine rekursive Folge machen,

B) mit dem Newtonverfahren.

C) Erläutern Sie zeichnerisch an einer groben Skizze das Verhalten des Sekantenverfahrens in diesem Fall.

D) Welches der Verfahren konvergiert am schnellsten?

E) Warum funktioniert Methode A) nicht, wenn man statt dessen $f(x)=2 \cos x$ betrachtet?

Aufgabe 3 zur Taylorreihen

andere Thema

Bestimmen Sie eine Näherungsparabel um $x=0$ für die Kosinushyperbolicusfunktion mit Hilfe der Taylorreihe. Machen Sie eine Skizze.

Prüfen Sie, wie gut die Parabel noch bei $x=1$ ist.

Was müsste man tun, um eine bessere Näherungsfunktion zu erhalten?

Wird der Konvergenzradius der Taylorentwicklung unendlich oder endlich sein?

Sind Probleme zu erwarten?

Nennen Sie ein Beispiel, wo der Konvergenzradius sicher endlich ist.

Aufgabe 4 zu Polynomen 4. Grades

an dem Thema

Erzeugen Sie aus zwei doppelten konkret ausgesuchten Nullstellen ein Polynom 4. Grades.

Weisen Sie nach, dass die Wendetangente die Kurve an einer Stelle schneidet, die sich aus dem Abstand der Wendepunkte ergibt.

Warum ist die Wendestelle 3-fache Schnittstelle des obigen Schnittproblems?

Warum ist es nicht wesentlich, dass man oben mit konkrete Nullstellenwerten gerechnet hat und nicht allgemeinen Werten.

Wie lässt sich die Aufgabe verallgemeinern?

Aufgabe Analysis

Die allgemeine Heron-Formel zur Bestimmung höherer Wurzeln lautet:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{r}{a_n^{k-1}} \right)$$

a) Weisen Sie nach, dass diese rekursive Folge für positive r den Fixpunkt $a = \sqrt[k]{r}$ hat.

b) Rechts ist die Webdarstellung für $r = 8$ gezeichnet.

Um welches k handelt es sich dann offensichtlich?

Verfolgen Sie die hier dargestellten Folgenwerte rechnerisch vier Schritte weit (als Dezimalzahlen).

c) Entwickeln Sie in einer eigenen Zeichnung den Graphen der

Trägerfunktion $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{r}{x^{k-1}} \right)$ als Mittelwert

zweier einfacherer Funktionen. Sie können sich auch für eine Darstellung als Summe zweier Funktionen entscheiden.

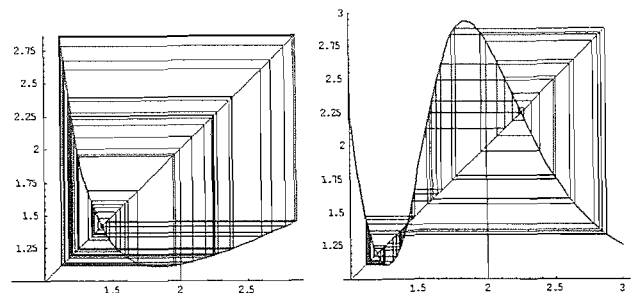
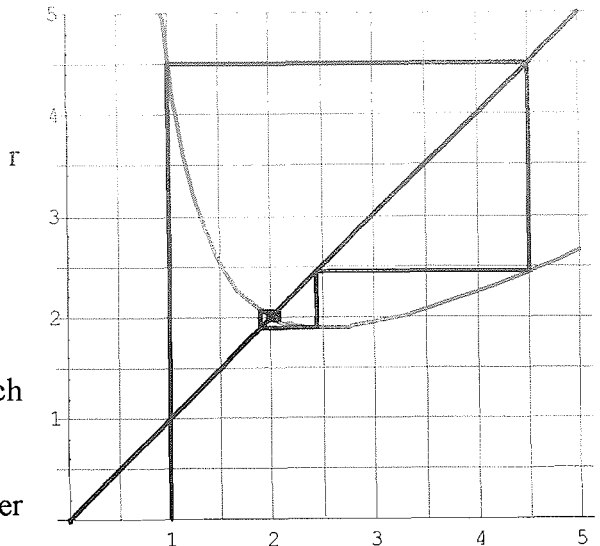
Wie ändert sich der Graph von f , wenn k wächst? (Beschreiben, grobe Skizze)

d) Der in a) berechnete Fixpunkt ist nicht immer anziehend. Berechnen Sie genau, für welche k und r er anziehend und für welche er abstoßend ist.

e) Für $r = 8$ und $k = 6$ erhält man für die Trägerfunktion f und für die zweite Iterierte folgende Graphen:

Die zweite Iterierte ist $y = f(f(x))$.

Erläutern Sie den Zusammenhang und begründen Sie das Verhalten der Folge qualitativ.



e) Bei der logistischen Parabel haben Sie ein “Feigenbaum-Diagramm” kennen gelernt. Es heißt auch “Attraktor-Diagramm”

In gleicher Weise entsteht hier ein “Heron-Feigenbaum-Diagramm”, wenn k variiert wird. Im Bild zeigt die Rechtsachse k von 3 bis 6.

Erläutern Sie das Zustandekommen der Graphik.

Was sagen die Verzweigungsstellen aus?

Wo finden sich die betrachteten Fälle wieder?

Aufgabe Rekursive Verfahren, Heron-Verfahren

In den Schulbüchern wird heute häufig das Heron-Verfahren zur Bestimmung von

Quadratwurzeln vorgestellt. Es hat die Trägerfunktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{r}{x} \right)$

- 1) Geben Sie die zugehörige rekursive Formel an und berechnen Sie für $r=2$ für den Startwert 1 drei Werte.
- 2) Zeichnen Sie die Trägerfunktion, zeigen und erklären Sie, wie Folgenwerte graphisch gewonnen werden.
- 3) Beweisen Sie, dass $x_s = \sqrt{r}$ Fixpunkt ist, und dass für alle Radikanden r superschnelle Konvergenz vorliegt.
- 4) Wie kann man auf Schulniveau erklären, wie Heron die Formel gefunden haben könnte.
- 5) Für höhere Wurzeln führt die Erklärung aus 4) zu

der Trägerfunktion h mit $h(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{r}{x^{k-1}} \right)$.

Beweisen Sie, dass $x_s = \sqrt[k]{r}$ Fixpunkt ist.

Skizzieren Sie grob (im Prinzip) diese Annäherung im Spinnweb-Graphen.

- 6) Im Internet war folgende Trägerfunktion für die Bestimmung höherer Wurzeln zu finden:

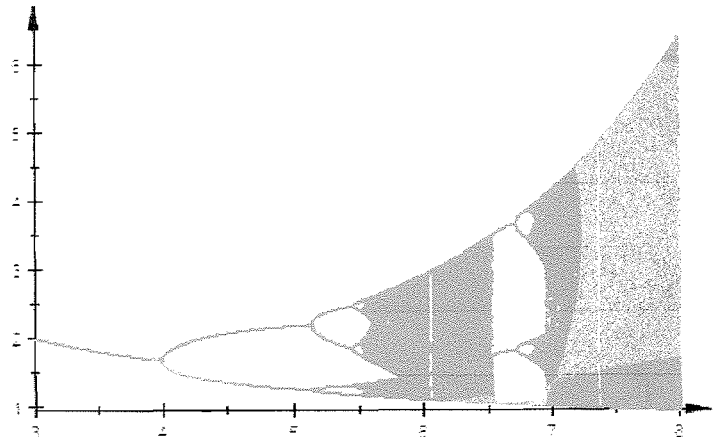
$$g(x) = \frac{1}{k} \left((k-1)x + \frac{r}{x^{k-1}} \right). \text{ Nebenstehend}$$

sind für $r = 8$ und $k = 3$ Folgenwerte dargestellt.
 Diese Trägerfunktion stammt aus dem

Newtonverfahren für die Nullstelle der Funktion p mit $p(x) = x^k - r$. Damit muss die Konvergenz hier superschnell sein. Zeigen Sie an der zweiten Liste, woran man das sehen kann. Weitere Beweise hierzu sind nicht verlangt.

- 7) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten beider Verfahren und bestimmen Sie für die h -Formel aus 5) die Steigung im Fixpunkt in Abhängigkeit von k . Für welche k liegt Konvergenz vor?

- 8) Erklären Sie, wie das Feigenbaumdiagramm zur h -Formel aus 5) zustande kommt. Deuten Sie 5) und 7) an dem Diagramm.
 Warum gibt es für die g -Formel aus 6) kein Feigenbaumdiagramm?



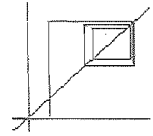
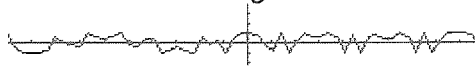
2.0
 3.58103165306122448979501836735
 2.10263197737760212322686885161
 1.9560761333311168685878244326
 2.01345247852814541441230794675
 1.98867991823198873538854176856
 2.0057568795407448376347718217
 1.99714632182383374304852132467
 2.00143295854630194691755288742
 1.99928565918700189216718747354
 2.00055788389476483102051435485

2.0
 4.72108843577414065983394559823
 3.26703450965185734988193752477
 3.427862617615893455335495921731
 2.070972291007491623371484805873
 2.00140447078591166379611071954
 2.00009288613443049036973111263
 2.0000000000041648779618313663
 2.000000000000000000000006731
 2.0
 2.0

Es ist die Schar f_k mit $f_k(x) = \cos(kx^2)$ gegeben.

- a) Entwickeln Sie die Graphen hierzu als Verkettung. Beschreiben Sie die Graphen in

Worten. Gehen Sie auf dieses vom Graphenzeichner gelieferte Bild ein:



- b) Fassen Sie die f_k als Trägerfunktion von rekursiven Folgen auf.

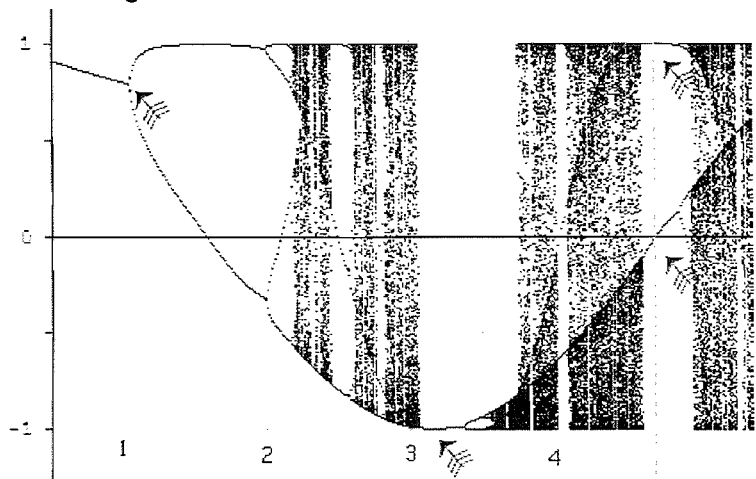
Berechnen Sie für $k=1$ und Startwert $0,2$ fünf Folgenglieder und erläutern Sie den zugehörigen Web-Graphen.

- c) Bestimmen Sie den Fixpunkt für $k=1$ mit zwei verschiedenen Methoden und zeigen Sie auf zwei Arten, dass es sich um einen anziehenden Fixpunkt handelt. (Eine Ableitung ist „von Hand“ zu zeigen.)

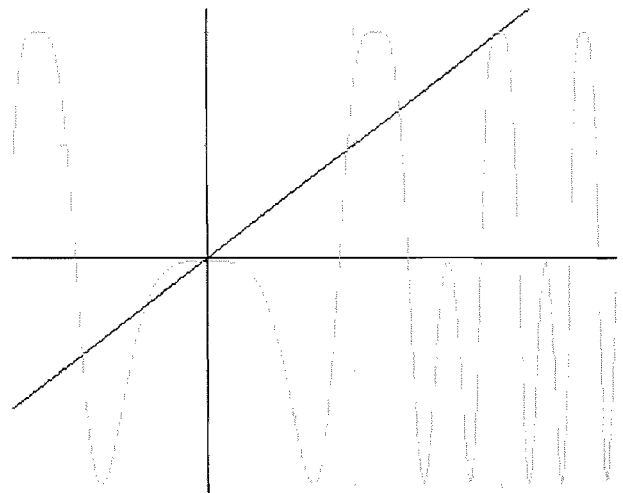
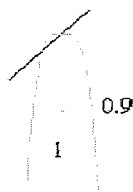
- d) Bestimmen Sie exakt ein k so, dass das erste linke Minimum von f_k in den Punkt $M=(-1/-1)$ fällt. Erläutern Sie, warum M dann ein Fixpunkt mit superschneller Konvergenz ist. Skizzieren Sie das Verhalten der Folgen mit Startwerten in der Nähe von -1 .

- e) Sie sehen rechts einen Teil des Feigenbaumdiagramms für diese Schar.

- Erläutern Sie das Zustandekommen eines Feigenbaumdiagramms grundsätzlich.
- Erläutern Sie das Verhalten bei den beiden linken Pfeilen. Stellen Sie eine Verbindung zu Obigem her.

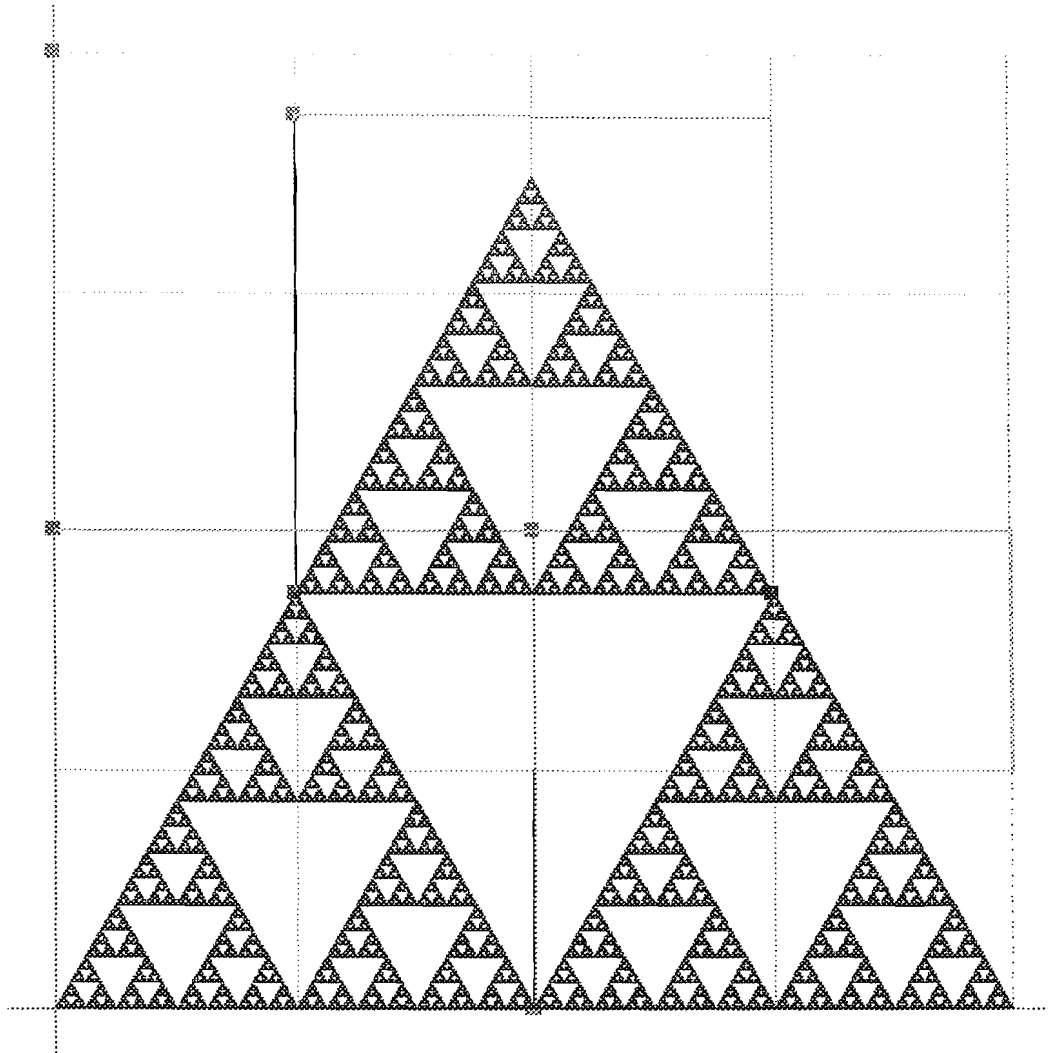


- Der senkrechte blaue Strich ist bei $k=4,7$. Klären Sie das Verhalten an den beiden rechten Pfeilen durch eine geeignete Untersuchung mit Ihrem Folgezeichner. Beziehen Sie auch den rechten Graphen der 2. Iterieren in Ihre Betrachtungen ein. Die Berührung rechts sieht im Zoom so aus.



- f) Wie geht das Feigenbaumdiagramm über den gezeichneten Bereich hinaus rechts und links weiter?

Dies ist eine von 3 Aufgaben für 4 Std.,
TI voyage vorhanden



Erklärung: Urbild ist das große Quadrat aus 16 kleinen Quadraten. Der Ursprung ist links unten. Der oberste grüne Punkt hat die Koordinaten $(1,0)$.

Drei Abbildungen sind durch drei auf halbe Länge verkleinerte Quadrate

gekennzeichnet. Sie bilden den Ursprung auf $(0,0)$, auf $(0.5/0)$ und auf $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$

ab. Letzteres ist nötig, damit das obere Dreieck genau an der Spitze des linken anfängt. So ist die "Geometrie" des Sierpinski-Dreiecks genau erfasst.

Wer den geometrischen Aufbau eines IFS-Fraktals erfasst, hat auch die Abbildungen.

Lohnende Experimente: Was passiert, wenn man den Ursprungs-Bildpunkt der letzten Abbildung nicht genau platziert? Was ist, wenn man anders als auf die Hälfte verkleinert?

Iteriertes Funktionensystem IFS, eindimensionaler Fall

Die Funktionen f_1 und f_2 mit

$$\text{und } f_2(x) = \frac{x+2}{3}$$

werden auf das Intervall $[0,1]$ angewandt und bilden es auf zwei Intervalle der Länge $1/3$ ab.

Nun wird "iteriert", also die Ergebnis-Intervalle auf die x-Achse gelegt und "wiederum= iterum" abgebildet.

Beim ersten Schritt ist aus dem Startintervall das mittlere Drittel herausgenommen worden.

Beim jedem weiteren Schritt werden aus den verbliebenen Resten die mittleren Drittel entfernt.

Georg Cantor, 1845-1918 gilt als der "Begründer" der Mengenlehre und der "transfiniten Zahlen".

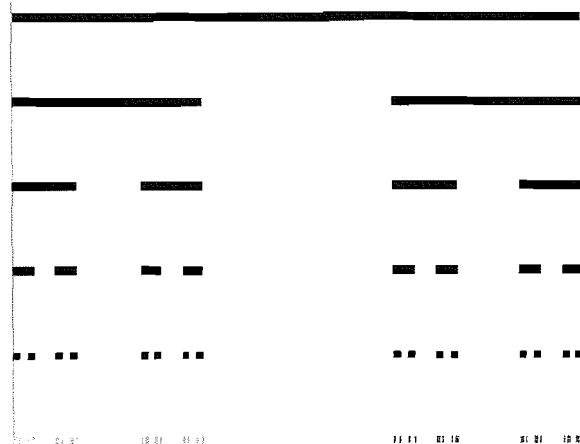
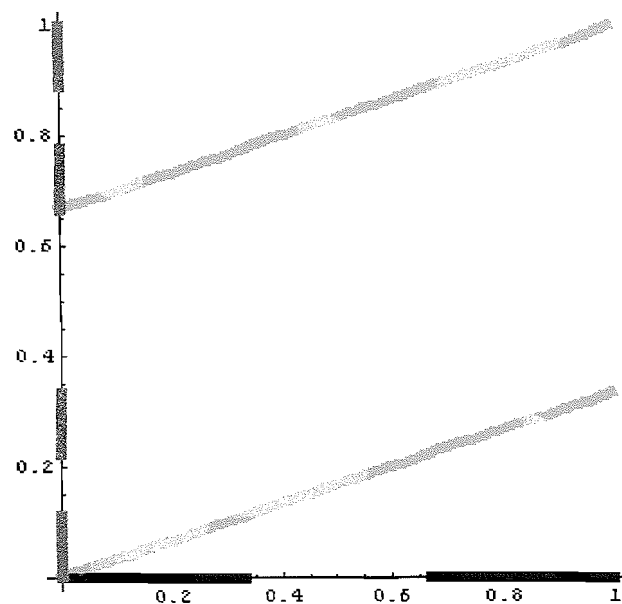
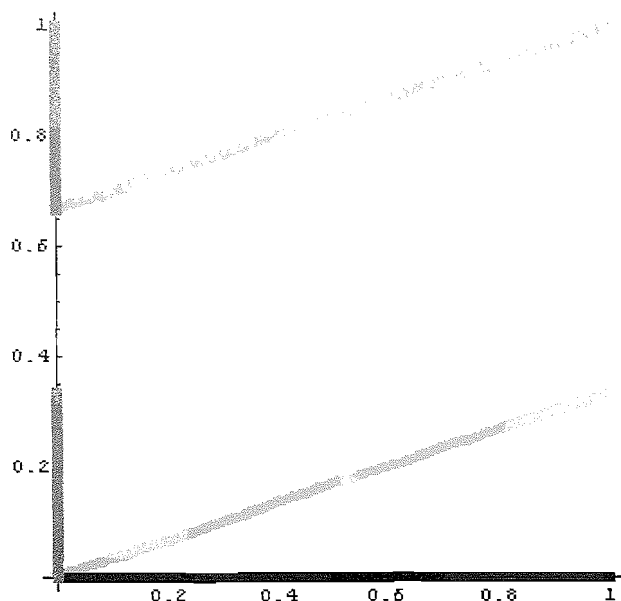
Der Cantor-Staub ist ein Beispiel einer total unzusammenhängenden Menge ohne isolierte Punkte.

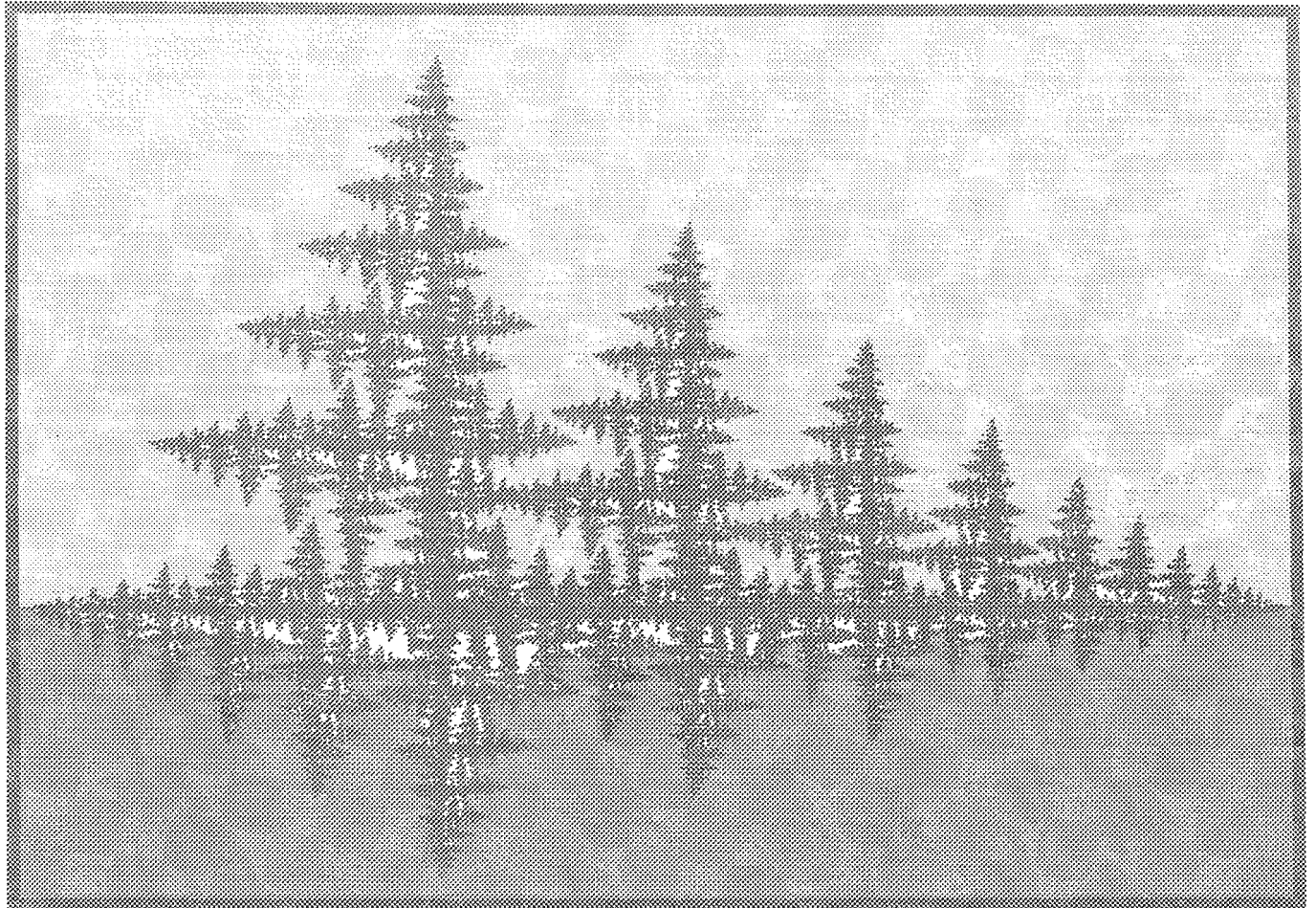
Im Dufner-Programm "Fraktale" in "FraktaleJulia" zeigt die blaue Senkrechte, die man verschieben kann, die dezimale und triadische Entwicklung der Stelle, an der die Senkrechte steht. Aus der triadischen Entwicklung einer Zahl kann man ablesen, in welchen Teilintervallen sie bei der Konstruktion der Cantor-Menge liegt. Beispielsweise liegen alle Punkte, deren triadische Entwicklung mit 0,2... beginnt, im rechten Drittel von $[0,1]$. Erkunden Sie die Zusammenhänge, lesen Sie die "Hilfe".

Man kann zeigen, dass der Cantor-Staub genau aus den Zahlen besteht, deren triadische Darstellung nur 2 und 0, keine 1 ausweist. Dabei ist allerdings zu beachten, dass $1 = 0,222222222\dots = 0,\bar{2}$ ist.

Wenn man nun noch alle 2 durch 1 ersetzt, hat man Dualzahlen und zwar sämtliche zwischen 0 und 1. Damit ist gezeigt, dass der Cantor-Staub nicht nur unendlich viele Punkte enthält, sondern "überabzählbar unendlich viele", also dass er die Mächtigkeit des gesamten Intervalles $[0,1]$, "des Kontinuums", hat.

Literatur: Dufner, Roser, Unseld: Fraktale und Juliamengen [mit CD], Verlag Harri Deutsch,



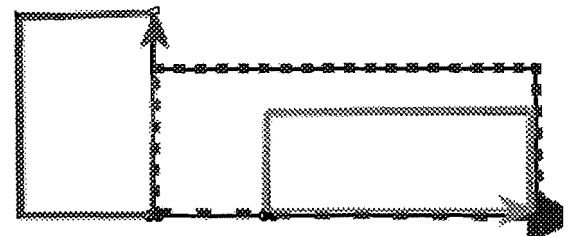


Dieses IFS-Fraktal habe ich

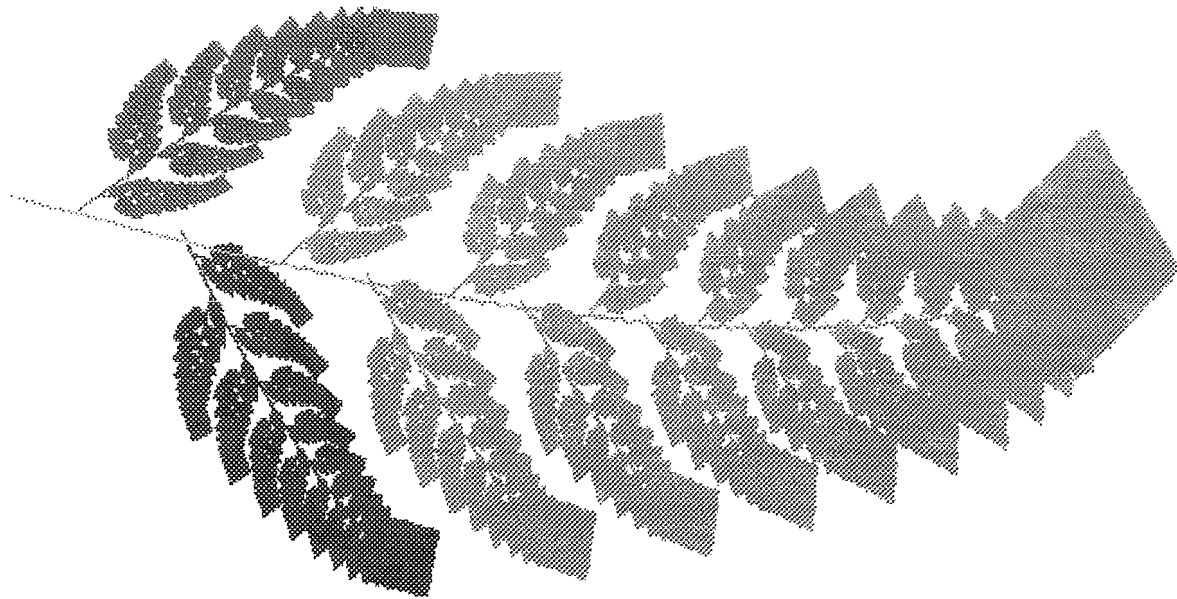
"Wald am See" genannt.

Es entsteht dadurch, dass zwei Abbildungen definiert werden und dann ein beliebiger Startpunkt mit diesen Abbildungen sehr oft abgebildet wird. Für das Wald-Fraktal wird das blaue, gestrichelte Rechteck auf das rote links oder auf das grüne rechts abgebildet. Die rote Abbildung bewirkt Verkleinerung und die Drehung nach links, das grüne Verkleinerung das Verrücken nach rechts.

Der "Wald" ist die Grenzfigur, der Limes, der Attraktor dieses Abbildungsduos. IFS ist die Abkürzung für "iterated functions". Die Form der Grenzfigur hängt allein von den Abbildungen ab, die man in dem von mir entwickelten Computerprogramm kreativ und frei wählen kann.



Dr. Dörte Haftendorn, Johanneum 1994, Uni Lüneburg 2005



Hutchinsonoperator des Barnsleyfarns

10 mal angewendet. Ausgangsbild war der volle Bildschirm. Auf ihn werden alle Abbildungen des IFS **gemeinsam** angewendet. Diese Gesamtabbildung heißt "Hutchinsonoperator."

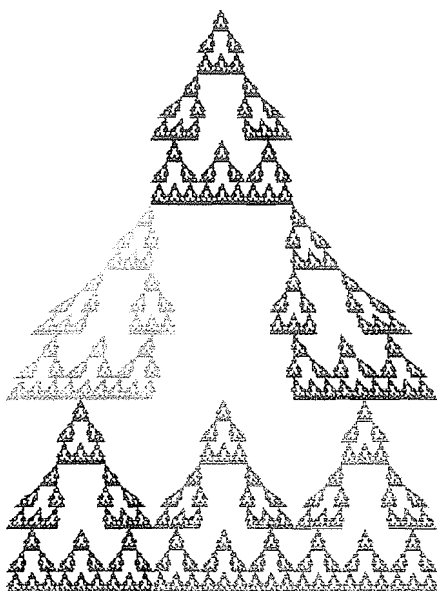
Ein Durchgang dauerte 1995 zuerst etwa 25 Sekunden, dann immer weniger, bis zum Farn-Attraktor, dessen Abbildung 14 Sekunden gedauert hat. 2005 waren das für alle 10 Anwendungen des Hutchinson-operators 40 Sekunden.

farnvoll.wpg

Mit 40-maliger Anwendung ist die "dicke Spitze" auf 1 Pixel zusammengeschrumpft. Das kann man auch vorher ausrechnen: Der größte der Stauchfaktoren im IFS ist 0,85 , 640 Pixel war der Bildschirm breit, $640 \cdot 0,85^n = 1$ hat die Lösung $n=40$.

Fazit: jedes beliebige Bild landet mit dem Hutchinson-Operators des Farns auf dem Farn.





Dies ist meine Pagode. Entwerfen Sie ein Ausgangsrechteck und als Parallelogramme die nötige Anzahl von affinen Abbildungen. Zeichnen Sie in das Bild.

Dieses Bild sei 9 Einheiten breit und 12 Einheiten hoch. Schreiben Sie die Gleichung der Abbildung auf, die die ganze Pagode auf die oberste dieser 6 Pagoden abbildet.

Eine dieser Gleichungen ist

Markieren Sie den Punkt P und bilden Sie ihn mit dieser Gleichung ab. Zeichnen Sie den Bildpunkt ein.

Die Pagode ist nicht steng selbstähnlich. Woran sieht man das?

Bestimmen Sie dennoch die Selbstähnlichkeitsdimension D_s .

Aufgabe 3, die zum Thema **Iterationen** gehört.

Statt der Ihnen bekannten logistischen Parabel sehen Sie rechts den sog. "Sägezahn" und die Winkelhalbierende Wh.

Man startet bei x_0 und zeichnet abwechselnd zu Wh und zur Sägezahnkurve.

Die Formel ist $x_{n+1} = 2x_n \text{ modulo } 1$, dh. man verdoppelt x und läßt stets weg, was vor dem Komma entsteht.

a) Verfolgen Sie rechnerisch 7 Schritte weit, was aus 0,7 bzw. 0,11 wird.

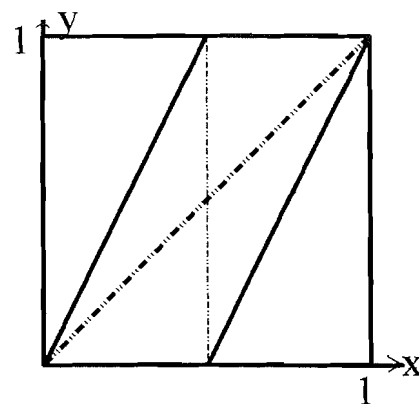
0,7 ...

0,11...

Verfolgen Sie ähnliche Anfangswerte auch zeichnerisch (Verwenden Sie Farben).

b) Wählen Sie eng benachbarte Werte, deren Bahnen sehr bald auseinanderlaufen. Erläutern Sie an diesem Beispiel die Ihnen bekannte

Chaos-Definition.



Aufgabe 4, in der das **Apfelmännchen** vorkommt.

a) Zeichnen Sie ein komplexes Koordinatenkreuz mit der Einheit 5 cm und verfolgen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Folge $z_{n+1} = z_n^2 + c$ für $c = 0,3 + 0,6i$ und $z_0 = 0$ drei Schritte weit.

(Lösung: $\{0, 0,3 + 0,6i, 0,03 + 0,96i, -0,6207 + 0,6576i, 0,252831 - 0,216345i, 0,317118 + 0,490603i\}$)

b) Bei welchem weiteren Verhalten der entstehenden Folge würde man c auf dem Computerbildschirm schwarz färben, bei welchem farbig?

c) Wie erhält man die Juliamenge zu obigem c ?

Lösen Sie Fixpunktgleichung $z = z^2 + c$ mit diesem c . Bestätigen Sie, daß $\{z_1 = -0,025395 + 0,570999i, z_2 = 1,02539 - 0,570999i\}$ Lösungen sind (den ersten rechnerisch, den zweiten zeichnerisch).

Arnold's Katze

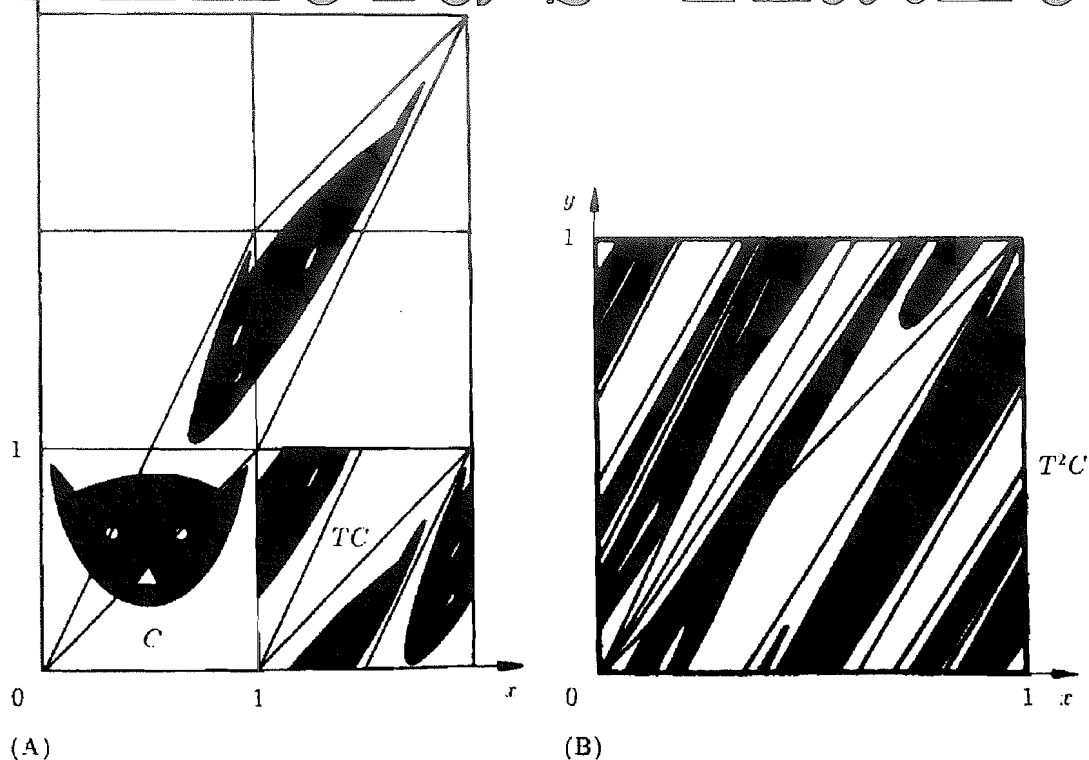


Abb. 11.12. (A) Arnoldsche Katzen-Abbildung; (B) Iterierte Katzen-Abbildung.

"Arnolds Katze" ist oben links unten zu sehen. Sie wird mit der affinen Abbildung T verzerrt. Die Quadrate, in die das verzerrte Bild reicht, werden übereinander kopiert und ergeben das nächste Bild. Es ist neben "Arnolds Katze" zu sehen.

Nun wird dieser Vorgang oft wiederholt. Da wird das Bild immer mehr "verrührt".

Es ist daher völlig verblüffend, dass nach etlichen Iterationen der Katzenkopf unversehrt wieder auftaucht.

Schroeder Fraktale,... S 272-274

Eigene Mathematica-Notebooks

arnoldsKatze1.nb

Grundlagen, Modulo 10

arnoldsKatze2.nb

Probleme mit Nicht-Raster punkten

Weiterführungen,

Untersuchungen für andere Moduln

Handrechnungen und

Beweisüberlegungen

Eigenvektoren

Zyklen

Anpassung an übliche Darstellung

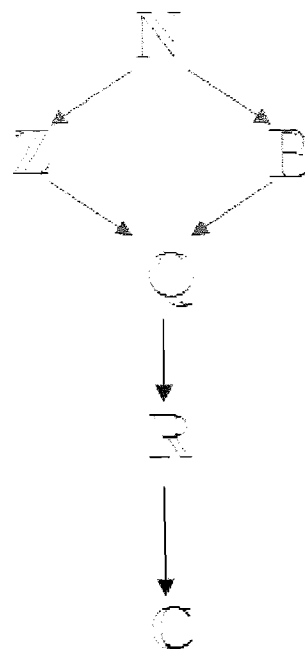
Vortrag: Bigalke (Wingst 1994)

Dr. Dörte Haftendorn Johanneum Juli 1997

L. A. 21

Komplexe Zahlen und Funktionen

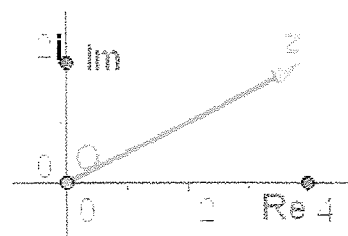
Die Erweiterung von den reellen Zahlen \mathbb{R} zu den komplexen \mathbb{C} ordnet sich bei den algebraischen Erweiterungen ein und ist auf der Seite "Aufbau des Zahlensystems" beschrieben. Die wesentlichen Definitionen stehen aber auch auf dieser Seite bei "Rechnen".



| | | |
|---|---|---|
| Gaußsche Zahlenebene Rechnen + - * : | Eulersche Formel, Polardarstellung *, : | Komplexe Inversion durch geometrische Inversion am Kreis |
| Riemannsche Zahlenkugel Mandelbrot- Iteration Apfelmännchen | n-te Einheitswurzeln Newtonverfahren komplex | Komplexe Funktionen Riemannsche Flächen Quadrat-Fkt., Wurzel-Fkt, Ln-Fkt, E-Fkt |

Gaußsche Zahlenebene, Rechnen + - * :

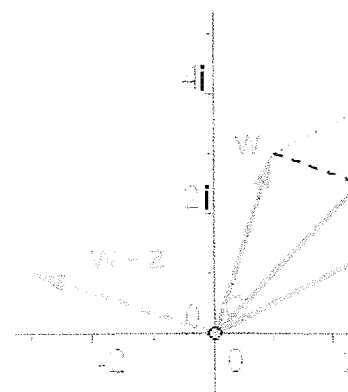
Darstellung In der Gaußschen Zahlenebene haben die komplexen Zahlen die Gestalt $z = a - i b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei heißt a der Realteil von z, $\text{Re}(z)$ und b der Imaginärteil von z $\text{Im}(z)$. Der reelle Zahlenstrahl heißt nun "reelle Achse", die senkrechte Achse enthält alle reellen Zahlen versehen mit dem Faktor i, wobei $i^2 = -1$ ist.



Strichrechnung Die Addition erfolgt in der Gaußschen Zahlenebene entsprechend der Vektoraddition, ebenso die Subtraktion

$$z - w = (a - i b) - (u - i v) = a - u - i (b - v)$$

$$z - w = (a - i b) - (u - i v) = a - u - i (b - v)$$




Multiplikation

Die Multiplikation ist algebraisch passend definiert:

$$z \cdot w = (a - ib) \cdot (u - iv) = au - bv - i(av - bu)$$

2.1.22

Visualisierung:  Komplexe Zahlen, Summe und Produkt

Division

$$\begin{aligned} \frac{1}{a - ib} &= \frac{a + ib}{(a - ib)(a + ib)} = \frac{a + ib}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 - b^2} + i \frac{b}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

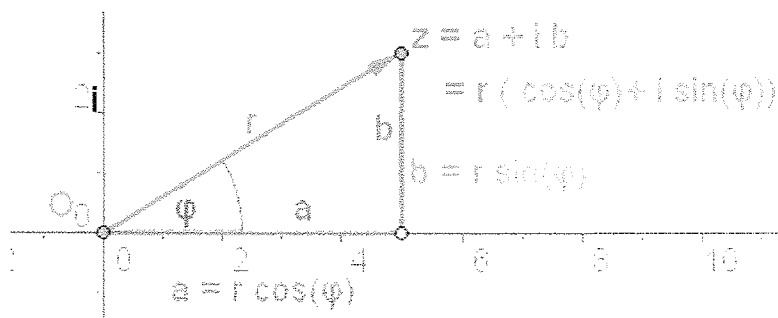
Diese U ist wick auch da üblich I x+iy be tieferes des Inve man ers Polarda der Inve Kreis.



vollständiger Körper, der sich aber nicht anordnen lässt.

Polardarstellung und Eulersche Formel

Darstellung



Taylorreihen

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + O(t^8)$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + O(t^9)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^6}{720} + \frac{t^7}{5040} + O(t^8)$$

Sieht man sich die Taylorreihen von cos, sin und e an, dann erkennt man die strukturelle Gleichheit. Die e-Funktion ergibt sich nicht als Summe, da stimmen die Vorzeichen nicht. Nimmt man aber nicht t als Argument der e-Funktion sondern i so passt es:

$$e^{it} = 1 + i \cdot t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3 \cdot i}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{i \cdot t^5}{120} - \frac{t^6}{720} - \frac{t^7 \cdot i}{5040} + O(t^8)$$

Eulersche

4.103

Formel
Polardarstellung

Also gilt die **Eulersche Formel**

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

und für komplexe Zahlen gilt die Polardarstellung:

$$z = r e^{i\varphi} = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

r heißt Betrag von z und phi heißt Argument von z, oder (Argument)-Winkel von

Multiplikation

Quadrat bilden:

Winkel verdoppeln, Betrag quadrieren

$$z^2 = (r e^{i\varphi})^2 = r^2 e^{i2\varphi}$$

Produkt bilden:

Beträge multiplizieren, Winkel addieren

$$z \cdot w = (r e^{i\varphi}) \cdot (\rho e^{i\psi}) = r \rho e^{i(\varphi+\psi)}$$

Visualisierung des Produktes

Geometrische Erzeugung des Produktes

Division

Inverses bilden:

Kehrwert des Betrages und Negatives des Winkels nehmen:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$$

Quotient bilden:

Quotient der Beträge und Differenz der Winkel nehmen:

$$\frac{z}{w} = \frac{r e^{i\varphi}}{\rho e^{i\psi}} = \frac{r}{\rho} \cdot e^{i(\varphi-\psi)}$$

Geometrische Erzeugung des Inversen mit Strahlensatz




Komplexe Zahlen, Inverses geometrisch mit Strahlensatz

Geometrische Erzeugung des Inversen mit Inversion am Kreis

Komplexe Zahlen, Inverses geometrisch mit Inversion am Kreis


[Weiteres zur Inversion](#)

[Algebra] [Aufbau des Zahlensystems] [Analysis] [Cardano] [Geschichte] [MuPAD] [GeoGebra] [Didaktik]

 Inhalt und Webbetreuung © Prof. Dr. Dörte Haftendorn  Nov. 2006, update 28. November 2006 

MATHEMATIK-VERSTEHEN www.mathematik-verstehen.de

www.doerte-haftendorn.de



<http://haftendorn.uni-lueneburg.de>

<http://mathematik.uni-lueneburg.de>

- Mandelbroter Interakt. ohne Äpfelnäunchen
- Mandelbroter Interakt. mit Äpfelnäunchen

Mehr zum Äpfelnäunchen

Ka Jufh...

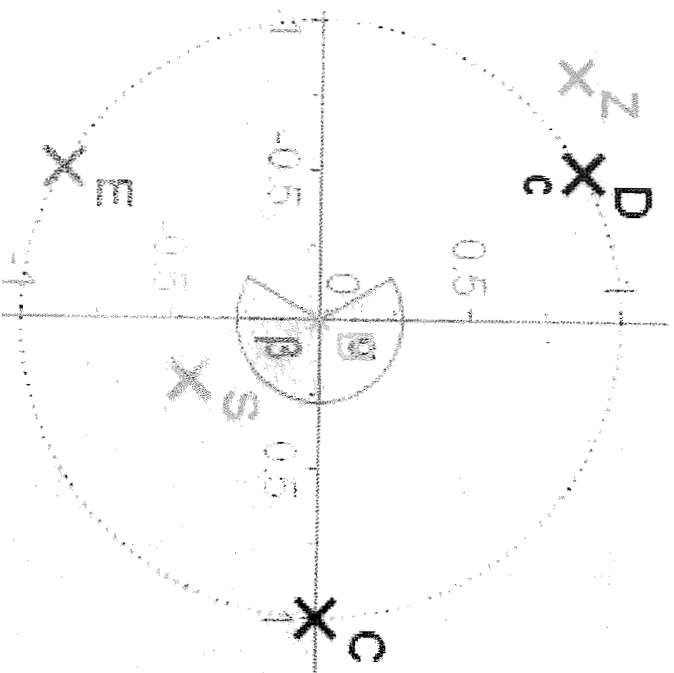
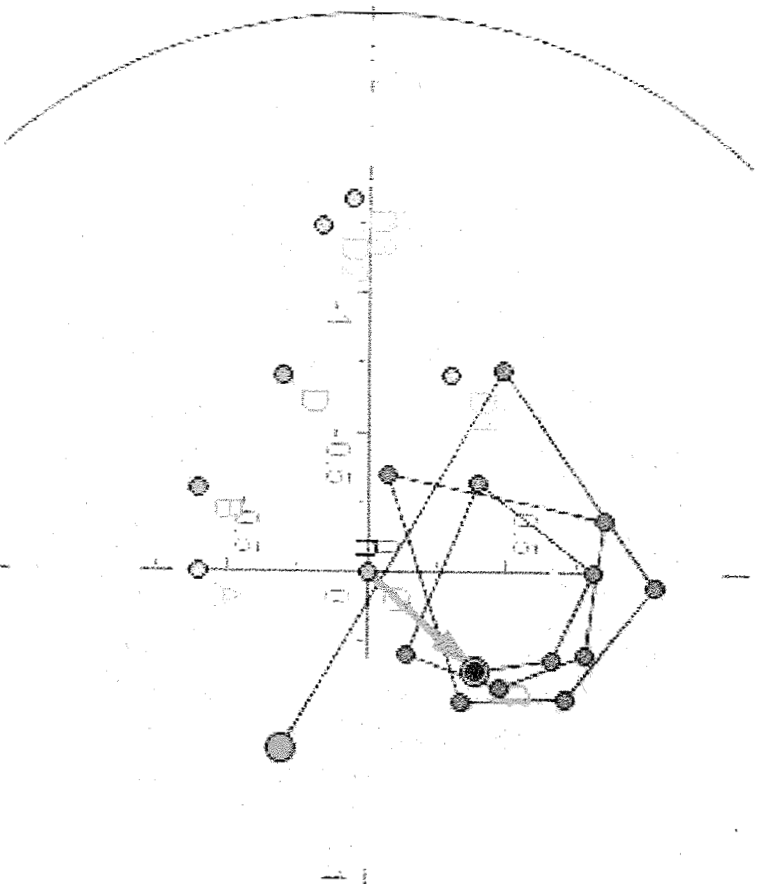
Newtonverfahren im Reellen steht bei den Nullstellenverfahren

Newton-Iteration interaktiv

Das Newtonverfahren zur Berechnung von Nullstellen verhält sich im Komplexen in gewissen Gebieten chaotisch.

Gezeigt wird der Fall für die 3 Einheitswurzeln.

Ausführliche Seite dazu und zu den anderen Einheitswurzeln ist in meiner jüngste-Formelsammlung (pdf noch nicht gelungen)



Chaos und Fraktale \Rightarrow Mandelbrotmengen \Rightarrow

Dr. Dörte Haftendorn

Apfelmännchen - Grundlage

12.11.2017

Das **Apfelmännchen** wohnt in der komplexen Zahlenebene. z_n und c sind komplexe Zahlen. Grundlage ist die Gleichung

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$$

Start bei z_0 . Die Folge z_0, z_1, z_2, \dots nennt man die **Bahn (den Orbit)** von z_0 .

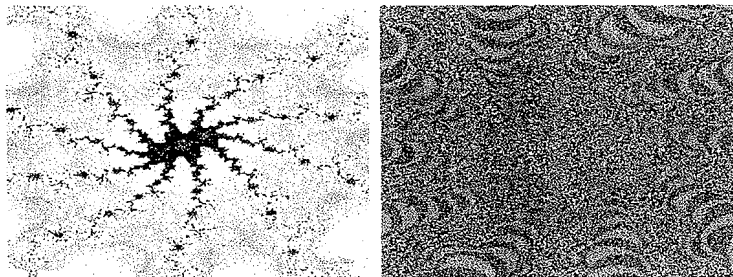
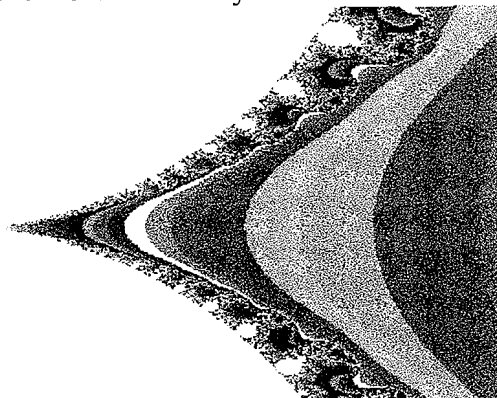
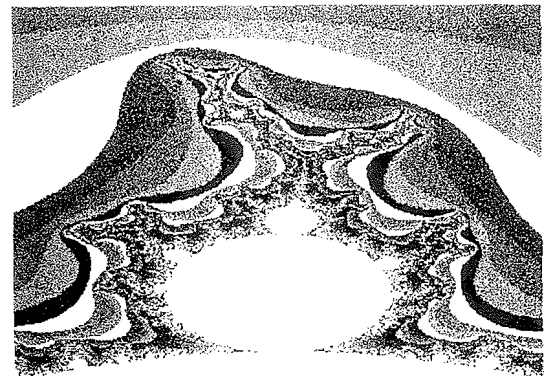
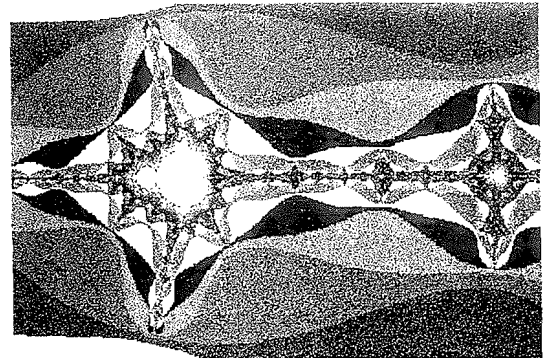
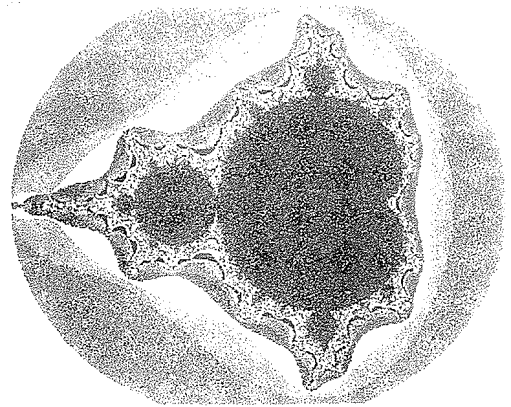
B sei der Bereich der komplexen Ebene, in der ein Bild entstehen soll.

Beim Apfelmännchen wird jeder Punkt als ein c aufgefaßt. Wenn dann die Bahn des Ursprungs $z_0=0$ nach N Schritten beschränkt bleibt, d.h. Abstand 2 vom Ursprung nicht überschreitet, dann wird c schwarz (blau) gefärbt. Sonst erhält c eine Farbe, die der Indexnummer entspricht, bei der dieser Abstand 2 überschritten wurde. N heißt Iterationstiefe.

Dabei entsteht das Apfelmännchen mit vielen Farben in der Nähe seines Randes. Im obersten Bild reicht die große Ellipse von -2 bis 1 und von -1,33 i bis +1,33 i. Also verläuft die imaginäre Achse etwa rechts neben der oberen und der unteren großen Knospe entlang. Die reelle Achse ist die Symmetrieachse.

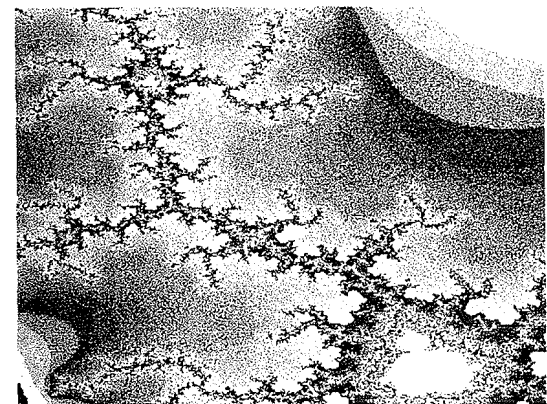
Die anderen Bilder sind Ausschnitte. Dabei ist die Innenfarbe nun hellgrau statt blau.

Die Iterationstiefe war $N=5000$.

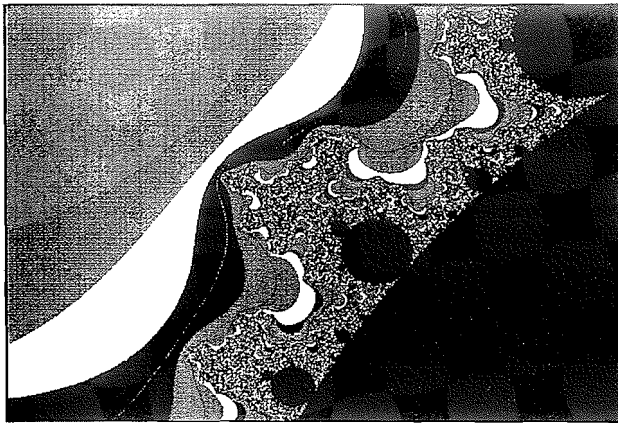
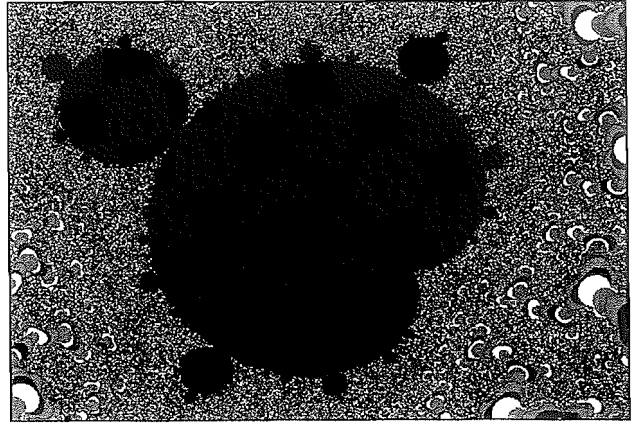
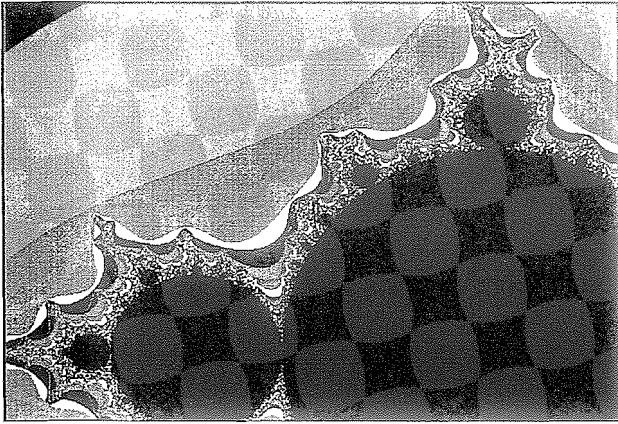


Bereich $-0,52330750 + 0,68811162 i$ links unten
 $-0,52330574 + 0,68811408 i$ rechts oben

für die beiden kleinen Bilder, also nur 3 Millionstel breit und hoch. Hier zeicht sich, daß die Farben zwar beliebis sind, aber dennoch den Eindruck des Bildes stark beeinflussen. Punkt in einem zusammenhängenden Gebiet einer Farbe habe dieselbe "Fluchtgeschwindigkeit", der Orbit hat als bei derselben Iterationsnummer der Kreis mit Radius 2 verlassen.

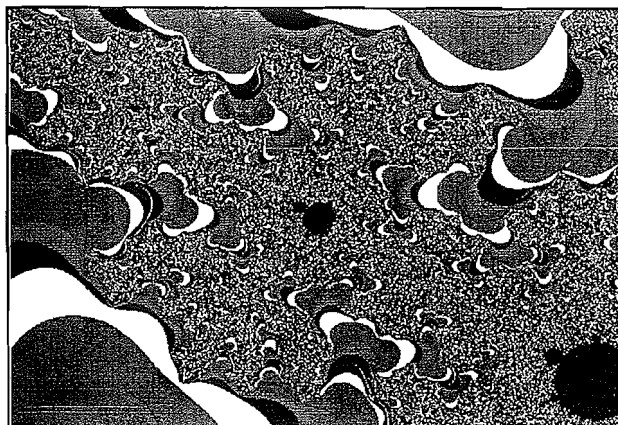
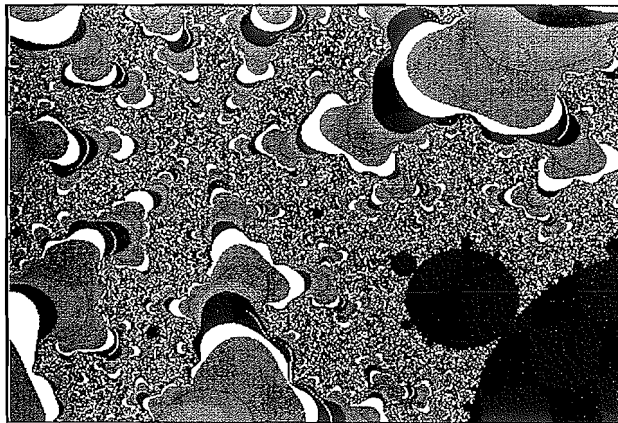


Allgemeinere Mandelbrotmengen (benannt nach B. Mandelbrot) erhält man wenn man als $f(z)$ andere komplexe Funktionen wählt.

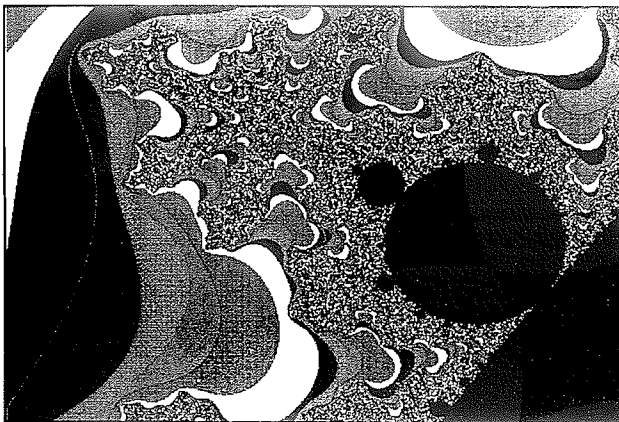
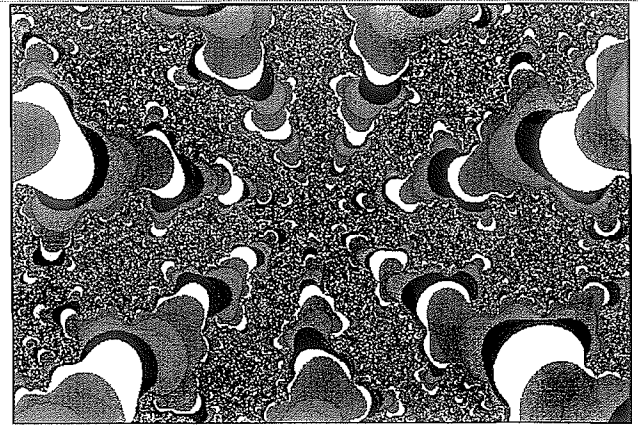
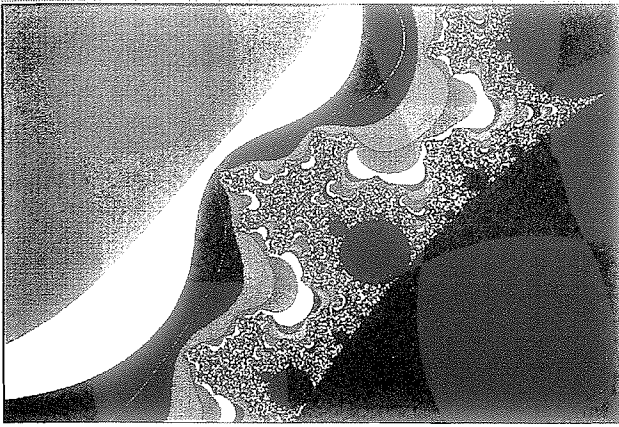


Mandelbrot-Rekursion $z_{n+1} = z_n^2 + c$

| | | | |
|----------|--------------|--|-------------|
| Bild | 1.1 | Datei | apfbj1.wpg |
| x ob li | -1,54401546 | y ob li | 1,1140731 |
| x unt re | 0,226966215 | y unt re | -0.21429647 |
| Iterat. | 3200 | $\epsilon = 1,317\dots$ $\eta = 1,328\dots$ | |
| Bild | 1.2 | Datei | apfbj2.wpg |
| x ob li | -0,83836450 | y ob li | 0.583346115 |
| x unt re | -0,480598832 | y unt re | 0.316430785 |
| Iterat. | 3200 | $2\epsilon = 0,35777\dots$ $2\eta = 0,266916\dots$ | |
| Bild | 1.3 | Datei | apfbj3.wpg |
| x ob li | -0,68912792 | y ob li | 0.473843245 |
| x unt re | -0,62792152 | y unt re | 0.42693384 |
| Iterat. | 3200 | $2\epsilon = 0,0612\dots$ $2\eta = 0,04691\dots$ | |
| Bild | 1.4 | Datei | apfbj4.wpg |
| x ob li | -0,668195311 | y ob li | 0.457142321 |
| x unt re | -0,648854069 | y unt re | 0.442635035 |
| Iterat. | 3200 | $2\epsilon = 0,01934\dots$ $2\eta = 0,0145\dots$ | |
| Bild | 2.1 | Datei | apfbj5.wpg |
| x ob li | -0,659491748 | y ob li | 0.450614046 |
| x unt re | -0,657557623 | y unt re | 0.449163318 |
| Iterat. | 3200 | $2\epsilon = 0,0019341\dots$ $2\eta = 0,00145\dots$ | |



Diese Stelle hat Björn Schelter (Johanneum) mit fractint gefunden.

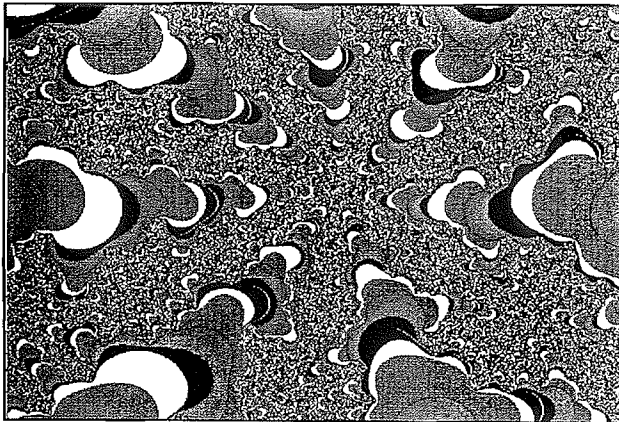


Mandelbrot-Rekursion $z_{n+1} = z_n^2 + c$

| | | | |
|----------|--------------|----------------------------------|-------------|
| Bild | 1.1 | Datei | apfbj2.wpg |
| x ob li | -0,83836450 | y ob li | 0.583346115 |
| x unt re | -0,480598832 | y unt re | 0.316430785 |
| Iterat. | 3200 | 2ε= 0,35777... 2η= 0,266916.. | |

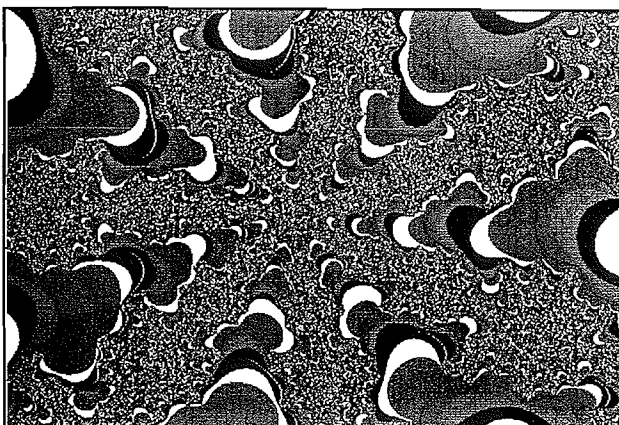
| | | | |
|----------|--------------|------------------------------|-------------|
| Bild | 1.2 | Datei | apfst1.wpg |
| x ob li | -0,730005918 | y ob li | 0.485599136 |
| x unt re | -0,588851752 | y unt re | 0.379734311 |
| Iterat. | 3200 | 2ε= 0,14... 2η= 0,1059... | |

| | | | |
|----------|--------------|---------------------------|-------------|
| Bild | 1.3 | Datei | apfst2.wpg |
| x ob li | -0,680514043 | y ob li | 0.464397881 |
| x unt re | -0,661316819 | y unt re | 0.450000336 |
| Iterat. | 3200 | 2ε= 0,02 2η= 0,0144... | |



| | | | |
|----------|----------------|--|---------------|
| Bild | 1.4 | Datei | apfst3.wpg |
| x oli | -0,67020919674 | y oli | 0.45806098232 |
| x ure | -0,67020917784 | y ure | 0.45806096815 |
| Itera t. | 3200 | 2ε= 0,00000002.. 2η= 0,000000014... | |

| | | | |
|----------|---------------------|--|--------------------|
| B | 2.1 | Dat | apfst4.wpg |
| xo | -0,6702091879033937 | y li | 0.4580609752970368 |
| xu | -0,6702091879031099 | y re | 0.4580609752968506 |
| It e rat | 3200 | 2ε= 0,0000000000003.. 2η= 0,000000000002... | |



Merkwürdigerweise sehen alle Vergrößerungen ab Bild 1.3 fast gleich aus. Das letzte Fenster ist nur noch 0,3 Milliardenstel breit. Falls da doch noch ein Apfelmännchenkern verborgen ist, habe ich ihn nicht finden können. Dies ist Apf7säul.txt

Chaos und Fraktale ▶▶ Juliamengen ◀◀

Dr. Dörte Haftendorn

Grundlage

12. Januar 1997

Auch für die Juliamengen ist die Grundlage eine rekursive Formel wie z.B.

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c,$$

Zu jedem c gibt es eine Juliamenge J_c . Führt die Bahn von z_0 gegen Unendlich, gehört z_0 zur **Fluchtmenge** F_c von c . Bleibt die Bahn beschränkt, gehört z_0 zur **Gefangenenmenge** G_c von c . Der Rand von G_c an der Grenze zu F_c heißt **Juliamenge** J_c von c . Zum Zeichnen wird nun für ein festes c jeder Punkt des Bereiches als z_0 gewählt. z_0 wird gefärbt.

Wenn die Bahn von z_0 nach N Schritten beschränkt bleibt, d.h. Abstand 2 vom Ursprung nicht überschreitet, dann wird z_0 schwarz (blau) gefärbt. Sonst erhält z_0 eine Farbe, die der Indexnummer entspricht, bei der dieser Abstand 2 überschritten wurde.

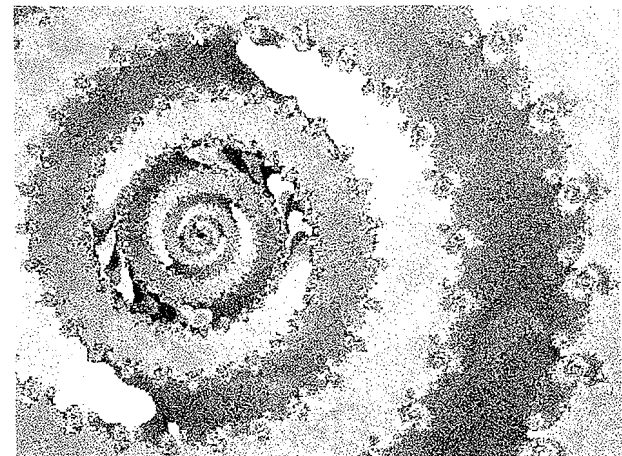
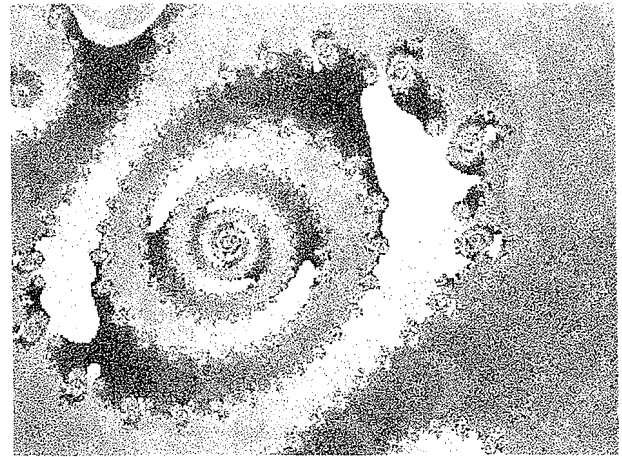
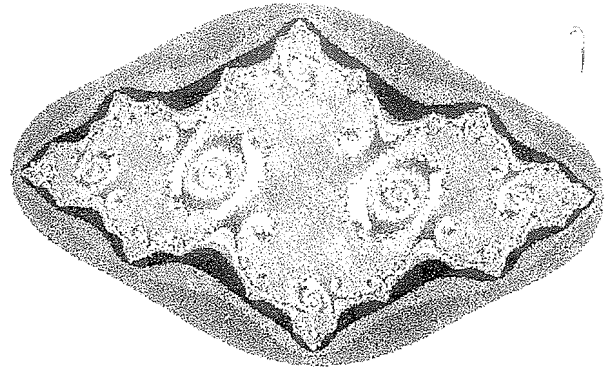
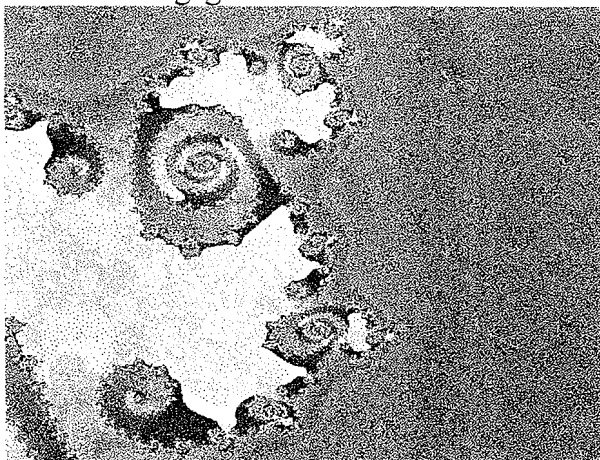
Man kann sich vorstellen daß **an jeder Stelle c des Apfelmännchens ein Fenster** geöffnet werden kann, das die Blick auf die Juliamenge J_c freigibt. Es bestehen auch enge Zusammenhänge:

☉ Wenn c Punkt des Apfelmännchens ist, dann ist **J_c zusammenhängend**. Die Gefangenenmenge G_c ist dann eine Fläche.

☉ Wenn c Randpunkt des Apfelmännchens ist, dann ist **J_c zusammenhängend**. Die Gefangenenmenge G_c stimmt dann aber mit der Juliamenge überein. Eine Fläche kommt nicht zustande.

☉ Wenn c Punkt außerhalb des Apfelmännchens ist, dann ist **J_c total unzusammenhängend**, staubförmig, nur aus isolierten Punkten bestehend. Wieder ist $J_c = G_c$.

☉ Je dichter c am Rand des Apfelmännchens liegt, desto reicher gegliedert ist J_c .



$c = -0,7543 + 0,1130 i$ auf diesem Blatt.

Die Fixpunktgleichung $z = f(z) = z^2 + c$ hat die Lösungen

$$Z_1 = -0,503727346 + 0,056290187 i$$

und $Z_2 = 1,503727346 - 0,056290187 i$

Sie sind das Zentrum der großen linken Spirale und die äußerste rechte Spitze (linkes Bild). Beide sind abstoßende Fixpunkte.

$-Z_1$ ist das Zentrum der großen rechten Spirale und $-Z_2$ ist die äußerste linke Spitze.

Dieses Bild ist weniger als 1 Milliardstel breit und hoch.

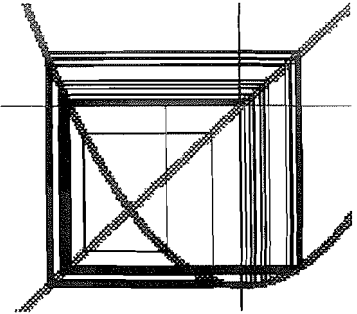
$f_c(z) = z^2 + c$ beschreibt eine komplexe Iteration.

Wähle c . Bleiben die Folgenglieder mit Start bei 0 beschränkt, gehört c zum **Apfelmännchen**.

Wähle c . Wähle einen Start z_0 . Bleiben die Folgenglieder beschränkt, gehört z_0 zur **“Gefangenenmenge”** G_c von c . Der Rand der Gefangenenmenge ist die **Juliamenge** J_c von c .

G_c nennt man auch **“ausgefüllte Juliamenge”**.

Wählt man nun c reell und einen reellen Startwert z_0 , so sind auch alle folgenden Werte reell und man kann sich das Verhalten der Iteration in der im Reellen üblichen Art mit dem Spinnwebverfahren deutlich machen. Rechtes Bild aus Turboplot mit $f(x) = x^2 + a$, $a = 1,3$, $z_0 = -0,5$



Aufgabe:

Unten sind für drei wesentliche Werte von $c = a$ die Parabeln gezeichnet. Bestimmen Sie diese Werte durch eigene Herleitung.

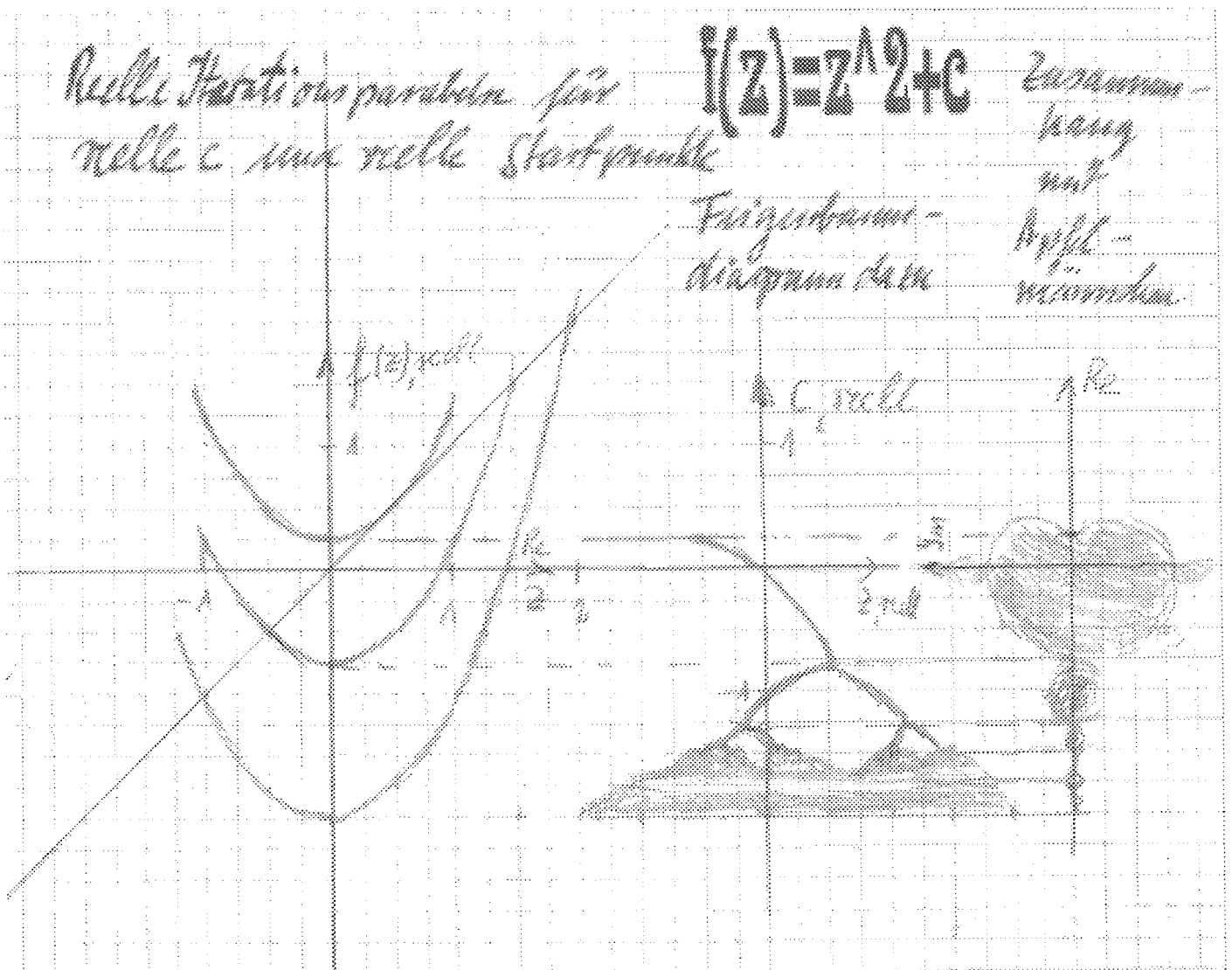
Machen Sie sich den Zusammenhang mit dem Attraktordiagramm klar.

Im Apfelmännchen ist auf diese Weise nur das Verhalten für c auf der Symmetrieachse untersucht.

Welche Eigenschaften des Apfelmännchens ergeben sich?

Wie stellt sich die Apfelmännchen-Einschränkung, dass $z_0 = 0$ ist, im reellen Iterationsdiagramm dar?

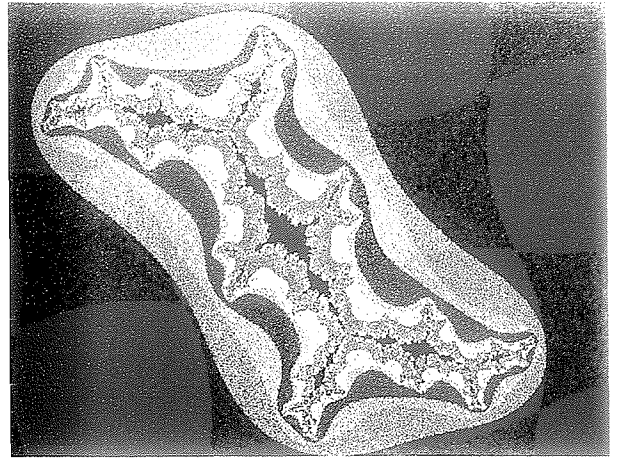
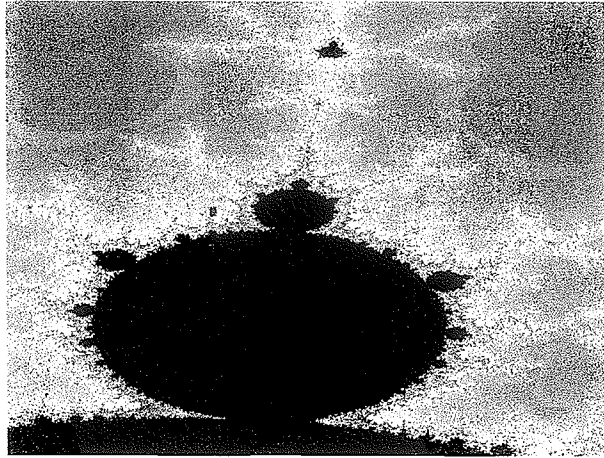
Was kann man über die Juliamengen der reellen c erfahren?



Chaos und Fraktale Juliamengen im Vergleich

Dr. Dörte Haftendorn

11. Januar 1997



| X | y |
|--------------|------------|
| -0.071205213 | 0.93610345 |
| -0.095539008 | 0.86541862 |

Apfelmännchen im oberen Bereich

Als kleine Rechtecke sind zwei Juliapunkte eingezeichnet:

$c1 = -1.2 + 0.88i$ und $c2 = -1.2 + 0.887i$

$c1$ liegt **im** Apfelmännchen. Darum ist die Juliamenge $Jc1$ zusammenhängend und es existiert die gefüllte Juliamenge $Jgc1$, hier blau gezeichnet.

$c2$ liegt **neben** dem Apfelmännchen. Darum ist die Juliamenge $Jc2$ total unzusammenhängend.

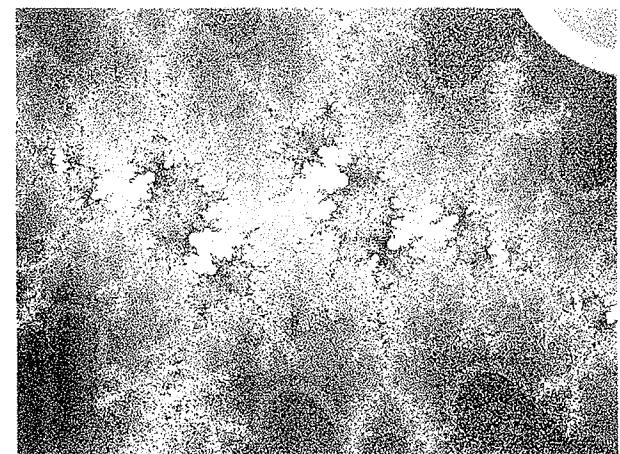
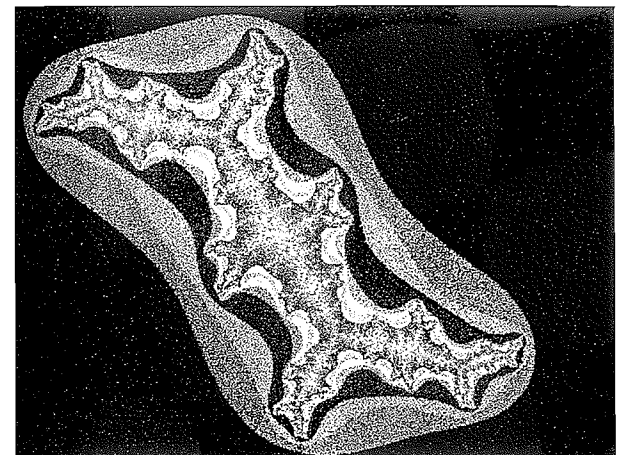
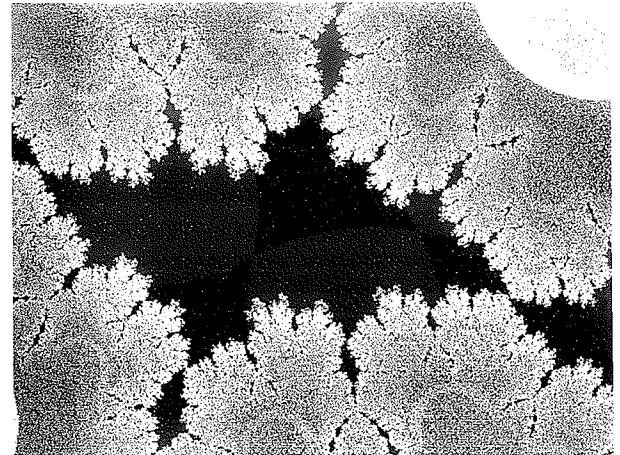
Nur ganz grob sehen sich die beiden Juliamengen ähnlich.

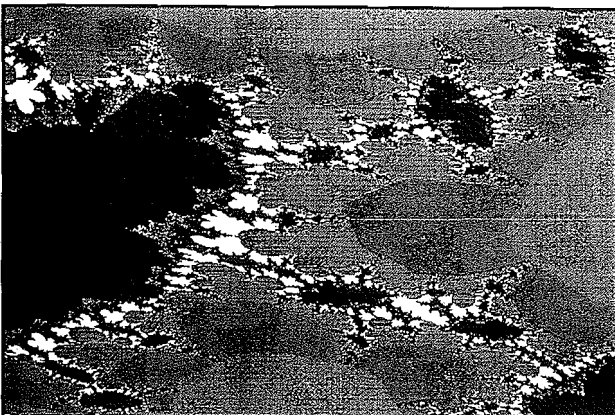
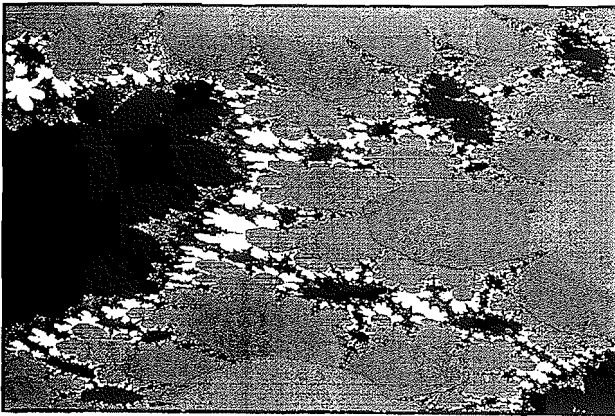
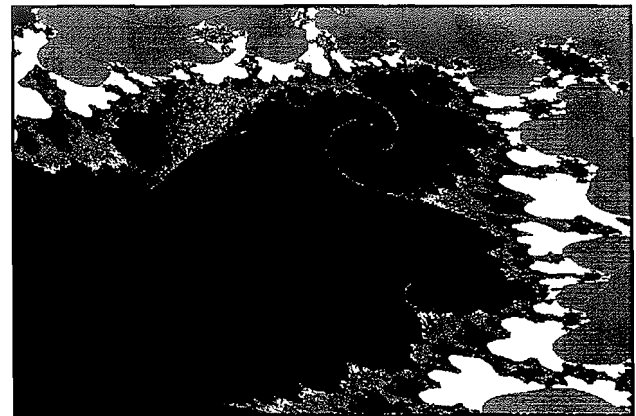
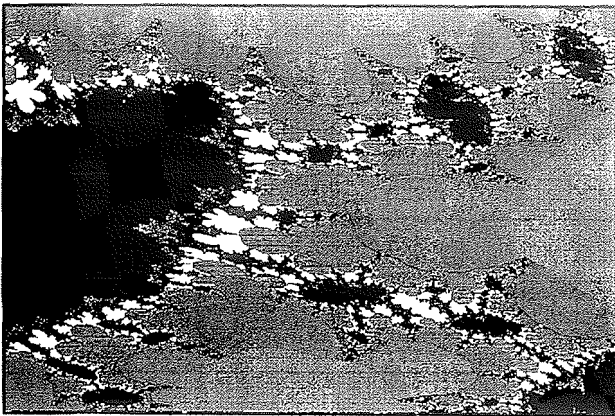
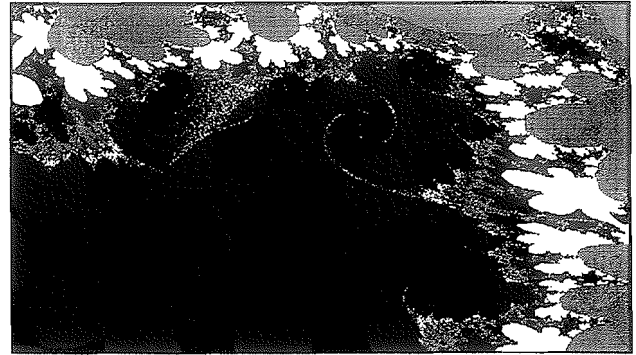
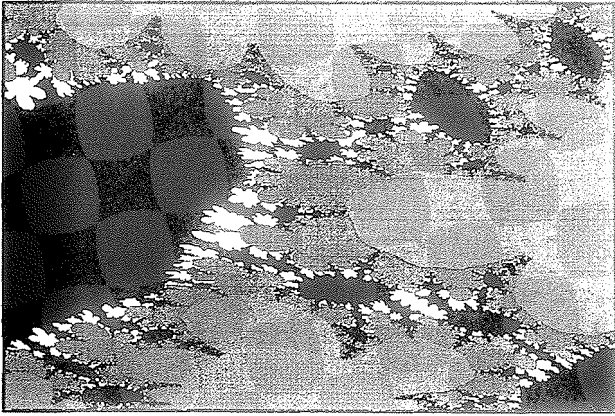
c1

| x | y |
|------------|------------|
| 1.7104922 | 1.2432151 |
| -1.5179969 | -1.1931104 |
| x | y |
| -.57307707 | .53625471 |
| -.82145668 | .52096403 |

c2

| x | y |
|------------|------------|
| .17088763 | -1.1965231 |
| -1.4428796 | -1.2118996 |
| x | y |
| -.59958298 | .52475667 |
| -.81585797 | .52167494 |

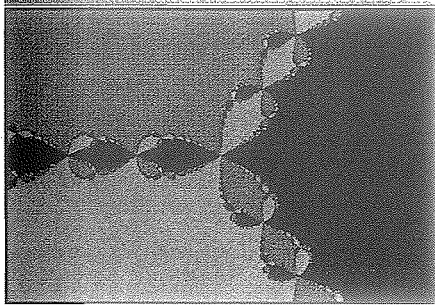




Mandelbrot-Rekursion für Typ 5 im Apfjulia-Programm

$$z_{n+1} = (-0,832 + 0,65i) \cosh(z_n) + c$$

| | | | | | |
|---------|--------------|--------|------------------------------------|---|----|
| Bild | 1.1 | Datei | apfcos0.wpg | | |
| Mitte x | 2,055 | eps | 0,1 | | |
| Mitte y | 0,05 | eta | 0,1 | | |
| Iterat. | 12 | Betrag | 20 | F | 12 |
| Bild | 1.2/1.3/1.4 | Datei | apfcos1-3.wpg | | |
| Mitte x | 2,055 | eps | 0,1 | | |
| Mitte y | 0,05 | eta | 0,1 | | |
| Iterat. | 100/200/1000 | Betrag | 30 ^{1/20} / ₅₀ | F | 12 |
| Bild | 2.1 /2.2 | Datei | apfcos4/5.wpg | | |
| Mitte x | 2,005 | eps | 0,04 | | |
| Mitte y | 0,083 | eta | 0,04 / 0,043 | | |
| Iterat. | 500/1500 | Betrag | 20 | F | 12 |



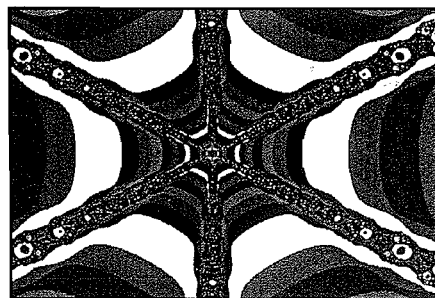
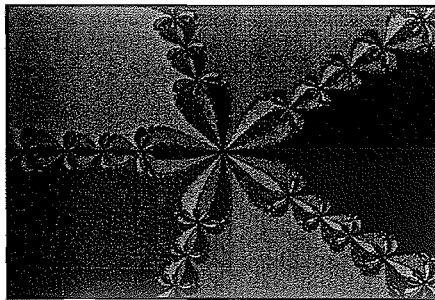
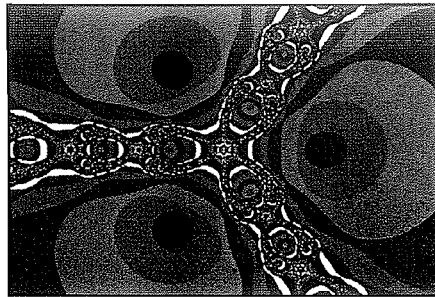
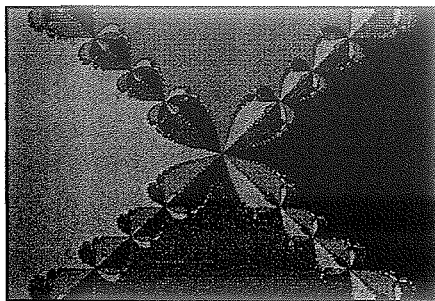
Newton-Rekursion für

$$f(z) = z^n - 1$$

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^n - 1}{n z_k^{n-1}}$$

Dargestellt sind die Attraktionsgebiete der n-ten Einheitswurzeln in der komplexen Zahlenebene. Der Ursprung ist das Symmetriezentrum, die rechte obere Ecke ist $z=2+1,5i$

| | |
|-----|-------------------|
| n=3 | komplexe Formel |
| n=4 | 2.2 Tempo bei n=3 |
| n=5 | 2.3 wie 2.2 innen |
| n=6 | 2.4 n=10 |
| n=7 | 2.5 n=10 innen |



Erstaunlicherweise gibt es keine Randpunkte zwischen je 2 Attraktionsgebieten, sondern jeder Grenzpunkt ist ein n-Länder-Eck. Diese Grenzpunkte können als Urbilder des Ursprungs aufgefaßt werden. Sie bilden die

Juliamenge J_R

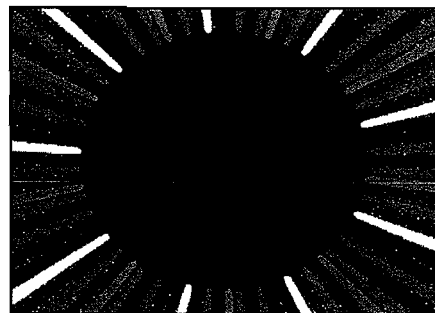
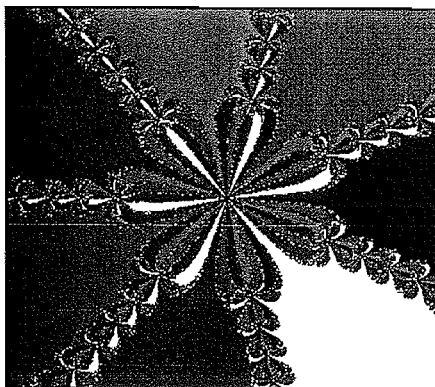
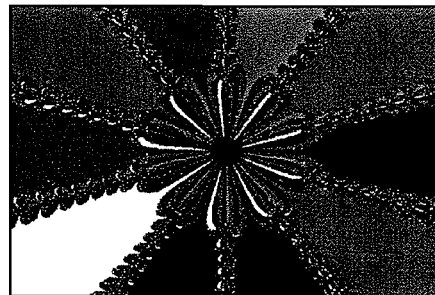
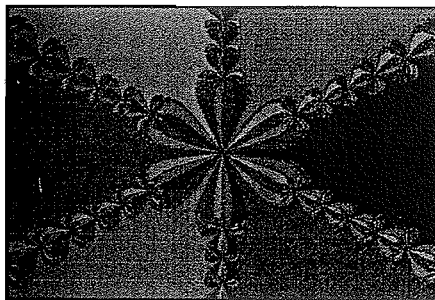
der Newtonrekursion $R(z)$.

In Bild 2.2 ist dagegen dargestellt, wie lange es dauert, bis entschieden ist, welche der 3 Einheitswurzeln

$$z_1 = 1, z_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi}, z_3 = e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

der Startwert anstrebt.

Im Zentrum der Bilder 2.4 und 2.5 kommt der Computer an seine Grenzen, denn der Ursprung ist sozusagen das Urbild aller 10-Länderecke und fast nur von 10-Länderecken umgeben. Daher müßte es in seiner Nähe besonders bunt aussehen.



Dateien: newtz3j...7j.wpg
 newtz3a.wpg, newtz3ai.wpg
 newtz10j.wpg, newt1ji.wpg
 Erstellt mit FRACTINT. Optionen
 newtonbasin und newton
 Dieser Text: newtonj.txt

$$f(z) = z^2 + c$$

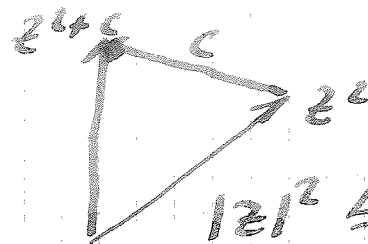
$$dz / |z| > 2 \ll \epsilon$$



$$|z| > 2 \Rightarrow z_n \rightarrow \infty$$

Bew. Sei $|z| \geq |c|$ und $|z| > 2$ **

$$\Rightarrow |z| = 2 + \epsilon$$



$$|z|^2 \leq |z^2 + c| + |c|$$

$$\Leftrightarrow |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c|$$

$$= |z|^2 - |c|$$

$$\geq |z|^2 - |z|$$

$$= (|z| - 1) \cdot |z|$$

$$= (1 + \epsilon) \cdot |z|$$

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \geq (1 + \epsilon) |z_n|$$

$$\Rightarrow |z_n| \rightarrow \infty$$

Da \exists $|z| \leq |c|$ und $|z| > 2$

$$\Rightarrow |c| \geq |z| > 2 \text{ ist also schon } |c| > 2$$

$z_0 = 0$ $z_1 = c \Rightarrow z_1$ erfüllt obige Bed.

$$\Rightarrow |z_2| \geq (1 + \epsilon) |z_1| = (1 + \epsilon) \cdot |c| > |c|$$

$\Rightarrow z_2$ und alle weiteren erfüllen ob. Bed.

$$\Rightarrow |c| > 2 \Rightarrow z_n \rightarrow \infty$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen DGL

Eine Gleichung mit mindestens einer Ableitung einer Funktion f und evt. der Funktion selbst und evt. der oder den Variablen x, \dots heißt **Differentialgleichung**.

Hängt f nur von einer Variablen ab, liegt eine **gewöhnliche DGL** vor, anderenfalls eine **partielle DGL**.

Die **Ordnung** einer DGL ist die höchste vorkommende Ableitungsordnung. Schreibt man $y=f(x)$, so kommt in vielen für die Anwendung wichtigen DGLn höchstens y'' , y' und x vor, also DGLn bis zur zweiten Ordnung.

Eine DGL der Bauart $y''+a(x)y'+b(x)y=g(x)$ heißt **lineare DGL**.

Eine DGL der Bauart $y''+ay'+by=g(x)$ heißt **lineare DGL mit konstanten**

Koeffizienten. Beide DGLn sind von zweiter Ordnung. Nur für diesen Typ ist das Lösen leicht. (S.u.)

Entsprechend sind $y'+a(x)y=g(x)$ bzw. $y'+ay=g(x)$ **lineare DGLn erster Ordnung**.

Die rechte Seite $g(x)$ heißt dann **Störfunktion**,

Ist $g(x)=0$, heißt die lineare DGL **homogen**, anderenfalls heißt sie **inhomogen**.

DGLn, bei den Produkte aus y, y', \dots vorkommen*, heißen DGLn höheren Grades. Der Grad der DGL ist die maximale Anzahl der y, y', \dots Faktoren in den Summanden.

$yy'+x^3 y^2=\sin(x)$ ist DGL 1. Ordnung und 2. Grades.

* bei polynomialem Aufbau bzgl. y

Bei nichtlinearen DGLn hat der Begriff **homogen** (leider) eine andere Bedeutung. Sie sind **homogen**, wenn jeder Summand denselben Grad hat.

Obige DGL ist homogen, ohne das Quadrat am y wäre sie inhomogen.

Lösung einer DGL ist eine Funktion, die beim Einsetzen in die DGL eine **wahre Aussage** entstehen läßt.

Gibt man eine einzige Lösung an, so heißt sie **partikuläre Lösung** oder **spezielle Lösung**.

Fasst man **alle möglichen** Lösungen zu einer Kurvenschar mit frei wählbaren Konstanten C_i zusammen, so hat man **die allgemeine Lösung** der DGL angegeben.

Nichtlineare DGLn haben manchmal noch zusätzlich sogenannte **singuläre Lösungen**, die sie nicht aus der allgemeinen Lösung durch Einsetzen von Werten für die Konstanten ergeben.

Die DGL 1. Ordnung lassen sich meist nach y' auflösen. Dann lassen sie sich gut darstellen und verstehen, denn sie beschreiben ein Richtungsfeld.

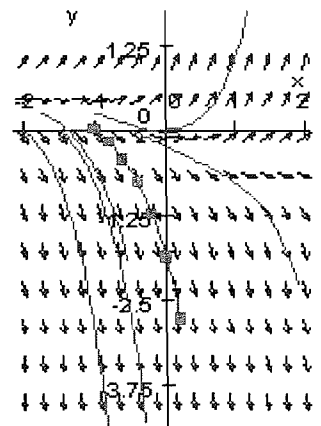
In diesem Fall kann man sie stets numerisch lösen. (Heun-Verfahren)

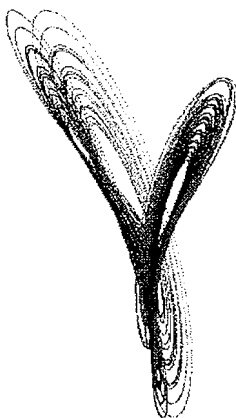
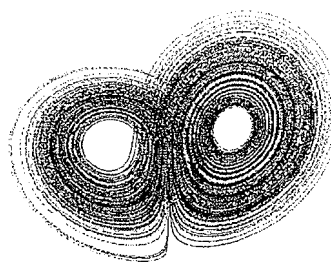
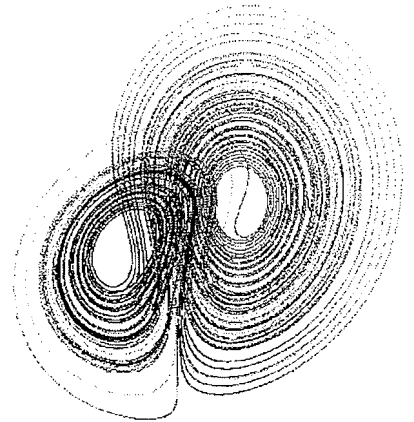
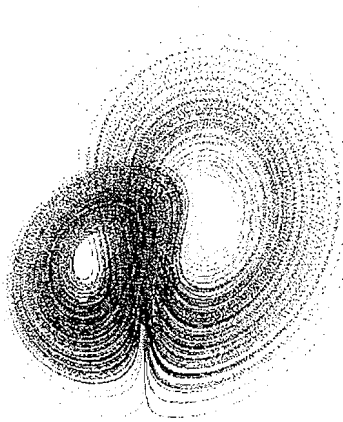
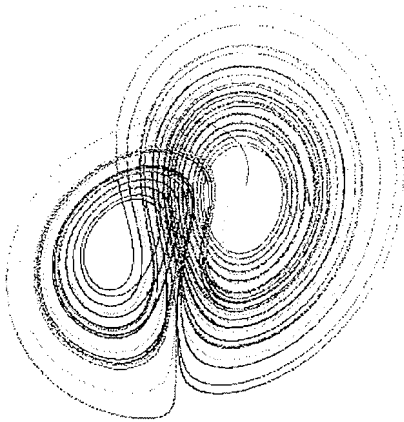
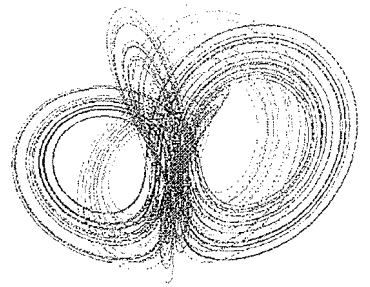
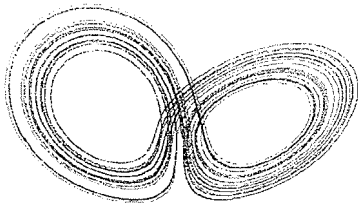
(Ausführlich in MuPAD siehe Internet)

```
dgl:=ode(y'(x)-2*y(x)=sin(x),y(x)); //DGL eintragen
```

```
solve(dgl)
```

$$\left\{ C_1 \cdot e^{-2 \cdot x} - \frac{2 \cdot \sin(x)}{5} - \frac{\cos(x)}{5} \right\}$$





Lorenz-Attraktor erstellt mit Lorenz.pas ©Haq4

Differentialgleichungssystem:

Die oberen Bilder zeigen den Attraktor gleichzeitig in drei räumlichen Ansichten. In der 2. und 3. Reihe ist das Verhalten von benachbarten verschiedenfarbigen Startpunkten dargestellt. Besonders bei der Entstehung kann man sehen, wie sich die Bahnen der Nachbarpunkte auseinanderentwickeln. Insgesamt aber werden sie von der **Grenzfigur = Limesfigur = Attraktor** eingefangen, und je länger man beobachtet, desto dichter wird der Attraktor. In Wahrheit schneiden sich nie zwei verschiedene dieser Bahnen, was ein

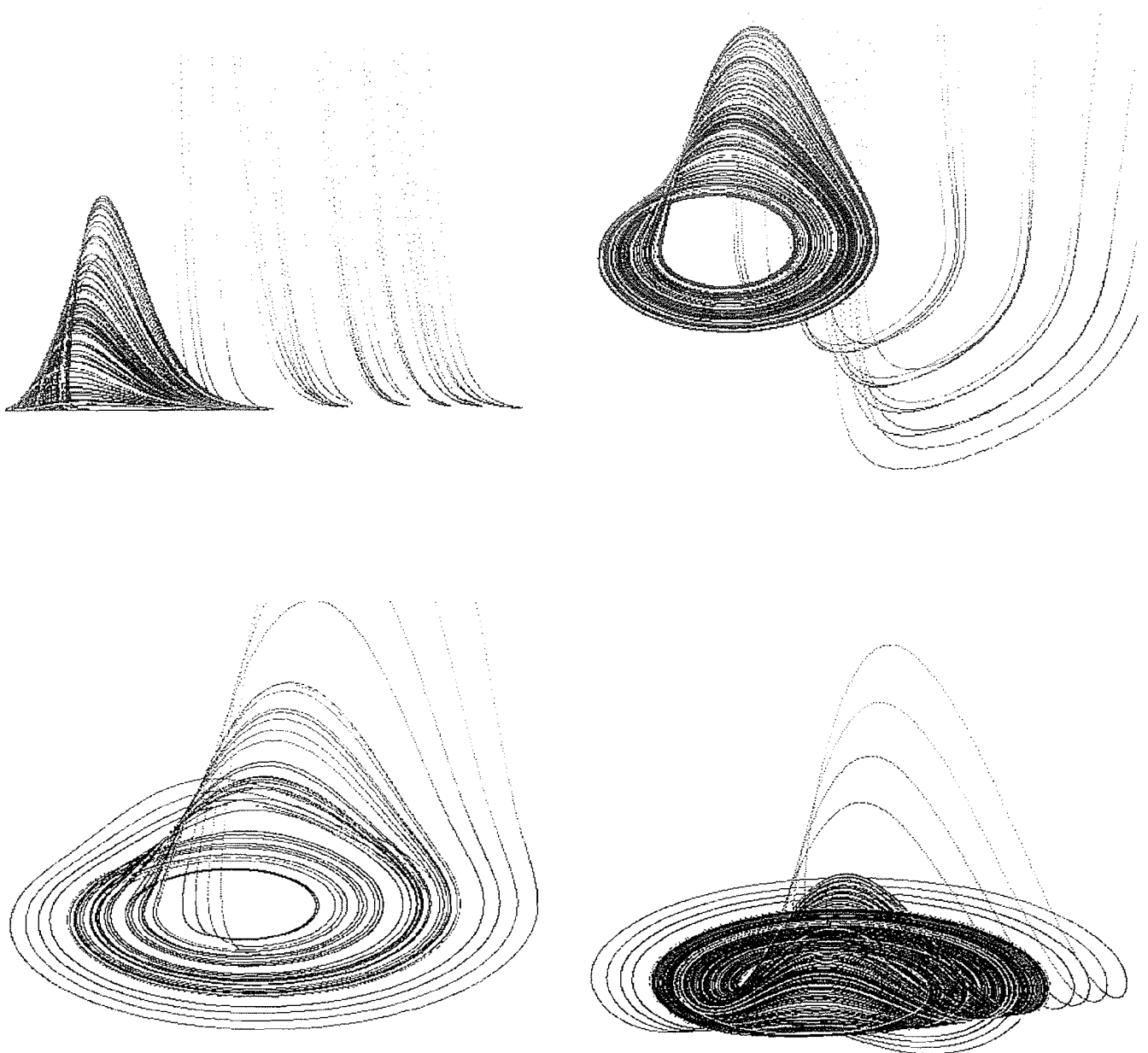
$$\begin{aligned} dx &= (-\sigma x + \sigma z) dt \\ dy &= (rx - y - xz) dt \\ dz &= (-bz + xy) dt \end{aligned}$$

Bildschirm nicht wiedergibt. Auch eine einzelne Bahn hat keine Kreuzungspunkte

Dateien: loreinz.wpg, lor2creu.wpg, lor3crme.wpg, lorbum1/2/3.wpg, lorundwpg, lorbu1.wpg, lorbusd.wpg, lorsaanal.wpg

$\sigma = 10$ $b = 8/3$ $r = 28$

Dies: Lorenz.txt



Rössler-Attraktor erstellt mit Lorenz.pas ©Ha94

Differentialgleichungssystem:

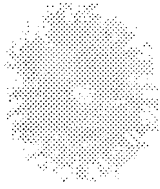
Dargestellt ist das Verhalten von benachbarten verschiedenfarbigen Startpunkten. Besonders bei der Entstehung kann man sehen, wie sich die Bahnen der Nachbarpunkte auseinanderwickeln. Insgesamt aber werden sie von der **Grenzfigur = Limesfigur = Attraktor** eingefangen.

In Wahrheit schneiden sich nie zwei verschiedene dieser Bahnen, was ein Bildschirm nicht wiedergibt. Auch eine einzelne Bahn hat keine **Kreuzungspunkte**.

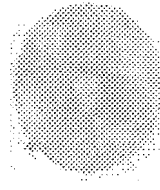
$$\begin{aligned} dx &= (-y-z) dt \\ dy &= (x+ay) dt \\ dz &= (b-cz+xz) dt \end{aligned}$$

Dateien: roesgard.wpg, roeshoch.wpg, roesbrtl.wpg, roeshutd.wpg (roeshutl.wpg)

Dies: roessler.txt

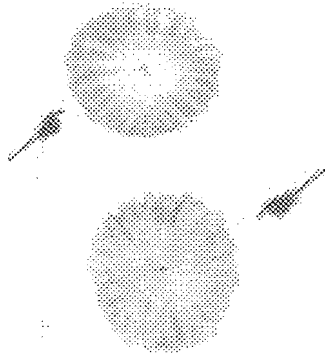


Strauchtomate aus einem biologisch-dynamischen Anbau

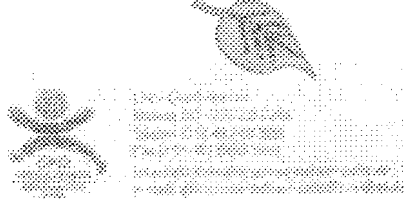


Strauchtomate aus normalem Anbau

Das Erstaunliche ist, dass Chromatografien von Früchten oder Gemüse entsprechende Formen je nach Anbauart aufweisen.

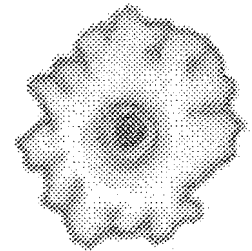
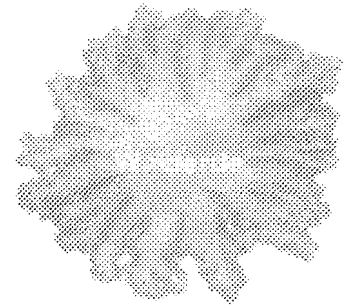


Erde eines Gemüsegartens in Groß Hehlen



TELLING EARTH

Wir untersuchen Erdproben mit Hilfe der Rundbildchromatografie. Das ist vereinfacht ausgedrückt ein Aufsaugen von einem Aufguß in Papier. Dabei entstehen Muster, die über den biologischen Zustand der Erde Auskunft geben. Je formenreicher die Muster sind, desto mehr biologische Aktivität hat die jeweilige Probe.



Erde eines Ackers in Groß Hehlen

Wieland Seever, Lehrer der GHS Groß-Hehlen* bei Celle hat im EXPO-Jahr 2000 diese Steigbilder gemacht und mit dem von mir** für die Schule aufbereiteten Box-Dimension-Messverfahren ausgewertet. (Siehe Extrablatt)
Oben Grünkohl aus biologisch-dynamischem Anbau, unten aus üblichem Gemüsegarten. So lässt sich zeigen, dass die fraktale Dimension bei hochwertigem Obst und Gemüse größer ist als bei minderwertigen.

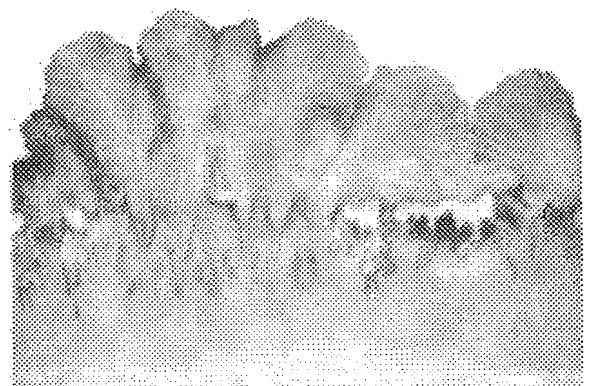
* www.ghs-gross-hehlen-celle.de

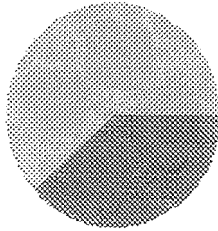
(Mit freundlicher Genehmigung von Wieland Seever)

** www.doerte-haftendorn.de

-> Chaos-> Dimension-> Boxdimension

Rechts Steigbild von Orangensaft
"Arkana" 29597 Stoetze





| | | |
|------------------------------|---|--|
| Der Kreis | ist im "Goldenen Schnitt" geteilt, wenn sich der kleinere Teil zum größeren verhält wie der größere zum Ganzen. | |
| Das Rechteck | | |
| Die Unterkante des Rechtecks | | |

Wenn also das Ganze 1 ist und der größere Teil g , dann muss gelten:

$$\frac{1-g}{g} = \frac{g}{1}, \text{ das ist eine quadratische Gleichung mit der positiven Lösung}$$

$$g = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033989... \text{ Der Kehrwert dieser Zahl ist der Betrag der}$$

negativen Lösung $g^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033989... = 1 + g$

Obiges Rechteck heißt "goldenes Rechteck", weil seine Seiten im "goldenen

Verhältnis" (golden ratio) stehen. Meist bezeichnet man $\varphi := g, \Phi := 1 + \varphi = \frac{1}{\varphi}$.

Zeichnet man die Punkte der komplexen Rekursion $f(z) = a \cdot z = q e^{2i\varphi\pi} \cdot z$ mit

$q=0.999$ und diesem $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, so ergibt sich eine Sonnenblume:

Der Faktor a verkürzt den Abstand vom Ursprung um

$1^\circ / \infty$ und dreht um

$$\varphi \cdot 360^\circ = 222,4922^\circ$$

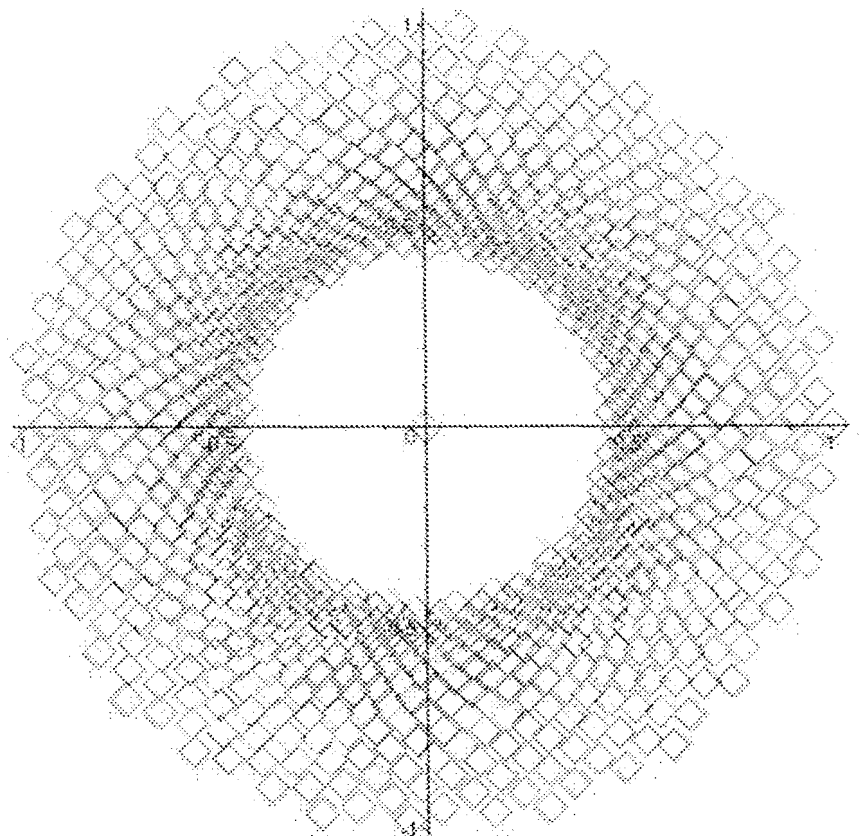
$$= -137,5078^\circ$$

Start ist bei 1.

Erst nach 55 Schritten und 21 Runden kommt der Punkt knapp unter 1 zustande.

Von dort geht ein Spiralarm zur Mitte. Der nächst tiefere Spiralarm beginnt nach 21 Schritten. Die Fibonacci-Zahlen 55, 34, 21, 13, 8 lassen sich bei den Spiralarmnummern finden.

Überhaupt sind die Fibonacci-Zahlen im Goldenen Schitt und vielen Phänomenen zu finden.



ContinuedFractionForm[
ContinuedFraction[$\sqrt{4703}$, 11]]

$$68 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}}}$$

Kettenbruchentwicklung

Jede reelle Zahl kann in einen Kettenbruch entwickelt werden:

- ① Verwende den ganzzahligen Anteil a für den Kettenbruch.
- ② Subtrahiere a, bleibt kein Rest, bricht der Kettenbruch hier ab.
- ③ Bilde den Kehrwert des Restes, Wiederhole ab ①.

Die Kettenbruchentwicklung:

- bei rationalen Zahlen bricht sie ab.
- bei den irrationalen Zahlen bricht sie nicht ab.

Bringt man die

Kettenbruchentwicklung auf einen einzigen Bruch

$$x \approx x_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}} \text{ der Gestalt } \frac{p_n}{q_n}, \text{ dann gibt es keinen}$$

anderen Bruch mit einem Nenner kleiner als q_n , der x besser approximiert (annähert).

Der Fehler ist $|x - x_n| < \frac{1}{a_{n+1} \cdot q_n^2}$. Je größer also a_{n+1} ist, desto kleiner ist der Fehler.

Ein besonderer Kettenbruch, der unendlich so weiter geht. Es ist der Kettenbruch, der sich am schlechtesten durch eine rationale Zahl approximieren lässt.

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}}}$$

$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$$

$$1, 2, 1.5, 1.6666, 1.6, 1.625, 1.615, \dots - > 1,618033989\dots$$

Dieser Wert und sein der Kehrwert sind die zum "Goldenen-Schnitt" gehörigen Zahlen.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \dots - > 0.618033989\dots \quad \text{Der Kettenbruch ist "selbstähnlich".}$$

Lineare Automaten

Eine Zelle hat n Nachbarn.

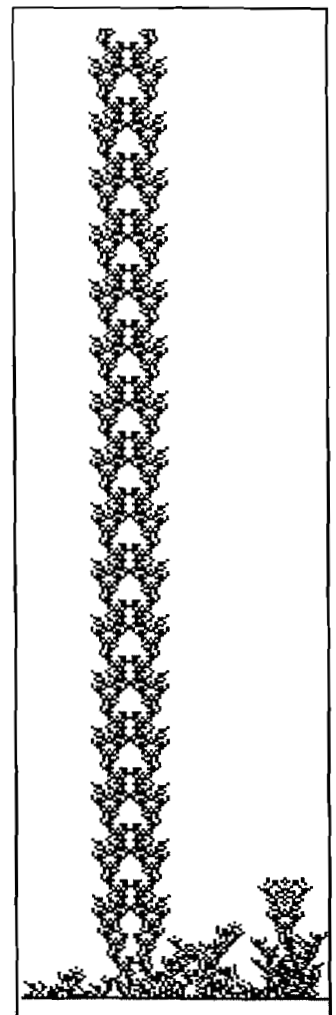
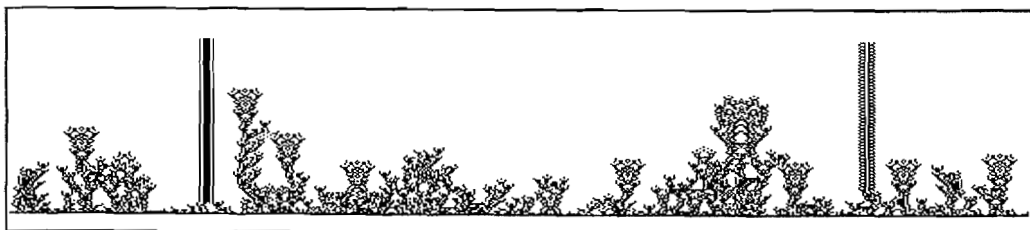
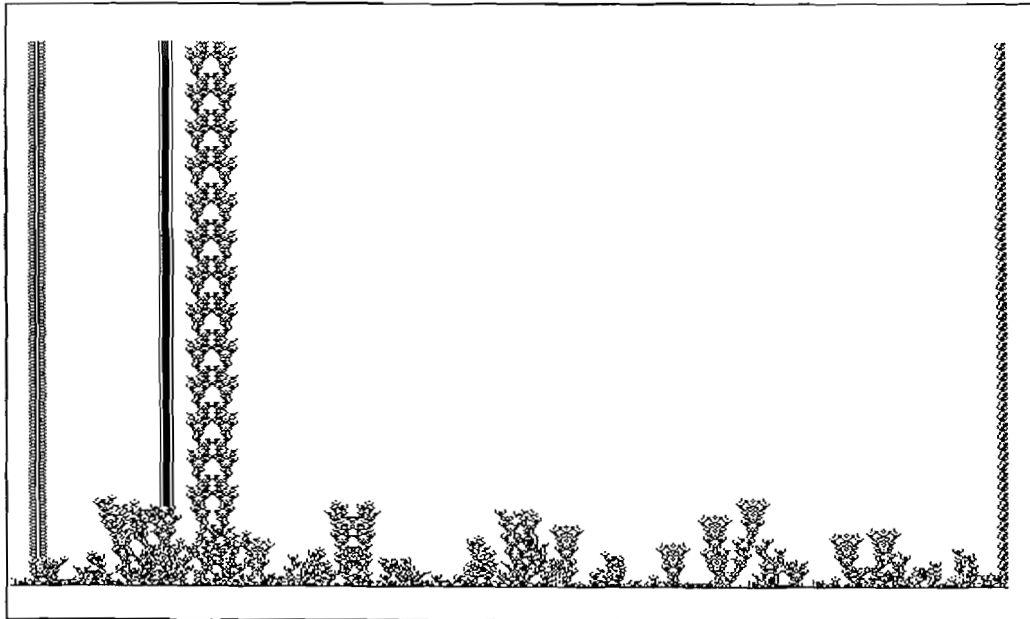
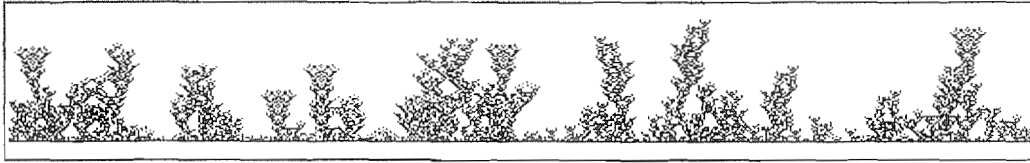
Regel 1

Eine lebende Zelle überlebt, wenn die Zahl ihrer Nachbarn genau a oder b oder... ist.

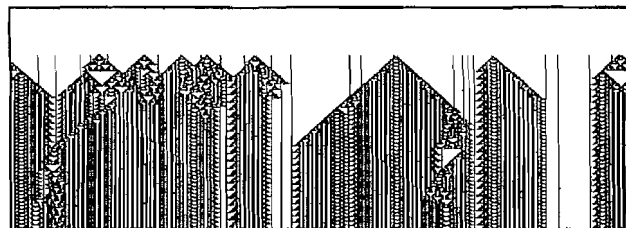
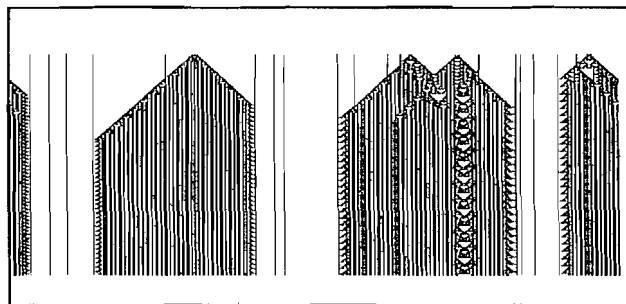
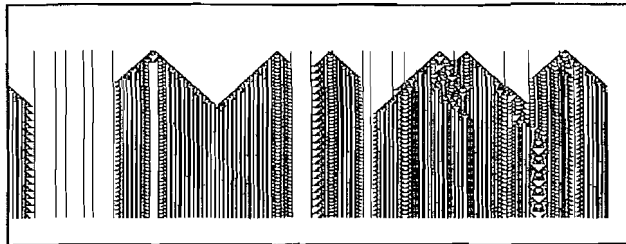
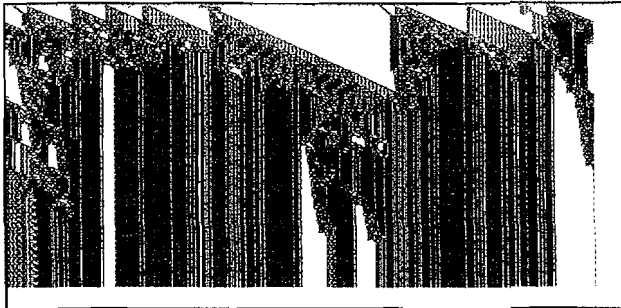
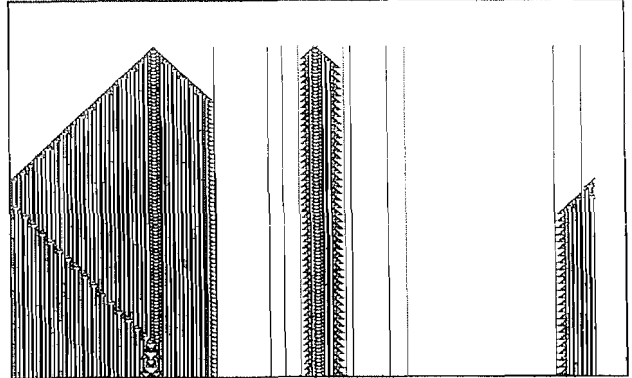
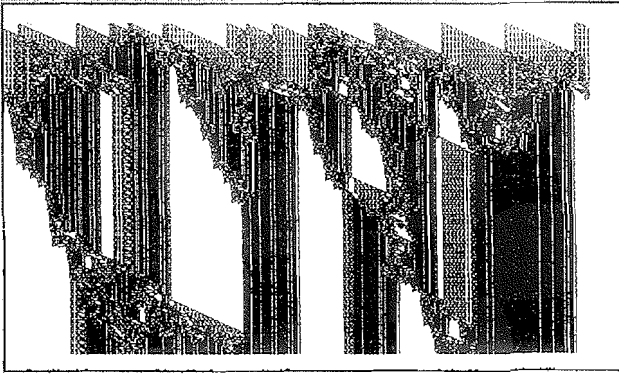
Regel 2

Eine tote Zelle wird geboren, wenn die Zahl ihrer Nachbarn x oder y oder... ist.

Prg. LINZAUTO
Startline enthält zufällig z.B. 20% Punkte.



Variiert ist in den obigen Bildern vor allem die Startbelegung.
Durch die verschiedene Dichte der Punkte "wachsen" andere "Pflanzen" hoch.
Aber auch die zufällige Wahl der Startpixel hat einen Einfluß auf das Bild.
Bei Änderung der **Regeln** ergeben sich noch ganz andere Formen und Muster.



Zelluläre Automaten können durch Zeichnen auf dem Karopapier verwirklicht werden. Zellen, die (hier schwarz) gefärbt sind, heißen "lebendig", die anderen heißen "tot". Das Spiel läuft taktmäßig ab, und es gibt feste Regeln, nach denen eine lebende Zelle im nächsten Takt noch lebt, bzw. nach denen Zellen geboren werden. Diese Regeln beziehen sich auf die Nachbarschaft der betrachteten Zelle.

Der bekannteste zelluläre Automat ist wohl das "Spiel des Lebens" (Game of Life) von J. Conway.

(Das ist auf der Diskette Ha, lebenfrb.exe)

Diese Bilder hier sind von **linearen** zellulären Automaten erzeugt. D.h. alle Zellen sind (oben) in einer waagerechten Reihe und die nächste Generation ist in der Reihe darunter dargestellt.

(Verwirklichung durch Diskette Ha, linzauto.exe)

Beim Start können zufällig p% der Pixelpunkte der obersten Reihe als lebendig gewählt werden.

Die **ersten beiden Bilder in der linken Spalte** haben eine Startbelegung von 10% und folgende Regeln:

Die "Nachbarschaft" besteht aus je 3 Zellen links und rechts. Lebende Zellen sind hier schwarz.

1) Lebende Zellen überleben, wenn sie 4 oder 5 lebende Nachbarn haben, andernfalls sterben sie.

2) Tote Zellen werden geboren, wenn sie 2 oder 3 lebende Nachbarn haben, sonst bleiben sie tot.

Die **anderen Bilder** beziehen sich auf Startbelegungen von 4%, 3%, 4%, 2% und die Regeln:

Die Nachbarschaft besteht aus je 2 Zellen rechts und links und der Zelle selbst.

1) Lebende Zellen überleben, wenn sie 1,2 oder 3 lebende Nachbarn haben, andernfalls sterben sie.

2) Tote Zellen werden geboren, wenn sie 2 lebende Nachbarn haben, sonst bleiben sie tot.

Oft kommt es zu stabilen Mustern.

Dies ist linzauto.txt

Computer und Unterricht 7.2.01 ▶ Zelluläre Automaten ◀

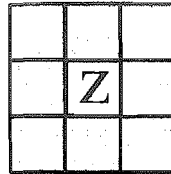
Dr. Dörte Haftendorn

Spiel des Lebens

21. Januar 1997

Zelluläre Automaten können zunächst durch Zeichnen auf dem Karopapier verwirklicht werden, für freiere Untersuchungen ist aber der Computer nötig. Der bekannteste zelluläre Automat ist wohl das "Spiel des Lebens" (Game of Life) von J. Conway. (Das ist auf der Diskette Ha, leben.exe)

Eine Zentralzelle Z hat 8 Nachbarn (graue Karos ("Moore-Umgebung")). Die Zellen können zwei Zustände haben. Einige sind "lebendig", oder



Regeln für eine Zelle z :
 Aufwachen bei genau 3 wachen Nachbarn.
 Wachbleiben bei 2 oder 3 wachen Nachbarn

"wach", die anderen heißen "tot" oder "schlafend". Das Spiel läuft taktmäßig ab, und es gibt feste

Regeln, nach denen eine lebende (wache) Zelle im nächsten Takt noch lebt (wach ist), bzw. nach denen Zellen geboren werden (aufwachen). Diese Regeln beziehen sich auf die Nachbarschaft der betrachteten Zelle.

Im Bild rechts ist verfolgt, wie sich eine Fünferreihe entwickelt. Am 6. und 7. Tag entsteht abwechselnd dieselbe Figur, die man Verkehrsampel nennen könnte.



Es lohnt sich auch die Entwicklung der anderen Stangen der Längen 1 bis 20 z.B. zu untersuchen. Einige "sterben aus" (z.B. 6,14,15,18,19), 7 ist besonders reichhaltig und wird dann zu "Imkerei", 10 landet schließlich in einer 15-ner Periode usw.

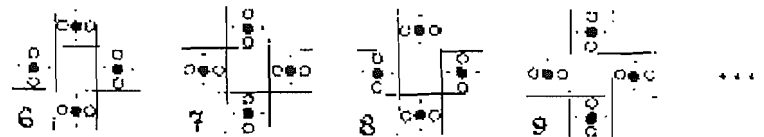


Bild 3.1 Aus einer Fünferlinie entsteht eine Verkehrsampel (= v. Blinker)

Unten sind noch unveränderliche Formen angegeben. Es lohnt sich auch, das Schicksal der Pentominos (Figuren aus 5 Karos) zu verfolgen.

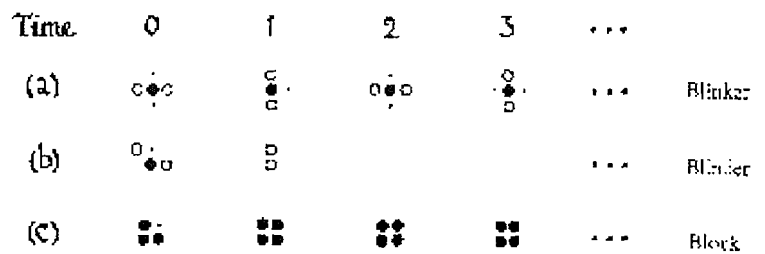


Bild 3.2 Wenn ein Zellentupfer überlebt, entsteht er meist ein Blinker oder ein Block

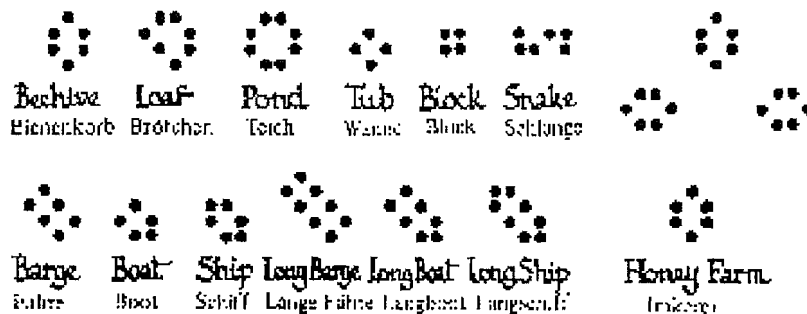


Bild 3.3 Einige der gängigen Formen von Still-Leben

Computer und Unterricht ▶ Zelluläre Automaten ◀

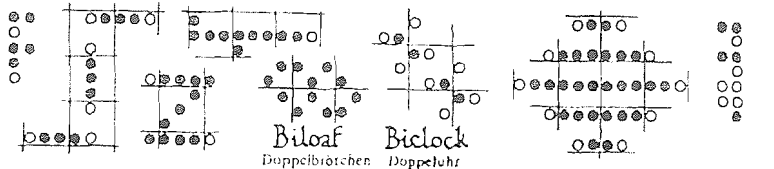
7.2.02

Dr. Dörte Haftendorn

Spiel des Lebens Beispiele

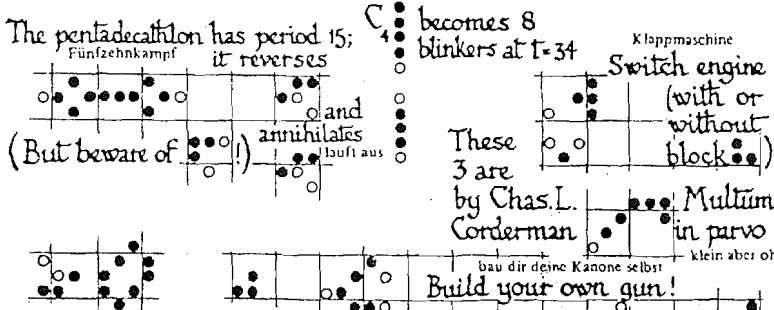
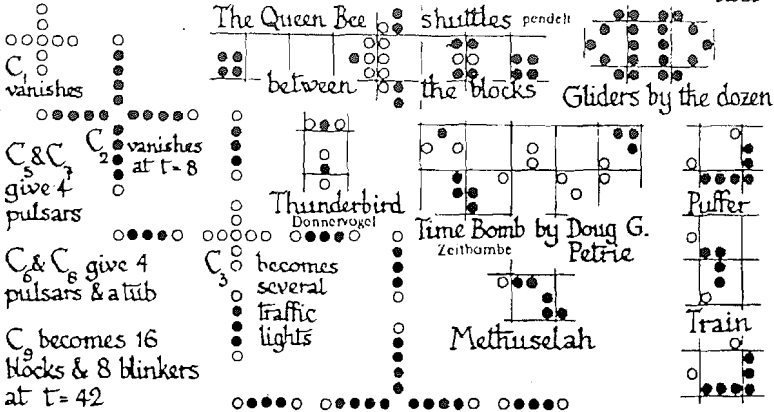
7. November 1995

Hier seien einige Beispiele vorgestellt aus dem Buch: Berlekamp/ Conway/Guy Gewinnen Bd.4 Vieweg 1985 ISBN 3-528-08534-7.

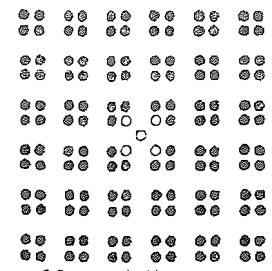


All these are "pure" glider generators

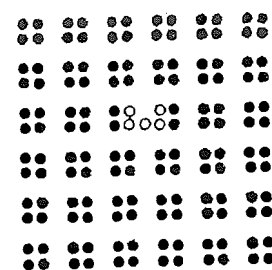
becomes 5 blinkers, 2 ponds & 6 blocks at $t=173$. gives 8 blinkers & 8 gliders which crash to make 8 blocks



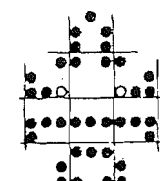
Glider causes havoc! Durcheinander



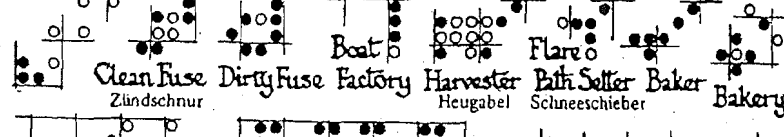
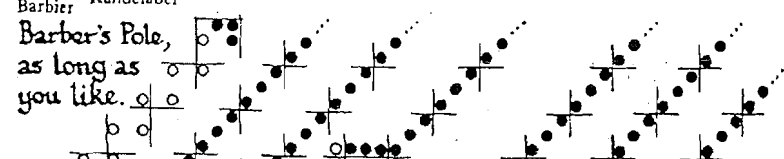
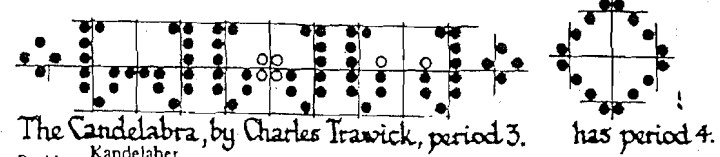
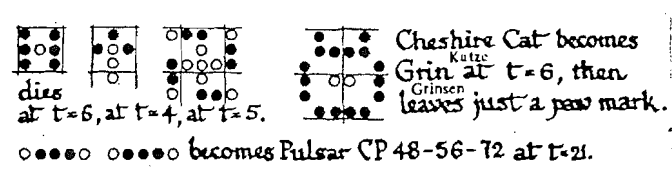
Mosaic kills virus



Virus kills mosaic



Mathematician by David Buckingham



Another crash S& glider from MIT.

