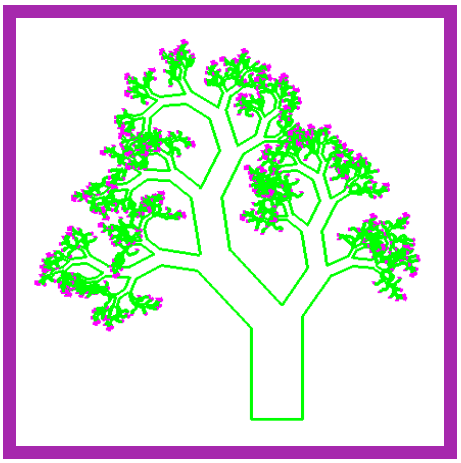
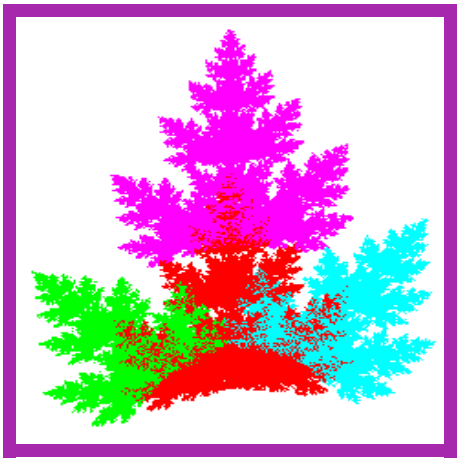
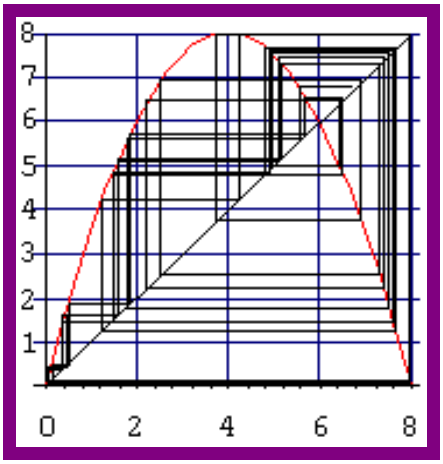
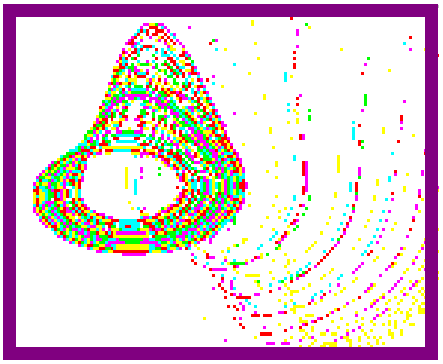
Fraktale Geometrie -- Chaos und Ordnung

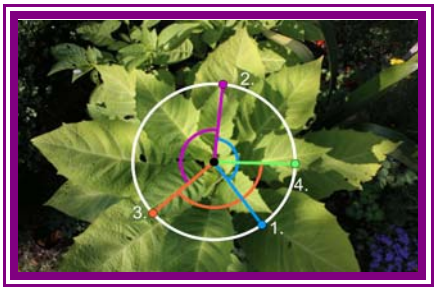


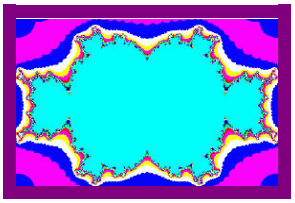


Prof. Dr. Dörte Haftendorn
Leuphana Universität
Lüneburg
Modul Moderne Mathematik
Teil a) Fraktale





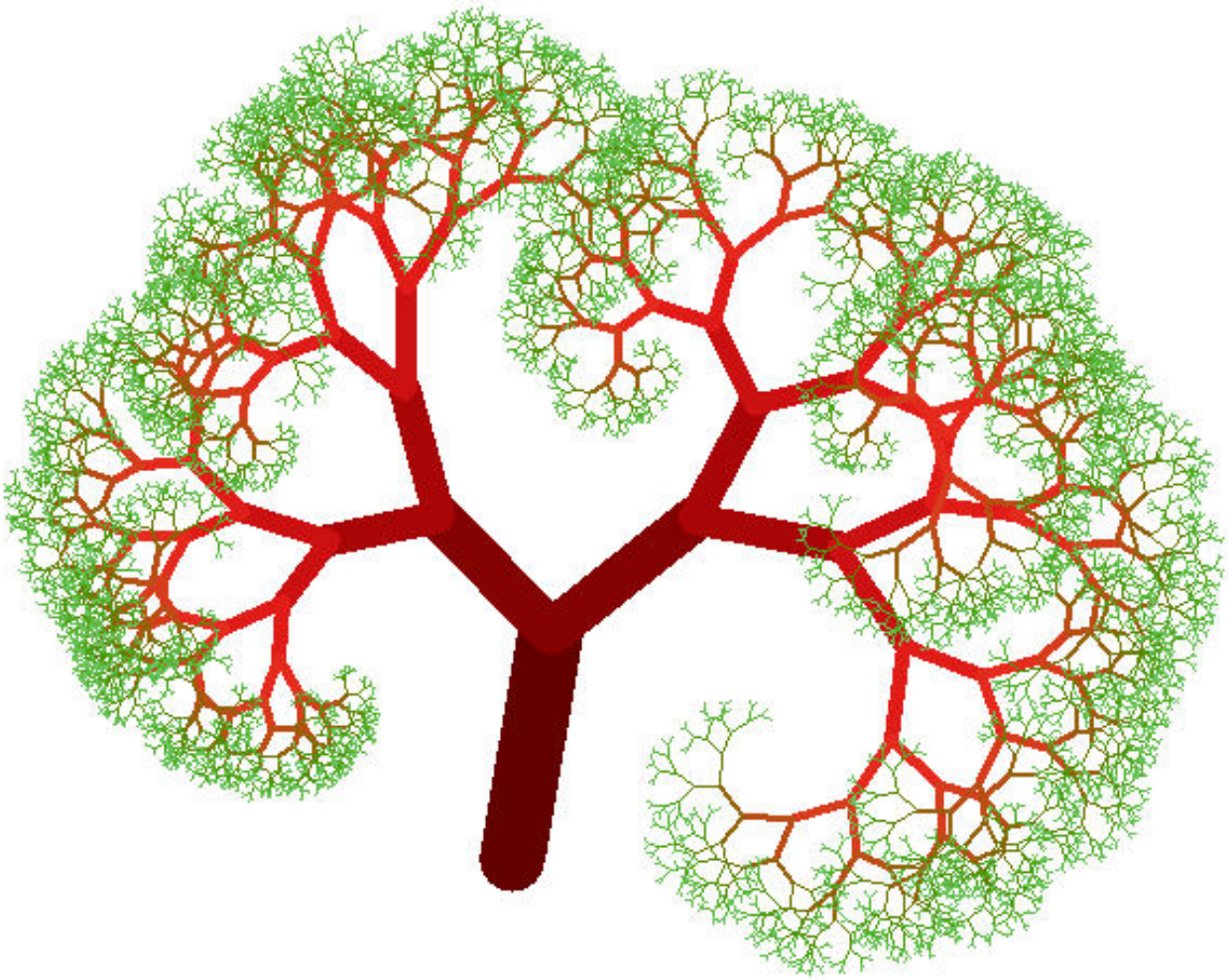




Lassen Sie sich in die vielfältige Welt der Fraktale einführen.
Lernen Sie die Ordnung in den nur scheinbar chaotischen Vorgängen kennen.
Erfahren Sie, wie durchsichtig und einfach die mathematischen Grundlagen sind. Erkunden Sie die Möglichkeiten, selbst Fraktale zu erfinden.
Mit dem mathematischen Schulwissen und dem Mut zu neuen Wegen ausgestattet, haben Sie gute Chancen, an dieser Vorlesung Freude zu haben. Diese Blätter sind eine -unvollkommene- Zusammenstellung aus den im Internet verfügbaren Seiten
http://haftendorn.uni-lueneburg.de oder www.mathematik-verstehen.de Bereich Fraktale Geometrie

Obige Abbildungen zeigen Beispiele für
(1) Fraktale mit rekursiven Wegen, Lindenmayersysteme
(2) Fraktale mit iterierten Funktionen , IFS,
(3) Chaotisches Verhalten an der logistischen Parabel,
(4) Attraktoren in dynamischen Systemen, Rösslerhut
(5) Der Goldene Winkel in der Natur
(6) Verwandte des Apfelmännchens.
Weitere Themen der Vorlesung sind: Juliamengen, das Feigenbaumscenario, fraktale Dimension, zelluläre Automaten, Anwendungen in anderen Wissenschaften, Bedeutung und Möglichkeiten

Ha 2010



Die nämlichen Bäume

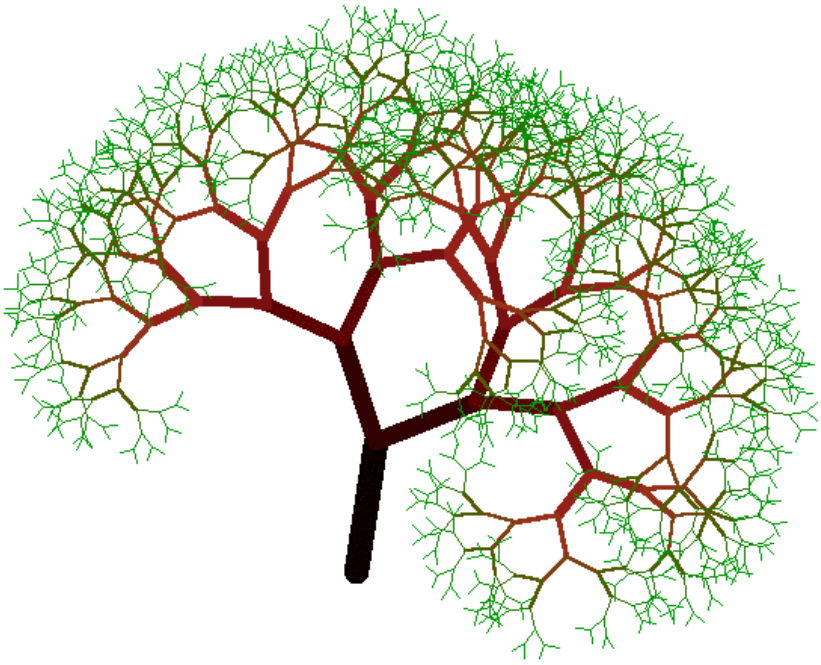
Auf der nämlichen Erde
stehen die nämlichen Bäume beisammen
und auch am heutigen Tag
Schlagen die Blätter
Raschelnd zusammen

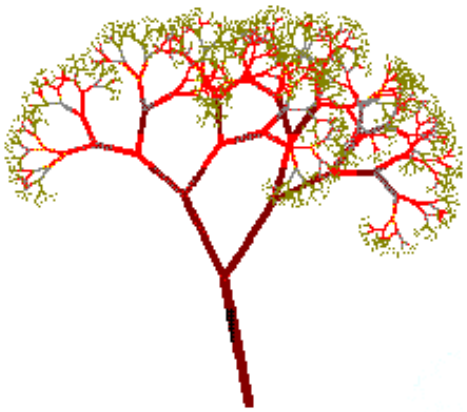
Onoe Saishû

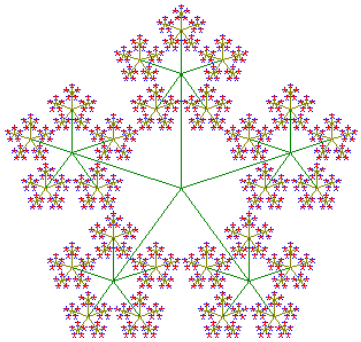
Ha 2010

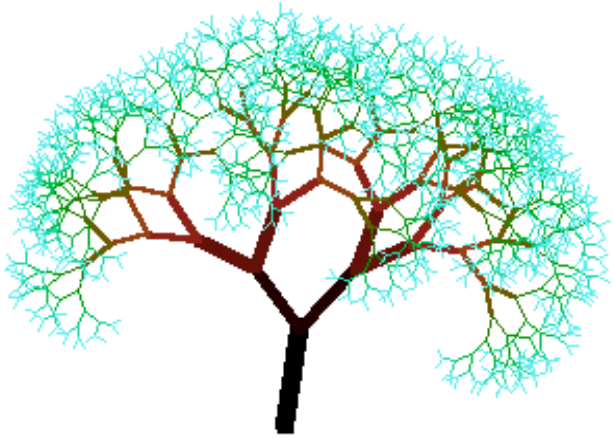
Fraktale Bäume

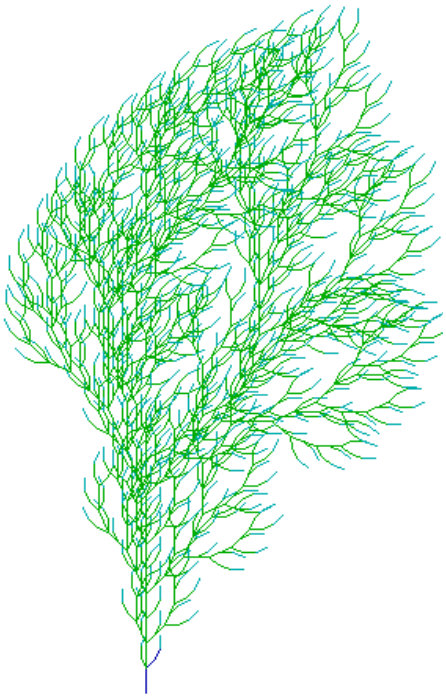
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 3. Juli 2003

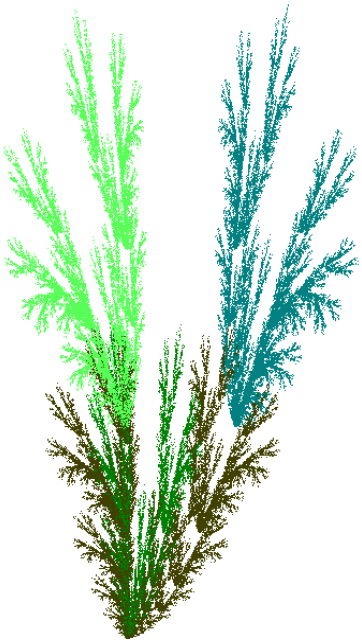












1	**Wegfraktale**	
1.1	rekursive Prozeduren(Prg.**Zweig**)	Reichhaltiges Programm, vieles zum Ansehen, Zufalls-Baum u.a.
1.2	Lindenmayersysteme (Prg **Linde**)	Eigene Erfindungen möglich,Variationen empfohlen, reichhaltige Auswahl. Das Verzeichnis LINDATEN ist wichtig.
2	**Ifs-Fraktale**	
2.1	Chaosspiel (prg **Sierpi**)	Einführungsbeipiel in das Thema.
2.2	Bekannte IFS-Fraktale Prg(**IFS**)	Reichhaltiges Programm mit vielen kreativen Möglichkeiten.Variationen empfohlen. Das Verzeichnis IFSDATEN ist wichtig.
3	**Logistische Parabel** prg **Logisvgl**	Verständnis-Programm, man kann nur den Parameter ändern
3.1	Darstellungen rekursiver Folgen	
3.1.1	Iteration an der Logistischen Parabel	
3.2	Feigenbaumszenario(prg **Kaosfeig**)	Man kann eigene Ausschnitte wählen und sich die "Inseln der Ruhe" genauer ansehen.
4	**Apfelmännchen (prg Apfjulia)**	Reichhaltiges Programm, in dem es viele schöne Bilder zu entdecken gibt.
4.1	Komplexe Zahlen, Darstellung	Vorsicht mit zu hoher Iterationstiefe.
4.2	Erklärungen zum Apfelmännchen	Folge im Einzelnen ansehen: opt.<v>
4.2.1	Mandelbrot-Rekursion	
4.3	Juliamengen	
4.3.1	Zusammenhang mit der Mandelbrot-Rekursion	
4.4	Verwandte Rekursionen	= TYP... kann gewählt werden Freie Erfindung von verallgemeinerten Mandelbrotmengen nur in Pascal mgl.
5	**Dynamische Systeme** (prg **Lorenz**)	Man kann sehen, wie die Attraktoren beim Wandern der Punkte entstehen und wie benachbarte Punkte auseinanderlaufende Bahnen haben. Auch als Anaglyphen mit rotgrüner Brille räumlich zu sehen. Man kann die Blickrichtung ändern.
5.1	Veranschaulichung von Differentialgleichungen	
5.2	Lorenzattraktor	
5.2.1	Visualisierung des Lorenzattraktors	
5.3	Weitere Dynamische Systeme	
5.3.1	Roesslerattraktor	

Zelluläre Automaten, Fraktale und Ordnung in der Natur	
Progr. **lebenfrb** =Game of Life (Conway)	Man setzt Muster auf ein Karogitter und sieht sich an, wie es sich von Takt zu Takt entwickelt.(auch für Kinder ab 11 J.)
Progr. **linauto** und **linzauto**	Lineare Zell. Automaten, erzeugen von selbst div. Muster. Regeln sind variabel. Man kann elem. Elektronik simulieren.
Progr. **drahtwlt**	

Initiator  , meist ein gerader Strich, allg. ein Linienelement.

Generator  ist aufgebaut mit den Linienelementen des Initiators.

Der Generator klärt, durch was der Initiator ersetzt werden soll. Am einfachten geht es, wenn man den Generator aus geraden gleichlangen Stücken zusammensetzt.

<u>Regel</u>: Jedes Linienelement (zunächst des Generators,dann in jeder Stufe) wird durch den verkleinerten Generator ersetzt. Das wird stets wiederholt.

Es sind hier auch vielfältige Variationen möglich, z.B. können zwei Generatoren im Wechsel oder in zufälliger Wahl wirken. Es könnten auch nur ein Teil der Linienelemente ersetzt werden u.v.m.

Realisierung von ✍ 

Realisierung mit rekursiven 🐢 Turtlegraphik-Prozeduren

fd(a) steht für : laufe a Pixel vorwärts, lt(b) steht für : drehe den Kopf um den Winkel b nach links, entsprechend rt(b) nach rechts.

```
Procedure koch(stufe:integer);
begin  if stufe=1 then begin  fd(a);lt(60);fd(a);rt(120);fd(a);lt(60);fd(a);    end
       else begin     koch(stufe-1);lt(60);koch(stufe-1);rt(120);koch(stufe-1);lt(60);koch(stufe-1);  end;
end;{proc}
```

Realisierung mit Lindenmayer-Systemen[1)] ✻✼❀✻❄

Aus einem Axiom und einer oder mehreren Ersetzungsregeln wird zuerst entsprechend der gewählten Stufe ein langes Wort gebildet.
Dessen Buchstaben werden dann einzeln gelesen und in 🐢 Turtlegraphik-Befehle umgesetzt.

Dabei steht F z.B: für fd(a), + für lt(b) , - für rt(b) .

Für die Kochkurve ist das **Axiom F** (Stufe 0) , die **Ersetzungsregel F⇨ F+F--F+F** (Stufe 1),
In Stufe 2 ist dann **F+F - - F+F + F+F - - F - - F+F - - F + F+F - - F+F** entstanden.
Für Stufe 3 ist wieder jedes **F** mit der Ersetzungsregel zu ersetzen, u.s.w. .

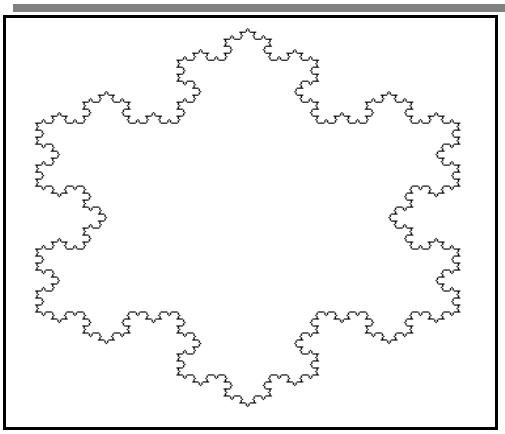
Stets wird beim Zeichnen ein **Weg** durchlaufen, deshalb habe ich diese Fraktale **Wegfraktale** genannt.
In der einschlägigen Literatur wird meist nur "klassische Fraktale" (weil es sie schon länger gibt) gesagt, oder sie bekommen den Namen L-Systeme, nach der letzten der obigen Konstruktionen..

DER KREATIVITAET WERDEN (FAST) KEINE GRENZEN GESETZT

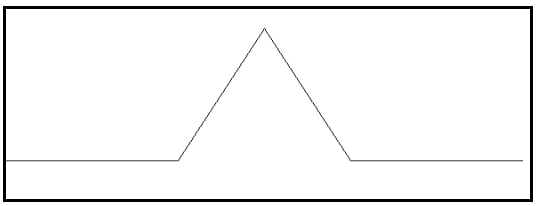
1) Ursprünglich 1968 entwickelt von dem Biologen Aristid Lindenmayer zur Beschreibung des Pflanzenwachstums.

Fraktale Wegfraktale Kochkurve und Varianten

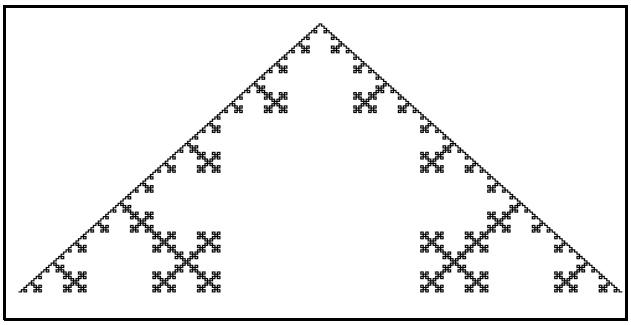
Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt Mrz. 97, Apr. 2005



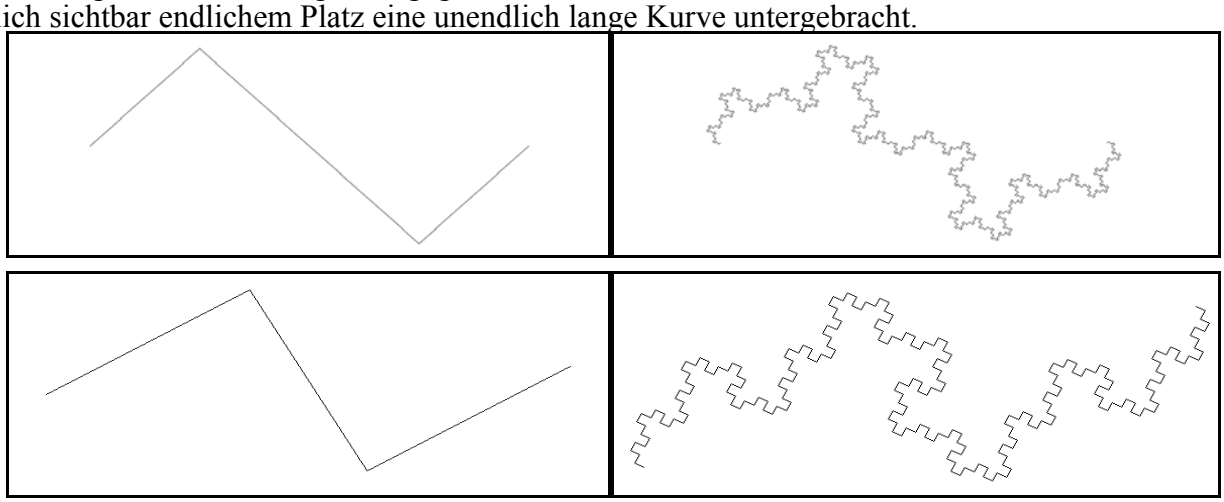
Die Kochkurve , hier dreifach als **Schneeflockenkurve** gestaltet, ist ein Paradebeispiel für selbstähnliche Fraktale. Ihr *Axiom* ist **F** , bzw **F--F--F--,** die Ersetzungsregel, dh. der *Generator* , ist **F+F--F+F,** mit



+/-=60/.



Zahlreiche Varianten sind denkbar.
Für die Verwirklichung auf Karopapier eignet sich besonders der Generator F+F-F-F+F mit +/- = 90/ . Das Fraktal könnte man ***Quadro-Kochkurve*** nennen. Rechts ist die 5.Stufe gezeichnet, man kann aber deutlich "negativ" den Generator- ein in der Mitte aufgesetztes Quadrat- und auch die nächsten Stufen erkennen.
Auch als Kreuzstichmuster hat die Quadro-Kochkurve schon gedient, eigentlich aber hat der schwedische Mathematiker **Helge von Koch** 1904 die obige Kurve eingeführt, um ein Beispiel für eine nirgends differenzierbare und dennoch stetige Kurve aufzuzeigen.
Aber sie hat noch weitere bemerkenswerte Eigenschaften: Die Länge der Kurve wächst bei jedem Schritt mit dem Faktor q=4/3 , (bei der Quadro-Kochkurve ist q= 5/3) ,also bilden die Längen der einzelnen Stufen eine geometrische Folge, die gegen Unendlich strebt.. Damit ist bei dem Schneeflockenfraktal auf deutlich sichtbar endlichem Platz eine unendlich lange Kurve untergebracht.



Die beiden Generatoren , die hier zusammen mit ihrem Fraktal in 5. Stufe abgebildet sind, zeigen einen bemerkenswerten Unterschied. Das rechte untere Bild scheint gedreht zu sein. Die Generatoren sind:

oben : +F--FF++F- mit +/- = **45/** und unten: +F---F+++F- mit +/- = **30/**

Zeichnet man sich den zweiten Generator wirklich einmal ordentlich zu einem waagerechten Initiator auf, so stellt man fest, dass tatsächlich der Endpunkt des Generators höher liegt. Mit Tangens gerechnet sind es 3,435/ für jede Stufe. Überhaupt ergeben sich hier zahlreiche lohnende Anwendungen für die Kenntnisse aus Klasse 9 und 10. Die Schrittweite F muss ja bei jedem Schritt passend verkleinert werden, damit die Zeichnung insgesamt etwa dieselbe Größe behält.
Unten gilt F_{neu}=1/S5 @F_{alt}= 0,4472 @F_{alt}.

Fraktale Wegfraktale Zweig Arbeitsblatt

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 28. Januar 1992, Apr. 2005

Stufe 1

Dieses ist das Grundelement. (Generator)
Es besteht aus 5 gleichlangen Strichen.
Rechne im Folgenden mit 3 cm für jeden dieser Striche.
Es hat eine Weglänge w_1 von knapp 15 cm und eine Stiellänge von 9 cm.

Die folgenden Fragen sind eher für (als für Geodreieck .

Stufe 2

Jeder gerade Strich aus Stufe 1 ist nun durch einen kleinen Baustein vom Typ Stufe 1 ersetzt.
Mit welchen Faktor muss man jeden kleinen Baustein von Stufe 2 strecken, damit er so groß wird wie Stufe 1? Antwort: Mit k=_____
Wieviele solcher Bausteine sind es?
z=_____

Welche Weglänge hat Stufe 2? w_2=_____

Stufe 3

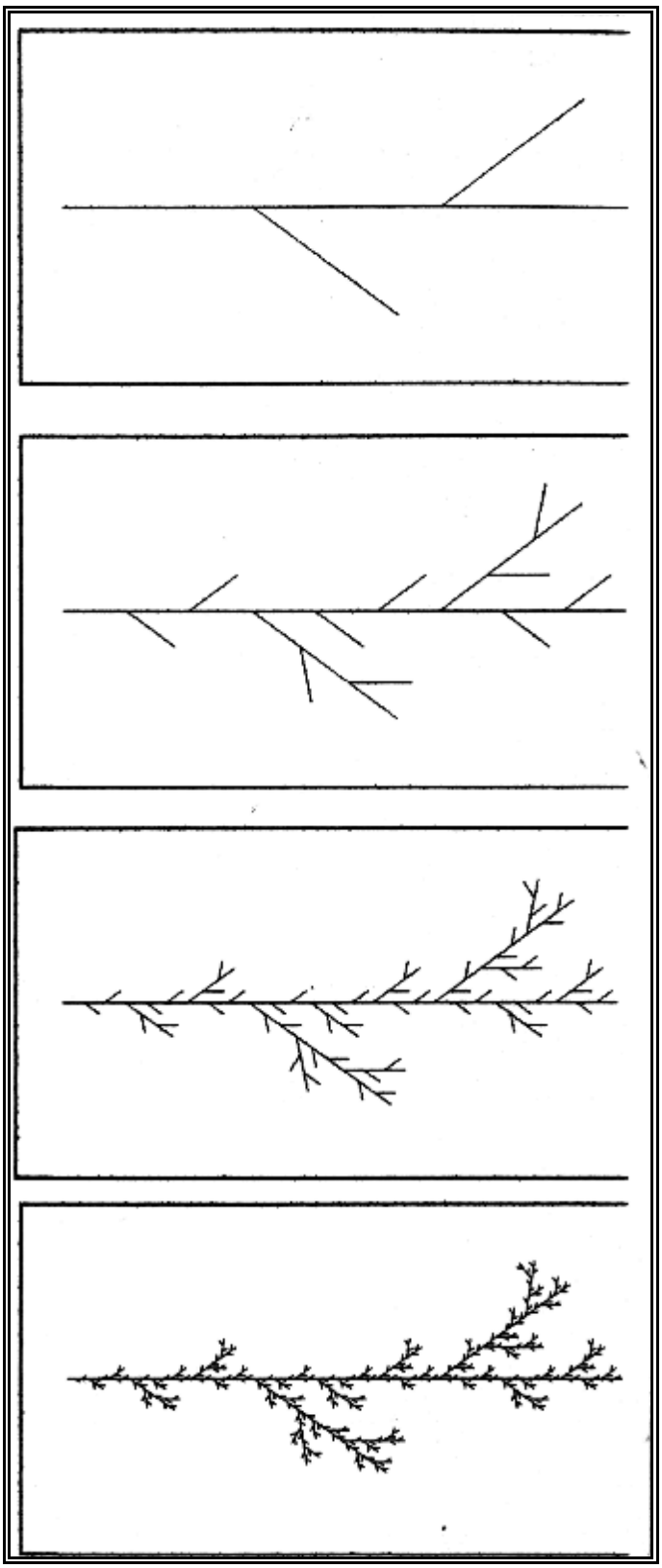
Jeder gerade Strich aus Stufe 2 ist nun durch einen kleinen Baustein vom Typ Stufe 1 ersetzt.
Man erkennt Bausteine, die wie die vorige Stufe aussehen.
Wieviele Bausteine vom Typ Stufe 2 hat Stufe 3?
z=_____
Mit welchem ***Streckfaktor*** gelangt man vom Baustein Typ Stufe 2 in Stufe 3 nach Stufe 2?
k=_____
Welche Weglänge hat Stufe 3? (w_3=_____

Stufe 4

Beantworte die entsprechenden Fragen wie oben:
z=_____
k=_____
Offenbar sind k und z immer gleich.
Kann man die Weglänge mit Verwendung von k und z ausdrücken?
Wie verändert sich die gezeichnete Weglänge von Stufe zu Stufe? Begründe:

$$w_{n+1} = \frac{5}{3} w_n$$

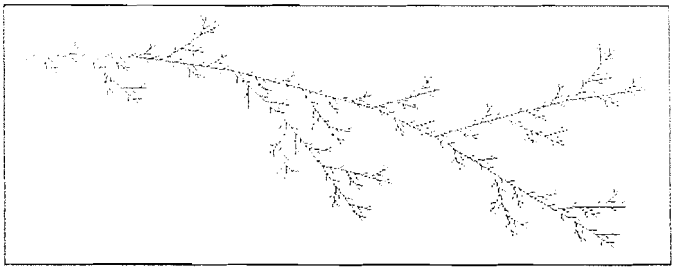
Wie lang ist der Zweig mit allen Ästen jetzt?
w_4=_____
Die Weglänge wächst über alle Grenzen.
Aber wächst auch der Zweig?
Hier ist doch etwas gaaaaanz merkwürdig????



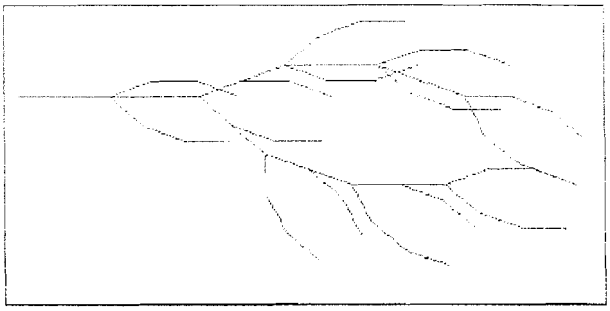
Stelle dir vor, es geht immer so weiter. Die "Grenzfigur", die man nie zeichnen kann, die man sich aber gut vorstellen kann, ist das echte selbstähnliche Fraktal.
Die beobachtete Merkwürdigkeit führt zum Begriff der "**fraktalen Dimension**".
(Vorschlag: nimm jetzt die Seite Nikolaushaus)

allerlei Fraktale - und ihre Vorläufer. Ha 28. Januar 1992

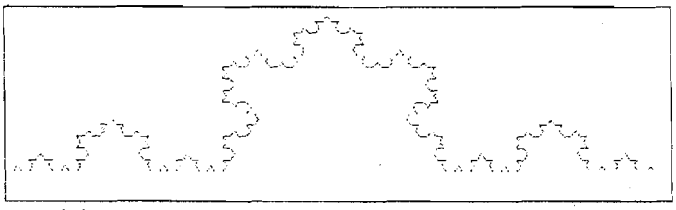
Versuche, jeweils den Grundbaustein, der aus höchstens 5 Strichen besteht, herauszufinden. Skizziere die zweite, bzw.auch die 3.Stufe auf dem Weg zum Fraktal.
Finde heraus, welche Stufe hier jeweils gezeichnet ist.
Wie groß ist die Zahl der Bausteine vom Typ einer bestimmten Stufe in der nächsten Stufe? z gesucht jeweils
Mit welchem Faktor muß man den Baustein strecken, um die vorige Stufe wider zu erreichen? k gesucht jeweils



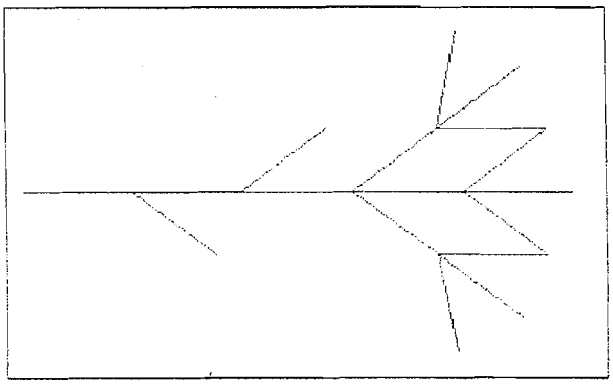
runder Zweig



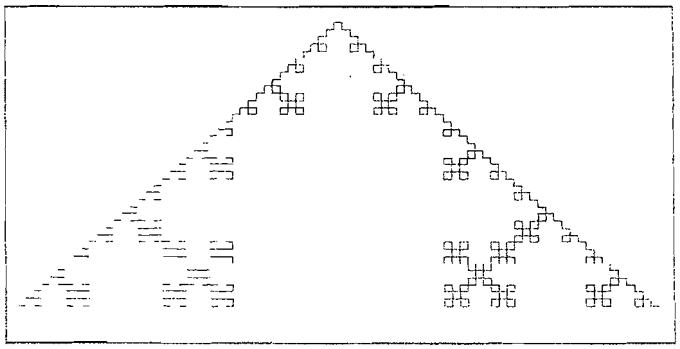
Wedel



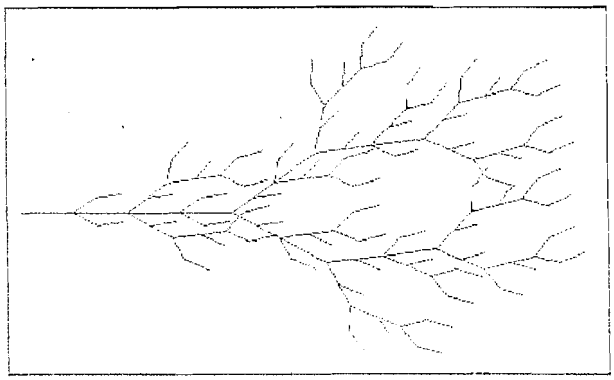
Kochkurve



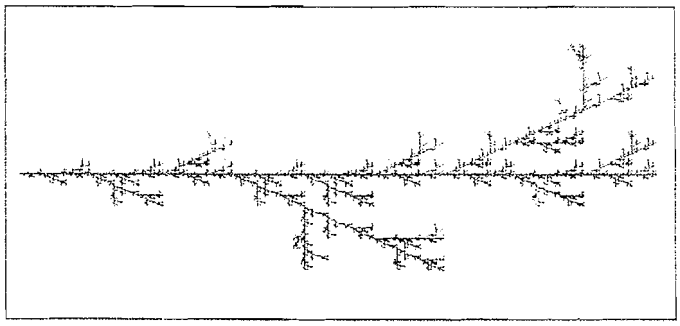
Dolde



Quadro-Kochkurve



Busch



Zweig

Dr. Dörte Haftendorn

Lindenmayer-Systeme

26. März 1995

Ein **L-System** ist gegeben durch ein Alphabet, hier F , + und - , und Ersetzungsregeln.

Hier steht das **Axiom** F

Hier steht die Regel

F ⇒ F+F - - F+F

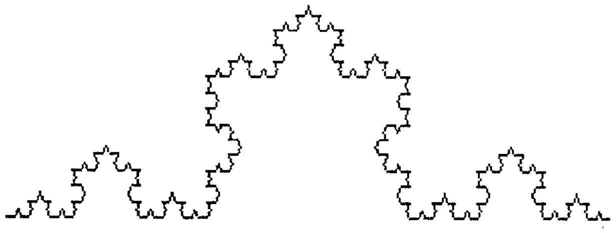
Die Lindenmayerworte:

1. Stufe F+F - - F+F

2. Stufe F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F -
- F+F+F+F - - F+F

3. Stufe F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F -
- F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F+F+F - -
F+F - - F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F -
- F+F+F+F - - F+F - - F+F - - F+F+F+F - -
F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F - -
F+F+F+F - - F+F

4.Stufe F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F - -
F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F+F+F - -
F+F - - F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F -
- F+F+F+F - - F+F - - F+F - - F+F+F+F - -
F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F - -
F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F+F+F - -
F+F - - F+F - - F+F+F+F - - F+F+F+F - -
F+F+F+F - - F+F - - F+F - - F+F+F+F - -
F+F - - F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F -
- F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F+F+F - -
F+F - - F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F -
- F+F+F+F - - F+F - - F+F - - F+F+F+F - -
F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F - -
F+F+F+F - - F+F - - F+F - - F+F+F+F - -
F+F - - F+F - - F+F+F+F - - F+F+F+F - -
F+F+F+F - - F+F - - F+F - - F+F+F+F - -
F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F - -
F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F+F+F - -
F+F - - F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F -
- F+F+F+F - - F+F - - F+F - - F+F+F+F - -
F+F+F+F - - F+F+F+F - - F+F - - F+F - -
F+F+F+F - - F+F



Rekursive Igelgraphik-Prozedur

```
PR weg :n :a
( wenn :n=0 dann vorwärts :a
    sonst ( weg (:n-1) (:a/3) li 60
            weg (:n-1) (:a/3) re 60 re 60
            weg (:n-1) (:a/3) li 60
            weg (:n-1) (:a/3)  ) )
ENDE
```

Die Lindenmayerworte wachsen immens schnell (hier i.w. mit 4^n , oft noch mehr) , so daß sie sich in Pascal z.B. nicht als strings (üblicheZeichenkette) hantieren lassen.

Leicht verständlich und daher für pädagogische Belange sinnvoll ist die Übertragung in direkte Igelgraphik-Prozeduren. Das **Axiom** steht dann im **Wenn-Teil** , der Abbruchbedingung. Der **Sonst-Teil** ist aufgebaut wie die **Regel.**

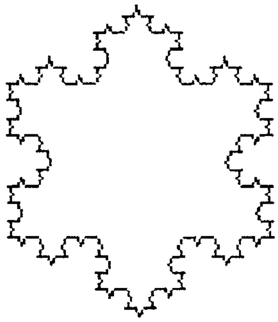
Gerade LOGO eignet sich für freiere Schülerexperimente.

Die Kochkurve ganz unten entsteht dann durch Eingabe von **weg 4 300** .

Leider ist die Übertragung aber dennoch nicht immer einfach. Die nachfolgede Schneeflocke erhält man als L-System durch Veränderung des **Axioms** in F+ +F+ +F+ +

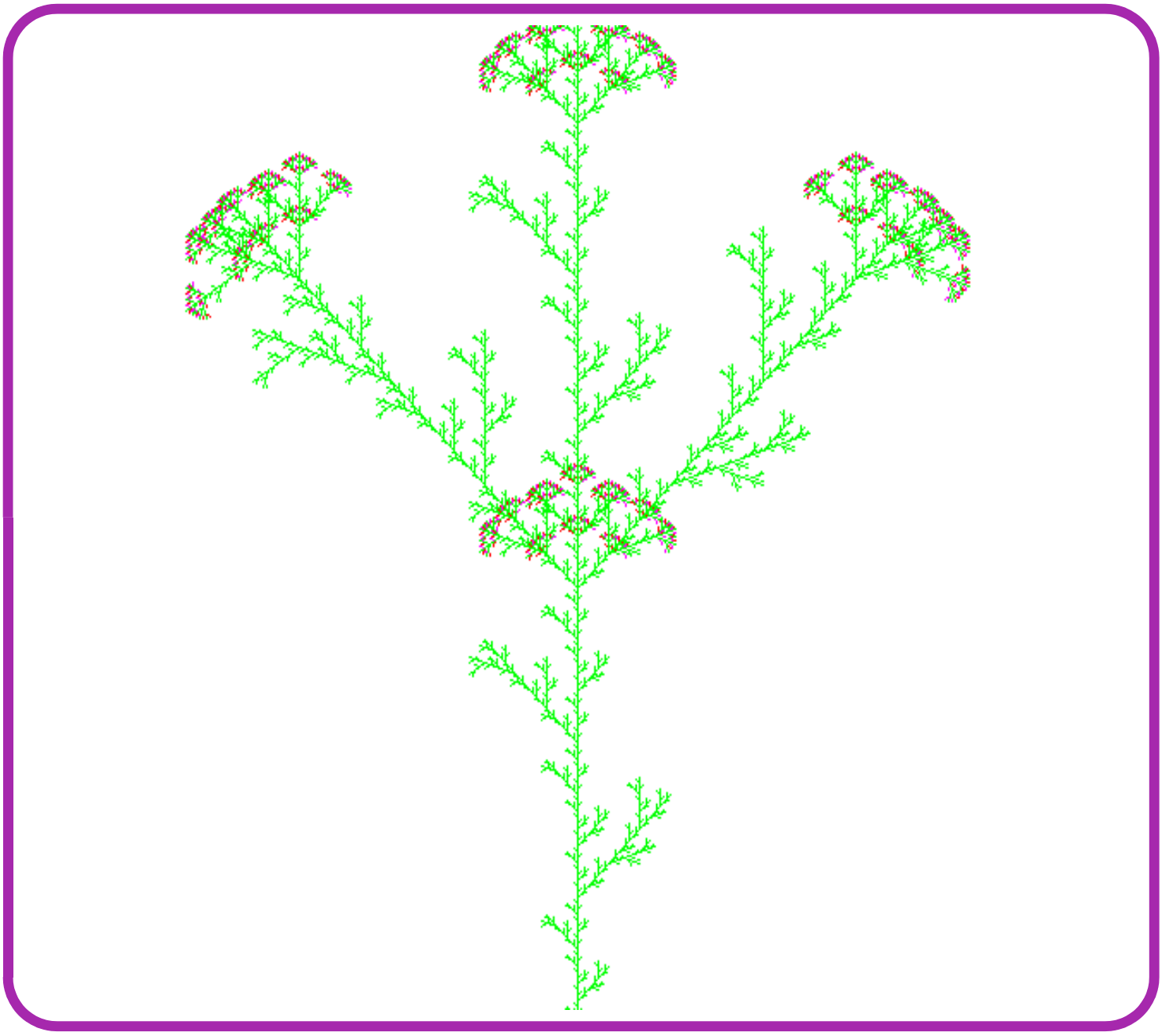
In dem Wenn-Teil der Weg-Prozedur darf man diese Änderung aber **nicht** einbauen, sondern man muß die unveränderte Prozedur dreimal aufrufen.

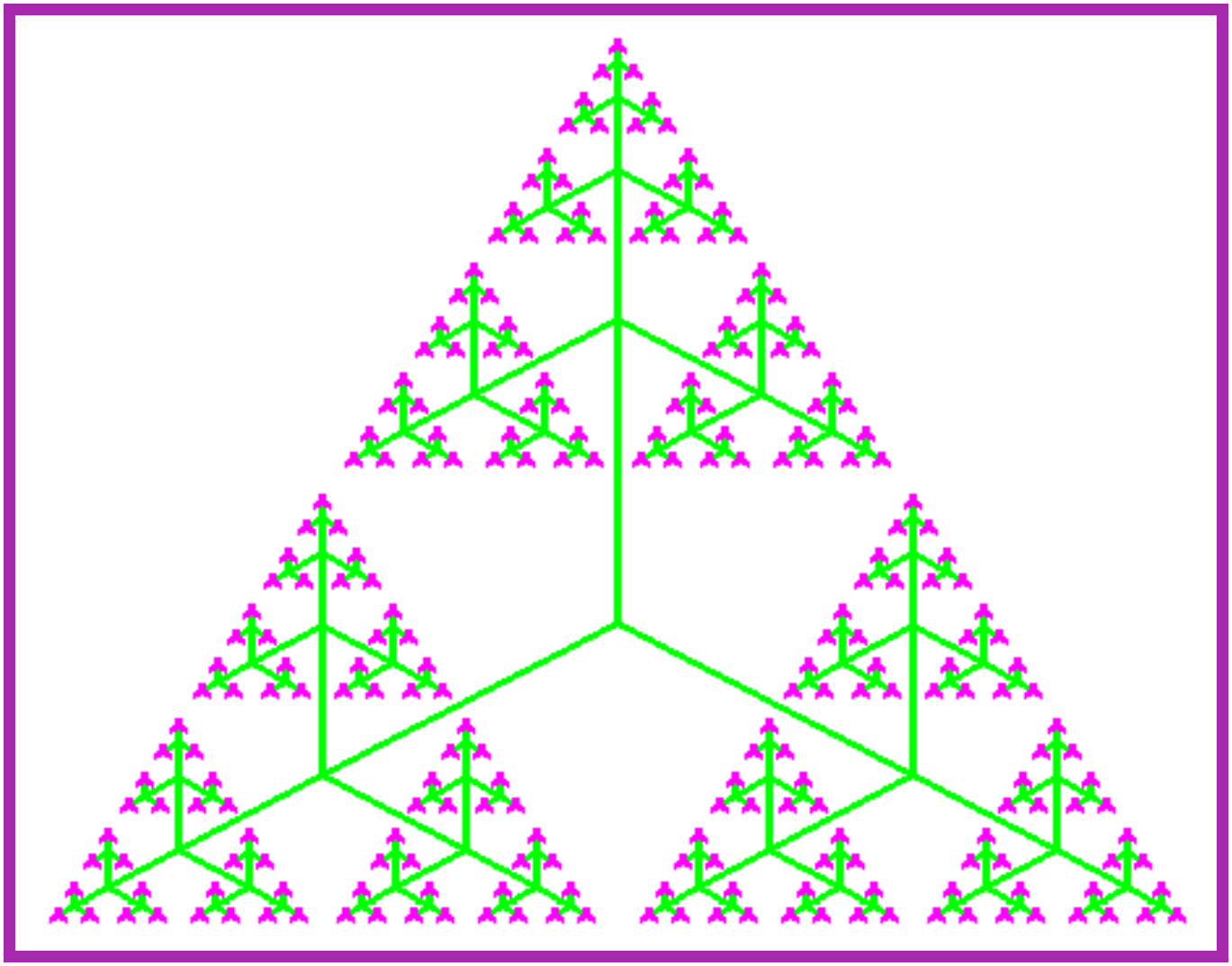
```
wh 3 [weg 3 99  re 120 ]
```



Fazit: Die Realisierung von Wegfraktalen (Graftalen) ist durch Lindenmayersysteme oder durch rekursive Igelgraphik-Prozeduren möglich. Beide Arten haben ihre Vorzüge und ihre Schwierigkeiten. In LOGO ist ein schülernaher Zugang und freiere Variation möglich. Dies ist logolind.txt

Hier sind ein Zweig und eine Doldenform im Wechsel gemischt. Erzeugt mit Zweig.exe

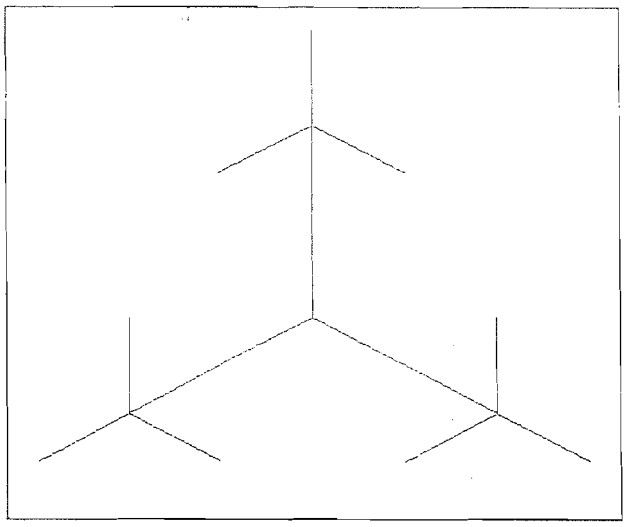




Ternärer Baum

Mit rekursiver Prozedur in Pascal

```
procedure ternaererBaum(i:integer;VAR gr,x,y:integer);
var xk,yk,g_1:integer;
begin   g_1:=round(v*gr);
  if i=1 then begin     setcolor(2);
    fd(gr);zkn(i,x,y);    lt(120);fd(gr);zkn(i,x,y);    lt(120);fd(gr);zkn(i,x,y);lt(120); setcolor(5);  end
  else begin  fd(gr);kn(i,xk,yk);ternaererBaum(i-1,g_1,xk,yk); zkn(i,xk,yk); zkn(i,x,y);
        lt(120);fd(gr);kn(i,xk,yk);ternaererBaum(i-1,g_1,xk,yk);zkn(i,xk,yk); zkn(i,x,y);
        lt(120);fd(gr);kn(i,xk,yk);ternaererBaum(i-1,g_1,xk,yk);zkn(i,xk,yk); zkn(i,x,y);lt(120);  end;
end;
```



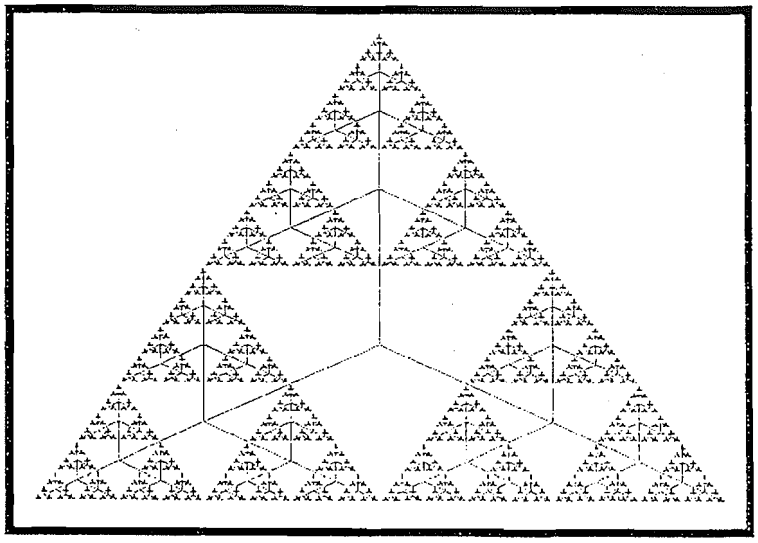
Ternärer Baum

Ha 13. Januar 1995

mit dem Lindenmayersystem

Im Folgenden ist F eine Weglänge, die von Stufe zu Stufe mit dem Stauchfaktor 0.5 verkleinert wird. .+/- ist ein Winkelpaar, derr Größe 120°.
Aus dem Axiom entsteht unter Verwendung des Bausteins A aufgrund der Ersetzungsregeln in jeder Stufe ein immer längeres Wort. Dieses wird "gelesen" und in Zeichenbefehle (Turlegraphik) umgesetzt.

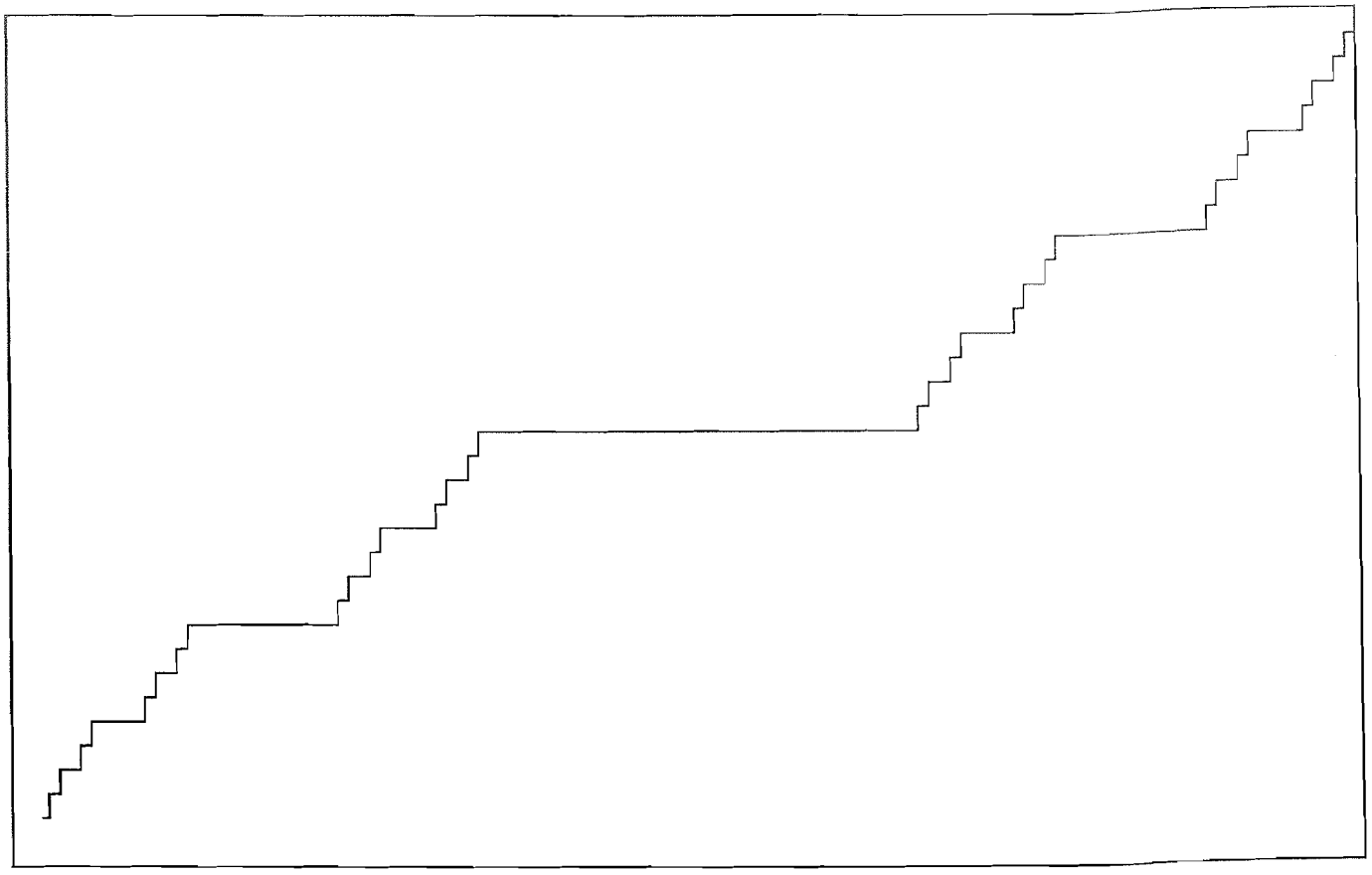
Das **Axiom** ist A und der Baustein A ist ein später nicht zu zeichnendes Zeichen.
Regeln: F ⇨ 2FF5 , die Verdoppelung bewirkt, daß die inneren Sternarme immer länger werden können.
Die Zahlen bewirken die Umschaltung der Zeichenstiftfarbe.
A ⇨ (FA)+ (FA)+ (FA)+ dies ist der **Keim** für den 120°-Stern.
Die **Stufe 0** ist das Axiom, das aus dem Buchstaben A besteht und daher nicht gezeichnent werden kann.
In **Stufe 1** wird A durch die rechte Seite der Regel ersetzt und es erscheint einfache der 120°-Stern, wie er oben violett innen abgebildet ist.
In **Stufe 2** wird folgendes Wort gebildet: (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ Gezeichnet ist es im oberen Bild.
Man kann sich vorstellen, daß an jedem freien Ende der Buchstabe A abgelegt wird, aus dem dann in der nächsten Stufe wieder ein 120°-Stern wird.
Das in **Stufe 3** gebildete Wort ist: (22FF52FF55(2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+)+ (22FF52FF55(2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+)+ (22FF52FF55(2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+ (2FF5(FA)+ (FA)+ (FA)+)+)+



An jedem grünen freien Ende des obigen Bildes hängt dann ein halb so großer 120°-Stern, der an seinen Enden wieder den Keim A trägt.
Man erkennt, daß die entstehenden Worte sehr schnell i.w. exponentiell wachsen.
Hier gilt für (Stufe/Zeichenzahl):
(1/15), (2/57), (3/211), (4/780),(5/2499)... (6/7800), (7/23991), (8/ 73140)....
Dies bewirkt, daß mit dem Computer das Wort gleich bei seiner Entstehung gezeichnet werden muß. Interessant ist, daß das Programm streng rekursiv abläuft, und daß man gut verfolgen kann, wie jeder Teilbaum in derselben Weise durchlaufen wird wie der Hautbaum.

Hier ist **Stufe 7** abgebildet.

Dateien tiblin2.wpg, triblin7.wpg, triblin.txt.--- Programm LINDE ©Ha 94 Dr.Dörte Haftendorn 14. Januar 1995



teufel.lin erstellt mit Linde.pas Ha 3/95 , ohne Farben ebenso in LOGO teufel.log

Lindenmayer-System

*Berücksichtigt man die Deutung, so kann man das **Axiom** in der Abbruchbedingung der Rekursion wiedererkennen.*

Axiom **A**
Regeln **A→ ABA**

Der Baustein B tritt als eigene Prozedur auf.

B→ BBB

Deutung **A=F+V-**
B=FFF
+=90° links -= 90° rechts
F und V erscheinen als vorwärts-Befehle mit Schrittweiten a bzw. b

Weg-Prozeduren mit Igelgraphik

Hier gezeigt in LOGO, ebenso geht es mit Turtlegraphik in Pascal.

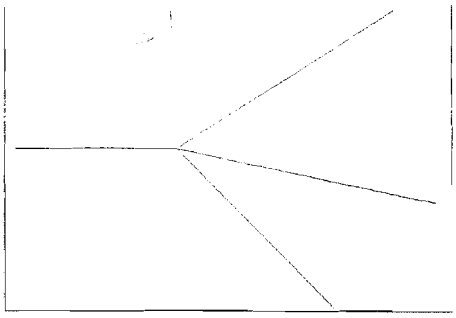
```
PR teufel :n :a :b
 ( wenn :n = 0  dann vw :a li 90 vw :b re 90
        sonst (  teufel (:n-1) (:a/3) (:b/2)
                 teufelmitte (:n-1) (:a/3)
                 teufel (:n-1) (:a/3) (:b/2)  ))
ENDE
PR teufelmitte :n :a
 ( wenn :n=0 dann vw :a vw :a vw :a
  sonst (  teufelmitte (:n-1) (:a/3)  teufelmitte (:n-1)  (:a/3)
                 teufelmitte (:n-1) (:a/3)   ) )
ENDE
```

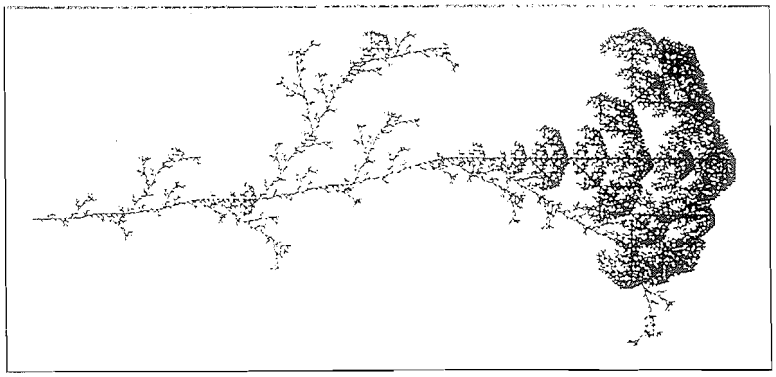
Fazit: L-Systeme lassen sich in rekursive Weg-Prozeduren übersetzen.

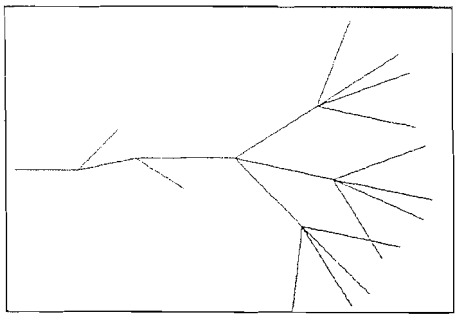
Hier ist dies für ein Beispiel ohne Knoten gezeigt. In Pascal lassen sich auch die Knoten einfach rekursiv verwalten. In LOGO ist es vernünftig, eine dynamische Liste für die Knotenkoordinaten zu eröffnen. Die naheliegende Versuch, das Lindenmayerwort wirklich zu bilden, stößt leider sehr schnell an die Grenzen der Speichermöglichkeiten. Man muß es während seiner Bildung sofort "abarbeiten". Dies ist Teufel.txt

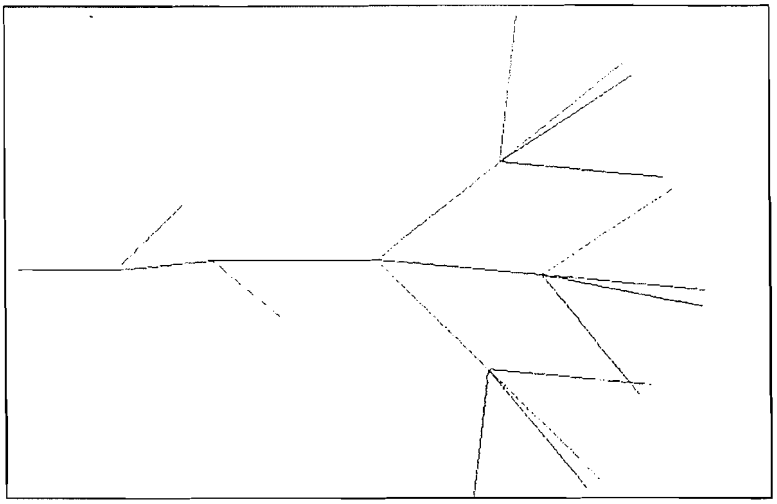
Dolde mit dem Lindenmayersystem

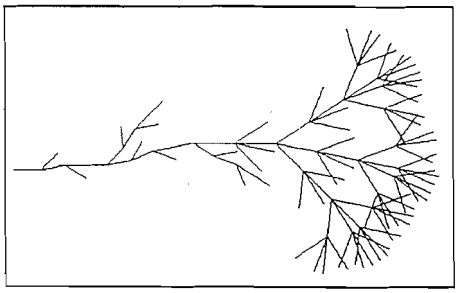
12. Januar 1995

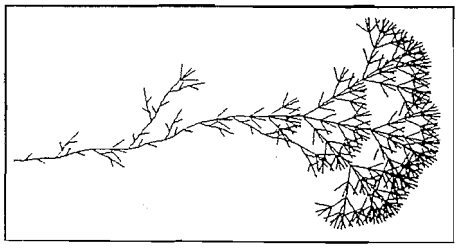


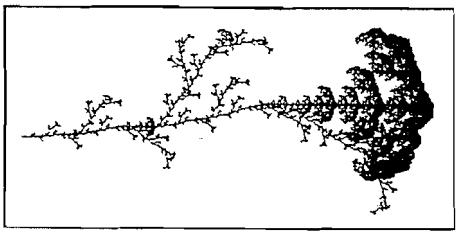












Im Folgenden sind F und V verschiedene Weglängen, +/- bzw. L/R verschiedene Winkelpaare, r der Stauchfaktor. Aus dem Axiom entsteht unter Verwendung der Bausteine A und B aufgrund der Ersetzungsregeln Stufe für Stufe ein immer längeres Wort. Dieses wird "gelesen" und in Zeichenbefehle (Turlegraphik) umgesetzt.

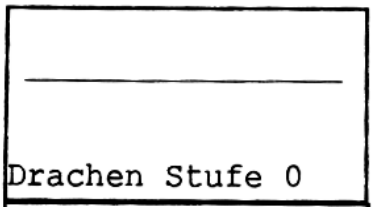
Die linke einfarbige Dolde hat das Axiom A.
Bausteine A=V , B=F. +/-=35°, L/R=48° r=0.43
Regeln: F ⇨ F , A ⇨ A(LA)-A(RA)+B
B ⇨ B+(B)R(B)-(B)LB

Die obere farbige Dolde hat das Axiom A(+B)R(2B)-(B4)L. Die Zahlen bewirken die Umschaltung der Zeichenstiftfarbe.
Bausteine A=5V2 , B=F. +/-=42°, L/R=48° r=0.43
Regeln: F ⇨ F , A ⇨ A(LA)-A(RA)+B
B ⇨ B+(3B4)R(B)-(6B2)LB

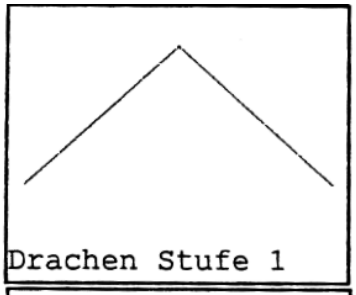
Dateinamen: doldlin1.wpg....doldlin5.wpg. doldlinv.wpg. im Prog: dolde rechte Spalte doldlindr.wpg doldlinx.wpg. Im Programm dolde2f
Dieser Text: doldlin.txt.
Alle Zeichnungen beruhen auf dem Progamm LINDE

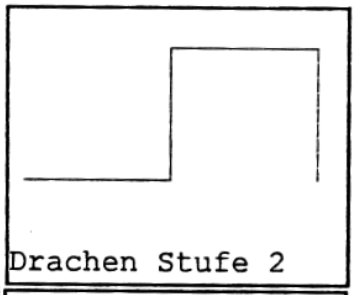
Chaos und Fraktale Wegfraktale Drachenkurve

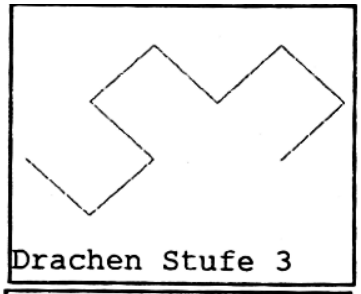
Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 5. Nov. 96, Apr.2005

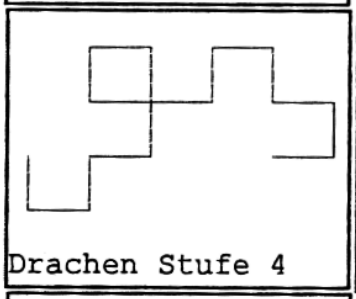


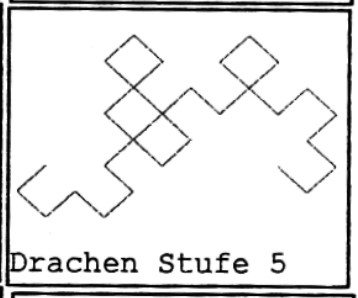
Die **Drachenkurve** entsteht durch fortgesetztes Papierfalten , wenn man einen langen Streifen Papier immer links über rechts faltet, dann jeden Knick rechtwinklig hinstellt und von oben betrachtet. Beim handwerklichen Falten verliert man schon bald die Übersicht, aber auf Karopapier kann man gewisse Gesetzmäßigkeiten entdecken.

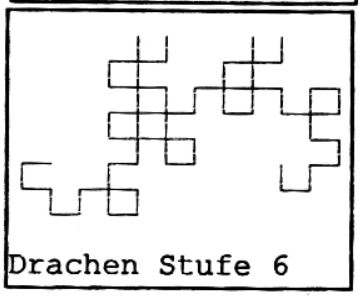


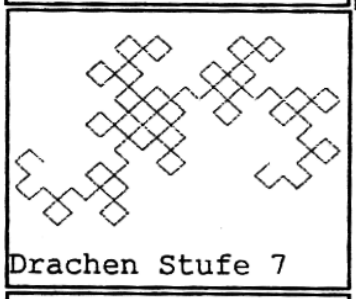


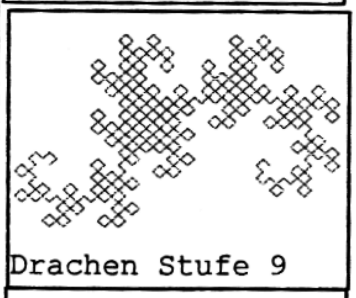


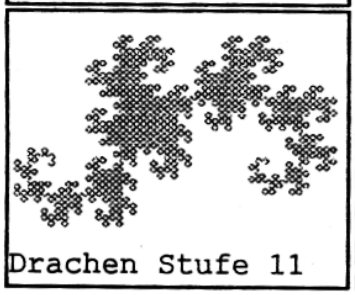


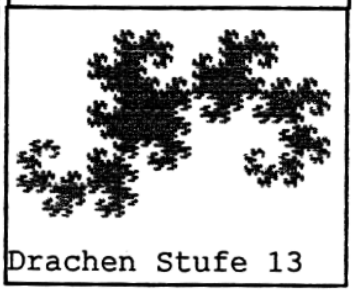


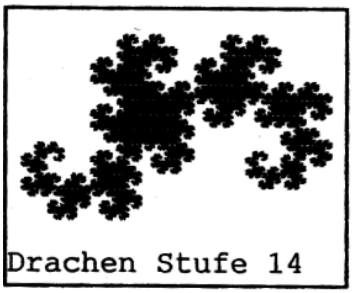


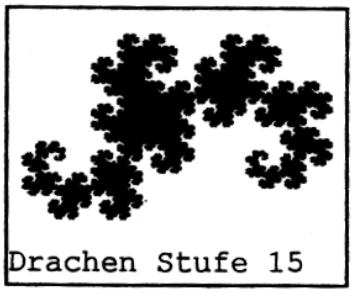












Schreibt man Linksknicks als 1 und Rechtsknicks als 0,

so ergeben sich nacheinander

0,
1**0**0,
110**0**100,
1101100**0**1100100,

1011001110010**0**01
10110001100100

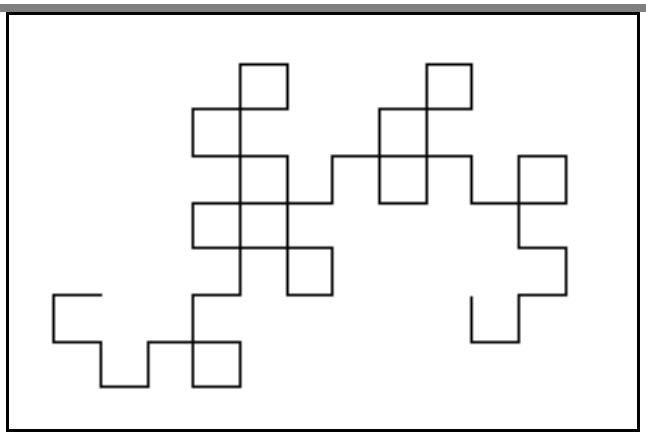
u.s.w., Zahlen, die man ganz leicht immer weiter schreiben kann. Die entstehenden Zahlen lassen sich als Dualzahlen interpretieren.
Dann konvergieren Sie gegen die sogenannte **Papierfaltungszahl.**
Manchmal wird die in Stufe 15 annähernd abgebildete Grenzfigur der **Drachen** genannt, ihr Rand ist dann die **Drachenkurve**.

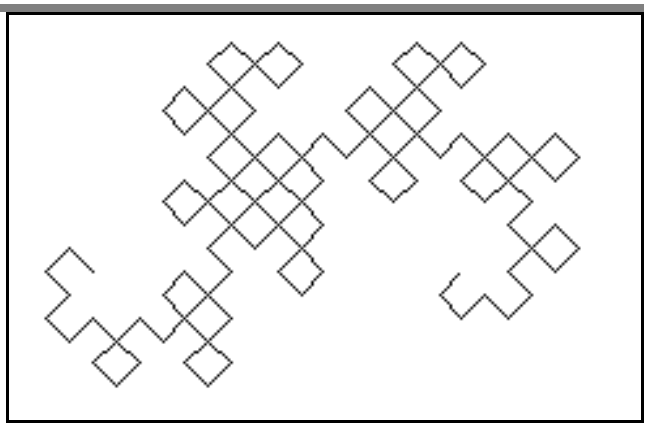
Man kann auch mit Varianten herum probieren. Nimmt man Stufe 2 als Initiator und Stufe 3 als Generator, so erhält man den **Zwillingsdrachen**, dessen Rand eine Kochkurven-Variante mit dem Generator +F--FF++F- ist (+ = 45/).

In dem Buch “Dino-Park” von Chrichton, das als “Jurassic Park” verfilmt worden ist, werden die Kapitel mit den Stufen des Drachenfraktals eingeleitet.

Fraktale mit LOGO Drachenfraktal **drachen.log**

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 5. Nov. 96, Apr. 2005



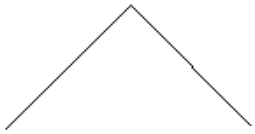


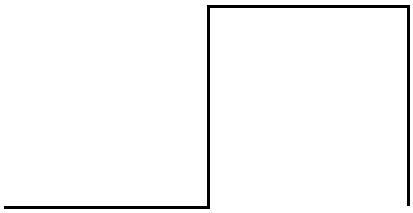
Als **Lindenmayersystem** wird der Drachen so beschrieben:

Axiom F B
Regeln F-> (Nichts)
A -> - F A + + F B -
B -> + F A - - F B +

Die Bausteine A und B sind leer.
Die Übersetzung in Logo geht direkt.
(Winlogo, Otte/ Dümmlers)
In anderen Logoversionen etwas andere Syntax.

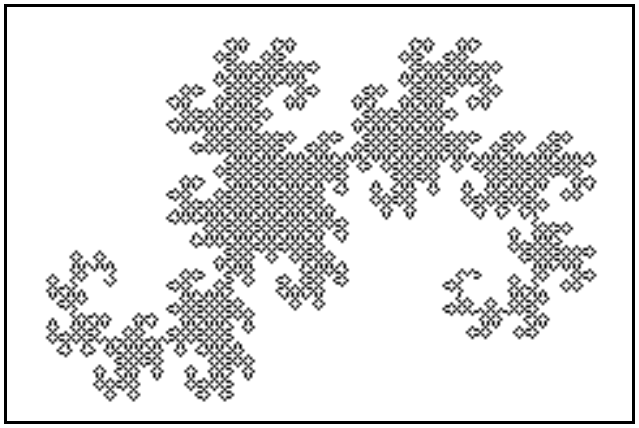
Drachen 1 100 und
Drachen 2 100





```
PR  aaa :n :xPR
 wenn :n=0   dann  rk
  re 45    fff :n-1 :x    aaa (:n-1) :x*:r
  li 45 li 45 fff :n-1 :x bbb :n-1  :x*:r
  re 45
ENDE
PR bbb :n :x
  wenn :n=0 dann   rk
  li 45 fff :n-1 :x  aaa :n-1 :x*:r
  re 45 re 45  fff :n-1 :x bbb :n-1 :x*:r
  li 45
ENDE
PR fff :n :x
 wenn :n=0 dann vw :x rk
ENDE

PR drachen :n :x
  setze "r" 1/2*qw 2
  wenn :n=0 dann fff :n :x  rk
   bbb :n :x
 ENDE
PR start
 bild punkt 100 100 re 90 vi
ENDE
```



Dargestellt sind oben die Stufen 6 und 7,
dann 1 und 2 und unten 11.
Alle in LOGO mit Länge 100

Dies ist drachen-logo.wpd

Fraktale Dimension

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 1995, 2005

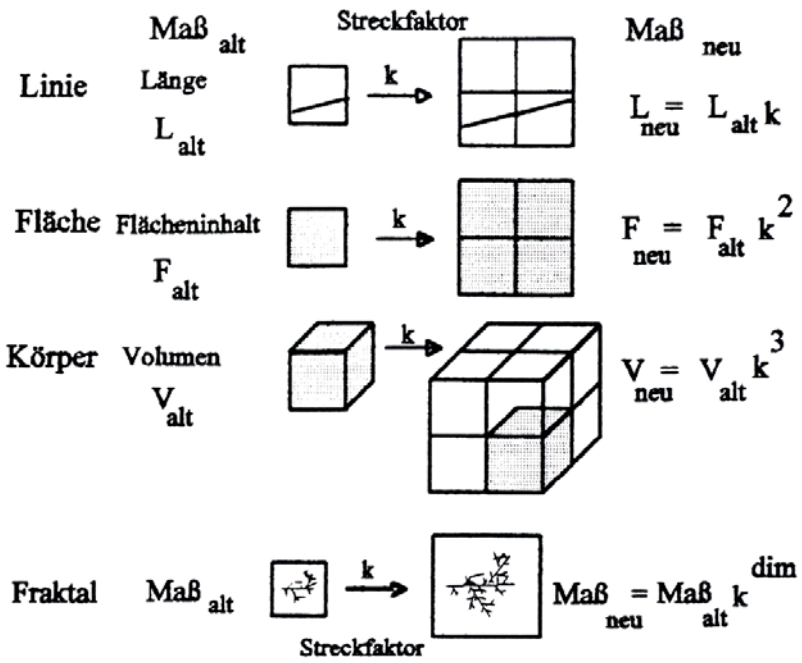
Stelle dir eine geometrische Figur vor und strecke sie dann mit dem Streckfaktor k.

Hast du die vorher die Länge L_{alt} gemessen, so hat deine Figur nachher die k-fache Länge.
Die rechte Abbildung zeigt dir, dass aber der Flächeninhalt k^2 -fach so groß wird, das Volumen wird sogar k^3 -fach so groß.
Man sagt:
Eine Linie hat die Dimension 1.

Eine Fläche hat die Dimension 2.

Ein Körper hat die Dimension 3.

Ein Fraktal hat die Dimension dim.



Wenn wir Länge, Flächeninhalt, Volumen... als **Maß** bezeichnen, so gilt offenbar:

$$\text{Maß}_{neu} = \text{Maß}_{alt} \cdot k^{dim}$$

Die "selbstähnlichen" Fraktale haben nun die merkwürdige Eigenschaft, dass sie sich beim Strecken weder wie Linien, noch wie Flächen, noch wie Körper verhalten. Man muss bei ihnen zulassen, dass die Dimension nicht notwendigerweise ganze Zahl ist. Sie kann also eine Bruchzahl oder eine beliebige Kommazahl sein. Weil "fractum" (lat.) gebrochen, bzw. "fraction" (engl.) Bruch heißt, nennt man diese geometrischen Gebilde

Fraktale.

Nicht genug, dass die Fraktale eine Erweiterung des Dimensionsbegriffes erfordern, es sind, je nach Art des oben genannten Maßes, auch noch verschiedene "Dimensionen" für ein Fraktal sinnvoll.
Wir werden die **"Selbstähnlichkeitsdimension" d** und die **"Boxdimension" D** genauer kennenlernen. Den Begründungen sind eigene Seiten gewidmet.
Die Zahlen **d und D stimmen nicht immer überein.**

Bei selbstähnlichen Fraktalen, die sich nicht selbst überschneiden, gilt: $d = D$.

d bestimmt man durch Nachdenken über Bausteinzahl z und Streckfaktor k (s.u.).

Dann rechnet man aus: $$d = \frac{\log z}{\log k}$$ d ist nur bei selbstähnlichen Figuren sinnvoll.

D bestimmt man durch Messungen von Fraktalen, die mit verschiedenen Box-Gittern gerastert sind. Bei jeder geometrischen Figur, d.h. auch bei jedem Fraktal, kann man **D** wenigstens näherungsweise bestimmen.(s.u).
Die **Boxdimension** ist vor allem für die Anwendung des Fraktalbegriffs in den Naturwissenschaften und der Medizin wichtig und sinnvoll.

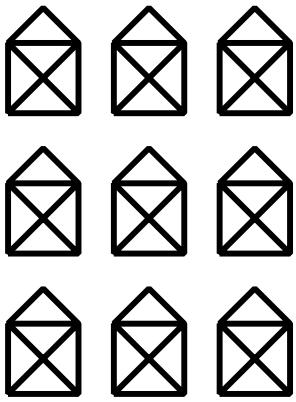
Fraktale Dimension: Grundüberlegung am Nikolaushaus

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 14. November 1996, Apr. 2005

Das ist das Haus
vom Nikolaus.
Es hat eine Weglänge von etwa 17 cm,
einen Flächeninhalt von 5 cm².

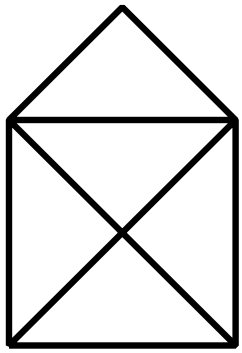
Das sind drei Häuser
vom Nikolaus.
Sie sind untereinander kongruent.
Sie haben eine Weglänge von etwa 3 mal 17 cm, also 51 cm,
und einen Flächeninhalt von 3@5 cm².

Das sind z = 9 Häuser
vom Nikolaus.
Sie sind untereinander kongruent.
Sie haben eine Weglänge von etwa z@17 cm, also 153 cm,
und einen Flächeninhalt von z @5 cm², also 45 cm².



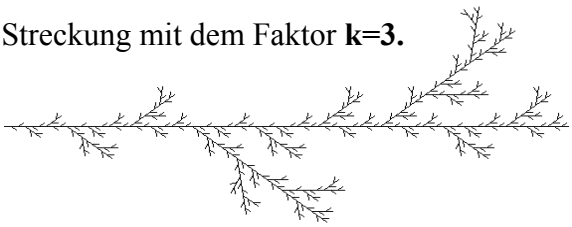
z Häuser haben z-fache Länge
z-fache Fläche
z-faches Volumen

Das ist das dreifach so breite Haus
vom Nikolaus.
Es ist den kleinen Häusern ähnlich, Streckfaktor **k=3.**
Es hat eine Weglänge von etwa k 17 cm, also 51 cm,
eine Breite von k@2 cm, also 6 cm
und einen Flächeninhalt von k² @5 cm², also 45 cm².



Auf das k-fache gestreckte Häuser haben
k-fache Länge
k²-fache Fläche
k³-faches Volumen

Das Zweigfraktal besteht aus **z=5** kleinen Zweigen. Jeder hat das Maß M_{klein}.
Das ganze Zweigfraktal hat daher das Maß 5@ M_{klein}.
Das Zweigfraktal entsteht aus einem kleinen Zweig durch Streckung mit dem Faktor **k=3.**
Das ganze Zweigfraktal hat daher das Maß
3 @ M_{klein} , wenn das Maß eine Länge ist.
3² @ M_{klein} , wenn das Maß eine Fläche ist.
3³@ M_{klein} , wenn das Maß ein Volumen ist.
Keine der Gleichungen **5=3, 5=3², 5=3³** ist richtig,
Daher ist das für Fraktale sinnvolle Maß weder Länge, noch Fläche, noch Volumen.



Erfüllbar und sinnvoll ist höchstens die Gleichung $z \cdot Maß_{klein} = k^d \cdot Maß_{klein}$ also $z = k^d$,

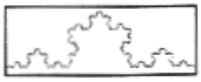
umgeformt: $d = \dfrac{\log z}{\log k}$. Dabei ist d **die fraktale Dimension** eines selbstähnlichen Fraktals.

Fraktale Dimension Selbstähnlichkeits-Dimension d

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 1995, Apr. 2005

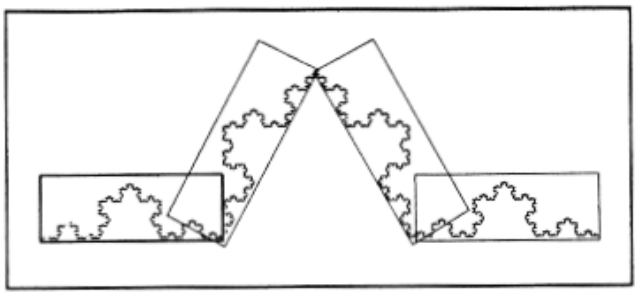
Ein Fraktal wird "**streng selbstähnlich**" genannt, wenn es aus gleichen Bausteinen besteht, die bei passender Vergrößerung genau wie das ganze Fraktal aussehen.
Leider kann man nie ein Fraktal genau zeichnen, sondern immer nur in "Stufen". Oft kann man ab der 3. Stufe schon sehen und überlegen wie es weitergeht, wenn die Stufenzahl immer mehr erhöht wird. Die "Kochkurve" ist in dieser Hinsicht schön übersichtlich.

z = 4 Bausteine



k = 3

auf das Ganze



Wenn also z Bausteine das ganze Fraktal bilden und jeder Baustein, gestreckt mit dem Faktor k, ebenfalls das ganze Fraktal bildet, dann muss man ein Maß, das diese Abbildung "mitmacht", auf zweierlei Arten berechnen können:

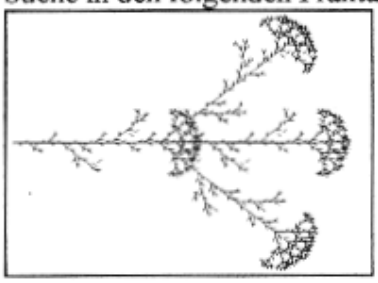
$$Maß_{neu} = Maß_{alt} \cdot z \text{ und } Maß_{neu} = Maß_{alt} \cdot k^d \text{, also } Maß_{alt} \cdot z = Maß_{alt} \cdot k^d$$

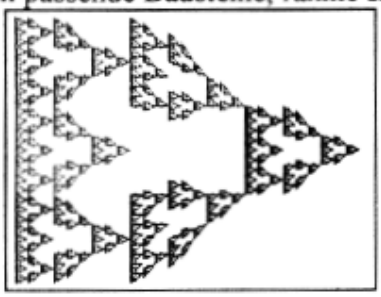
und es folgt : $z = k^d$. Dann ergibt sich $\boxed{d = \frac{\log z}{\log k}}$. Dabei kann **log** jeder Logarithmus sein.

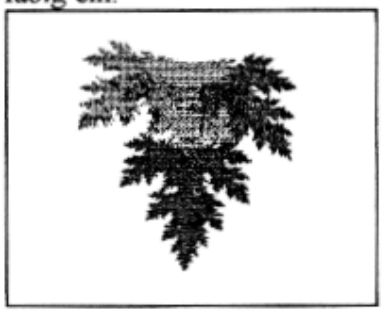
Für die Kochkurve errechnet man nun: $d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26...$ als Selbstähnlichkeits-Dimension.

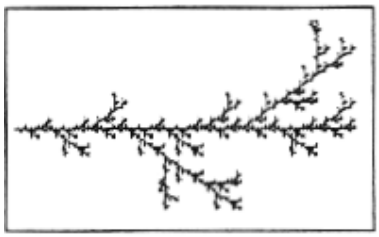
Übung: Bestimme unten d, wenn es geht.

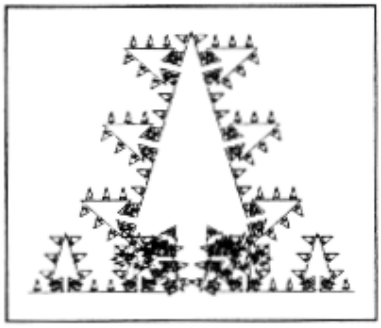
Suche in den folgenden Fraktalen passende Bausteine, rahme sie fabig ein.

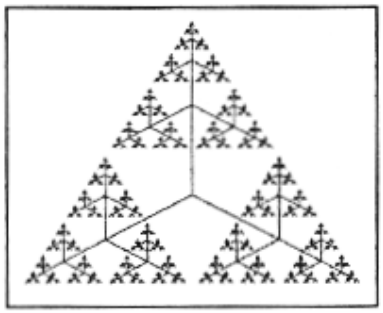


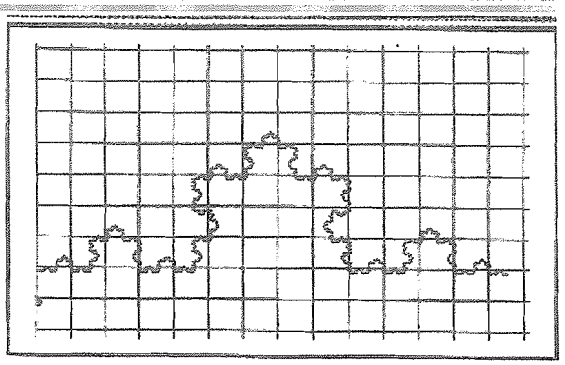










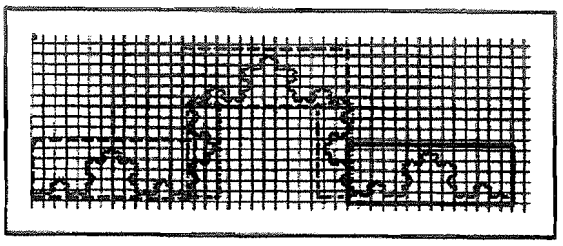


Fraktal derselben Stufe wie im mittleren Bild. Gezeichnet mit weitem Raster.
Es werden m_{weit} Kästchen getroffen.

Ausgangsbild, enges Raster

Es werden m_{eng} Kästchen getroffen.

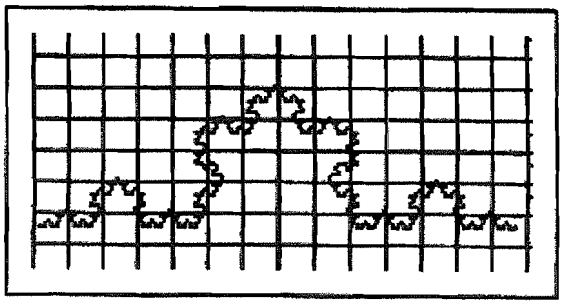
↑ · 3



Überlegung: In dem dicken Rahmen rechts unten werden von dem Baustein genau so viele Kästchen getroffen, wie im untersten Bild, denn das ist eine wirkliche Ausschnittvergrößerung. Die Anzahl sei m_{bau}.
Die gestrichelten Kästen zeigen, dass sicher gilt:

$$m_{eng} > \left(3+\sqrt{3}\right)m_{bau} > 3 \cdot m_{bau}$$

↓ · 3



Dies ist also eine wirkliche Ausschnittvergrößerung des darüber dick eingerahmten Bausteins. Sie ist daher nicht so fein untergliedert wie Fraktal derselben Stufe wie das Fraktal in der Mitte. (Die Stufe ist um 1 geringer.) Bei einem wahren (idealen) Fraktal ist aber so eine Ausschnittvergrößerung wieder genauso wie das wahre Fraktal.
Dem kommt die oberste Zeichnung näher, obwohl dort das Fraktal feiner gezeichnet ist, gilt etwa $m_{bau} \approx m_{weit}$

Zusammen gilt sicher deutlich: $m_{eng} > m_{weit} \cdot 3 = m_{weit} \cdot k$. Also ist die Kochkurve keine normale Linie.

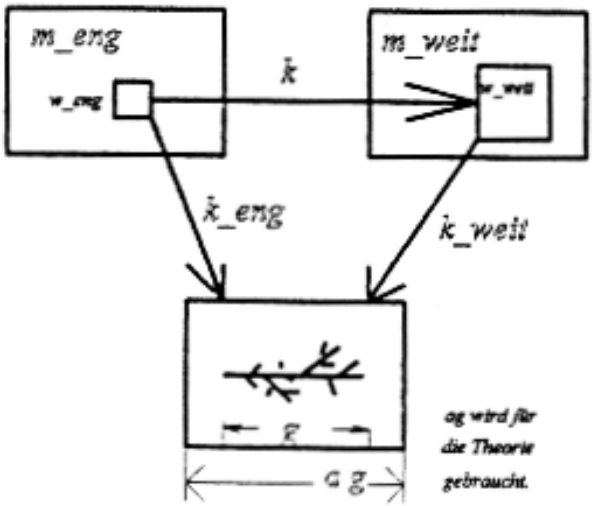
Für das wahre Fraktal ist dann die Gleichung $\boxed{m_{eng} = m_{weit} \cdot k^D}$ sinnvoll, und der Exponent D heißt **Boxdimension des Fraktals**.
Bei der Kochkurve und anderen überschneidungsfreien Fraktalen stimmt die Boxdimension D mit der Selbstähnlichkeitsdimension d überein. Das kann man sich plausibel machen, Beweise gehen auf die Hausdorff -Dimension zurück. Im Überschneidungsfall ist D < d. Damit ist die Boxdimension eher als die Selbstähnlichkeitsdimension geeignet, das äußere Erscheinungsbild der fraktalen Figur zu beschreiben. Bei 1 < D < 2 ist das Fraktal umso linienähnlicher je dichter D an 1 liegt, und umso flächiger, je dichter D an 2 ist. Mit räumlichen Gittern kann man auch Boxdimensionen von fraktalen Körpern (Schwämmen, Riffen, Wolken, Baumkronen, Lungen,..) bestimmen.

Fraktale Box-Dimension D **Grundlage des Messverfahrens**

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 1992, Apr. 2005

Gemessen wird bei einer bestimmten Gitterweite
w die Zahl m der Kästchen, die vom Fraktal getroffen werden. Es gilt die Gesetzmäßigkeit

$m_{eng} = m_{weit} \cdot k^{D}$. Hat man mehr als zwei Messungen, so ist es sinnvoll, sie gemeinsam graphisch auszuwerten. Dazu braucht man eine Bezugsgröße g, interpretierbar als Pixelbreite des Fraktals.



Aus dem Bild rechts ist (mit Operatoren) direkt ablesbar:

$$k = k_{eng} \cdot \frac{1}{k_{weit}} = \frac{g}{w_{eng}} \cdot \frac{w_{weit}}{g} = \frac{w_{weit}}{w_{eng}}$$

$$m_{eng} = m_{weit} \cdot \left(\frac{k_{eng}}{k_{weit}}\right)^{D}$$

also $\frac{m_{eng}}{k_{eng}^{D}} = \frac{m_{weit}}{k_{weit}^{D}} = \frac{1}{1} = 1$ Die beiden Einsen in dem Bruch beziehen sich darauf, dass man als weites Raster auch den unteren Kasten nehmen kann. Ein Kasten, der von dem Fraktal getroffen wird, Streckfaktor 1 auf sich selbst.

Damit ist die Kennzeichnung von *eng* und *weit* unnötig geworden. Der Streckfaktor von der Rasterweite auf die ganze Weite g sei nun k_{ganz}. Dann gilt: $m = k^{D} = \left(\frac{g}{w}\right)^{D}$.

Dies ist in doppelt-logarithmischer Auftragung eine Ursprungsgerade. Die Gleichung ist aber streng genommen nur richtig für m ÷ 4 bei dem wahren Fraktal. Es zeigt sich auch, dass wirklich erzeugte Messpunkte zwar mit erfreulicher Genauigkeit in doppelt-logarithmischer Darstellung auf einer Geraden liegen, jedoch nicht auf einer Ursprungsgeraden. Dieses Verhalten kann man erklären und merkt dabei, dass die Steigung dieser Geraden aber weiterhin D ist.(s.u.)

Durchführung der Messung:

Î Zähle auf dem Blatt mit dem gerasterten Fraktal sorgfältig, wie viele Kästchen von dem Fraktal "betreten" werden.

Ï Bestimme eine Bezugsgröße g . Eins der Raster mit Weite W sei K Kästchen breit. Dann ist g=K ▯ W.

Ð Lege eine Tabelle an:

1	2	3	4	5
Weite	g/Weite	Log(g/Weite)	m	Log m
36	630/36=17,5	1,243	96	1,9822

Weiterführen für alle Messungen an diesem Fraktal

Ñ Trage die Wertepaare aus den Spalten 3 und 5 in einem Koordinatensystem ein.

Ò Lege mit Augenmaß eine Ausgleichsgerade durch die Punkte. Bestimme ihre Steigung durch Einzeichnung eines Steigungsdreiecks.

Ó **Die Steigung ist der gesuchte Messwert für die Boxdimension des Fraktals.**

Ô ***Grenzen des Verfahrens:*** a) Die Gitterweite muss deutlich kleiner als das Fraktal, aber größer als die kleinste Schrittweite des Fraktals bei dieser Stufe sein.
b) Gezeichnet ist nie das wahre Fraktal, sondern eine Stufe. Diese muss schon wesentliche Merkmale des wahren Fraktals aufweisen.
c) Die zufällige Lage des Fraktals im Raster erzeugt Schwankungen der Messpunkte.

Fraktale Messung der Boxdimension durch Vergleich zweier Bilder

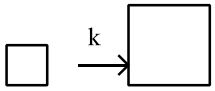
Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 1992, Apr. 2005

Hat man nur zwei gerasterte Fraktalbilder, so lohnt sich die logarithmische Auftragung nicht. Die Boxdimension D lässt sich aus der (gedachten) Steigung bestimmen, die dann mit folgender Formel zu berechnen ist:

k = Streckfaktor von kleinen Gitterkaro auf das große Gitterkaro

m = Anzahl der getroffenen Karos im engen Gitter

n = Anzahl der getroffenen Karos im weiten Gitter



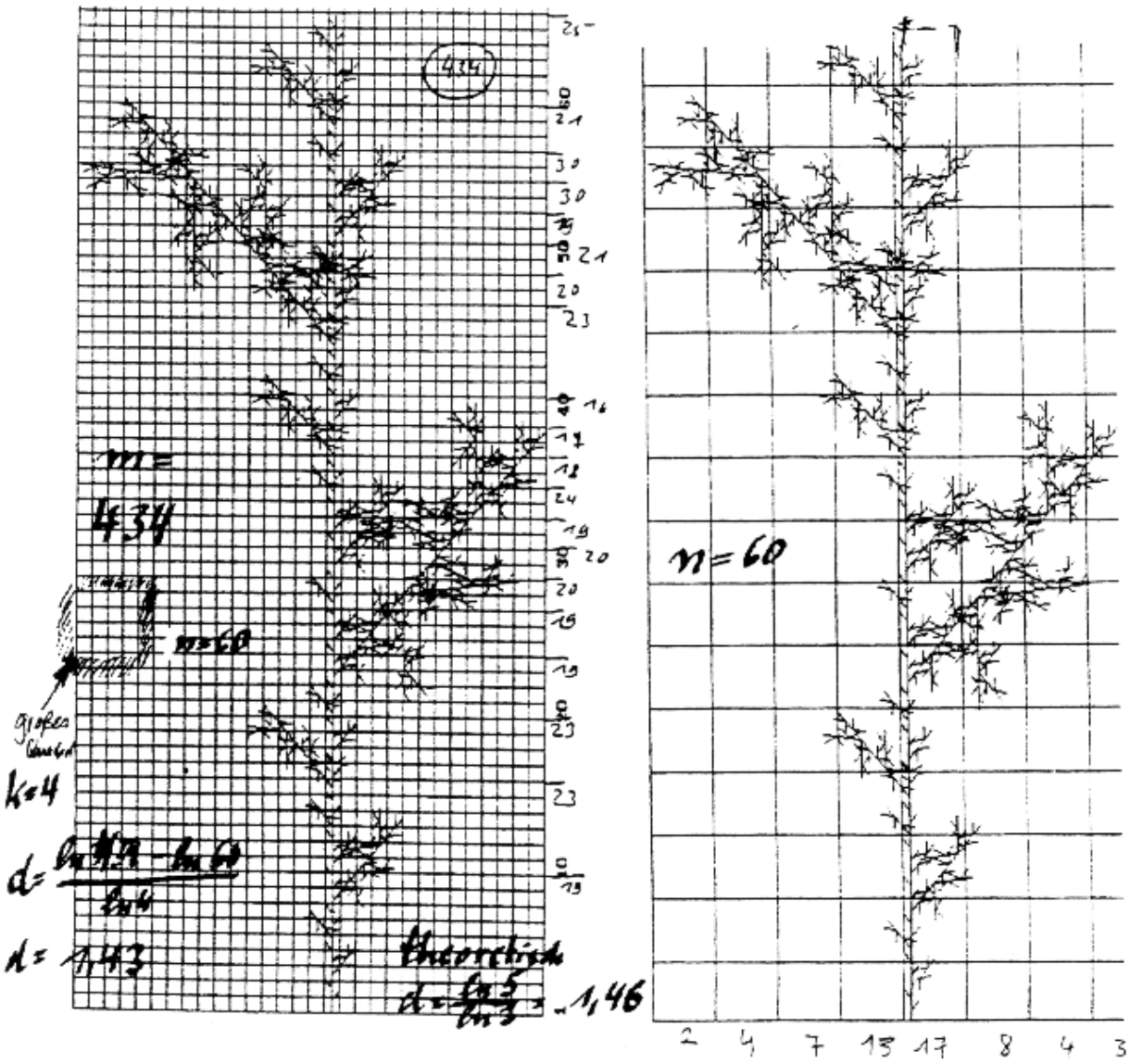
Boxdimension

$$\boxed{D = \frac{\log m - \log n}{\log k}}$$

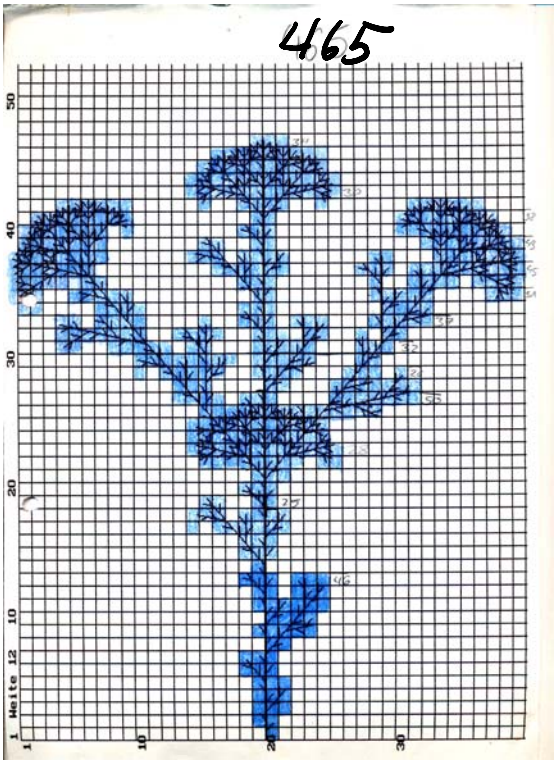
Hier: $D = \frac{\log m - \log n}{\log k} = \frac{\log 434 - \log 60}{\log 4} = 1{,}43.$

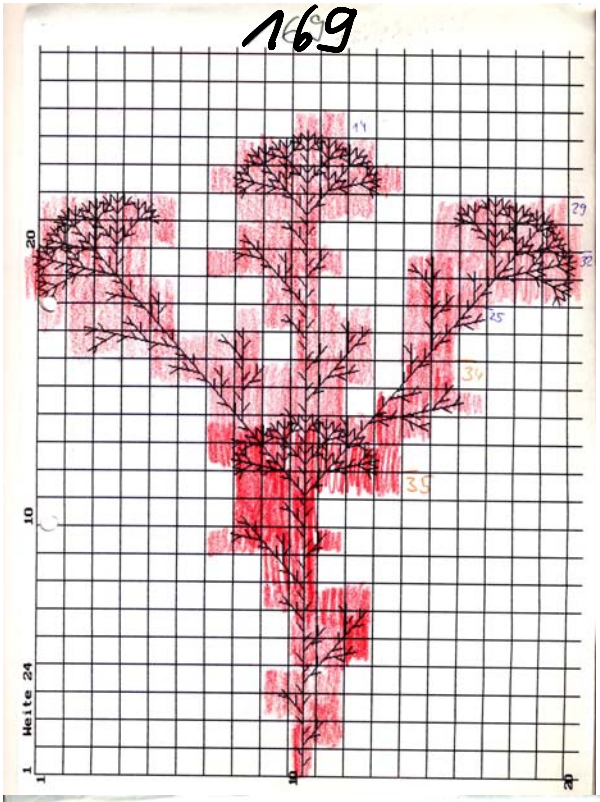
Die Selbstähnlichkeitsdimension ist in diesem Fall:

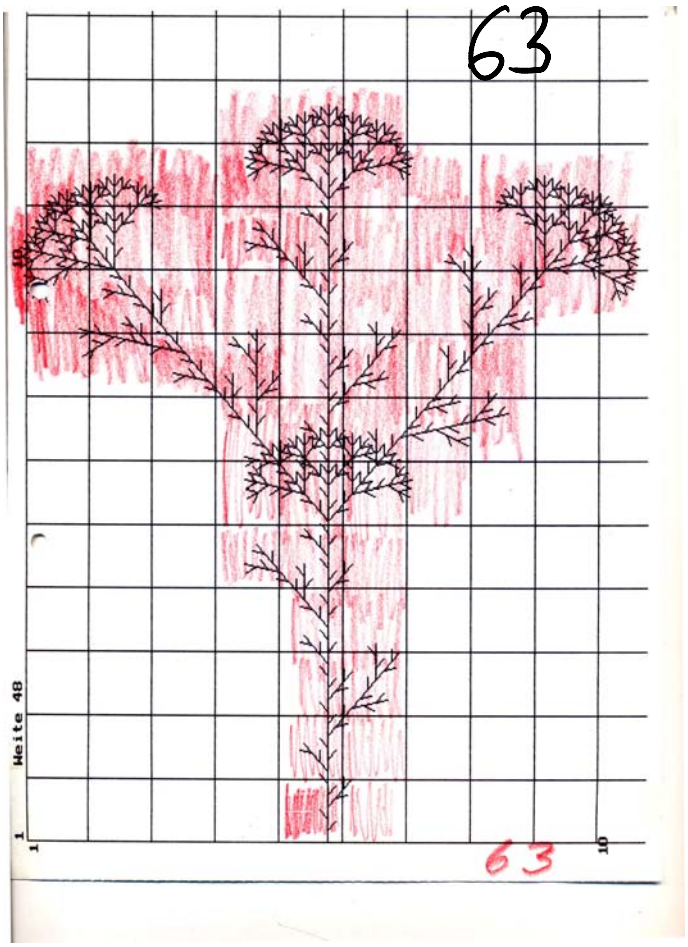
$$d = \frac{\log z}{\log k'} = \frac{\log 5}{\log 3} = 1{,}46.$$

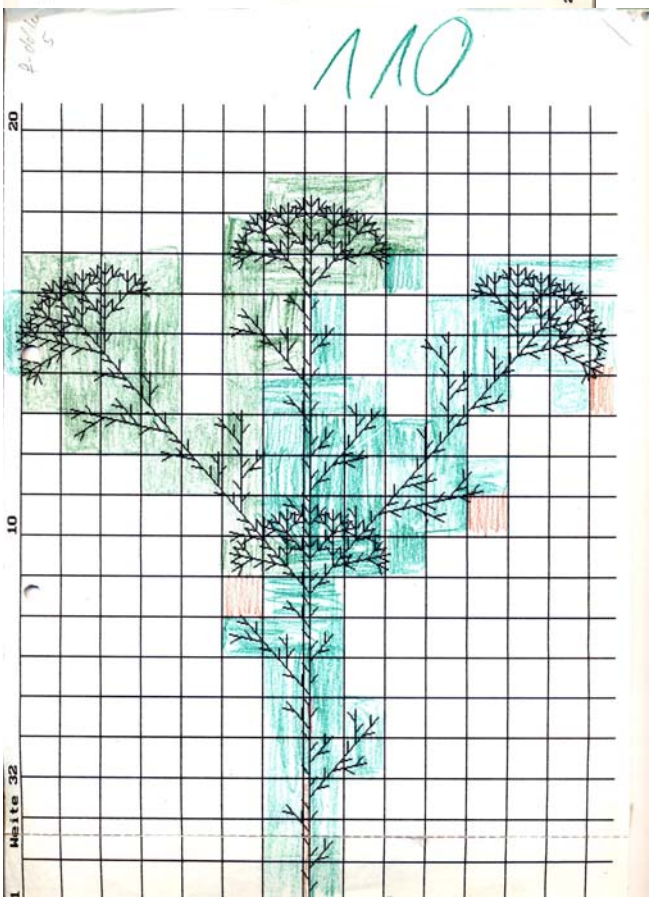


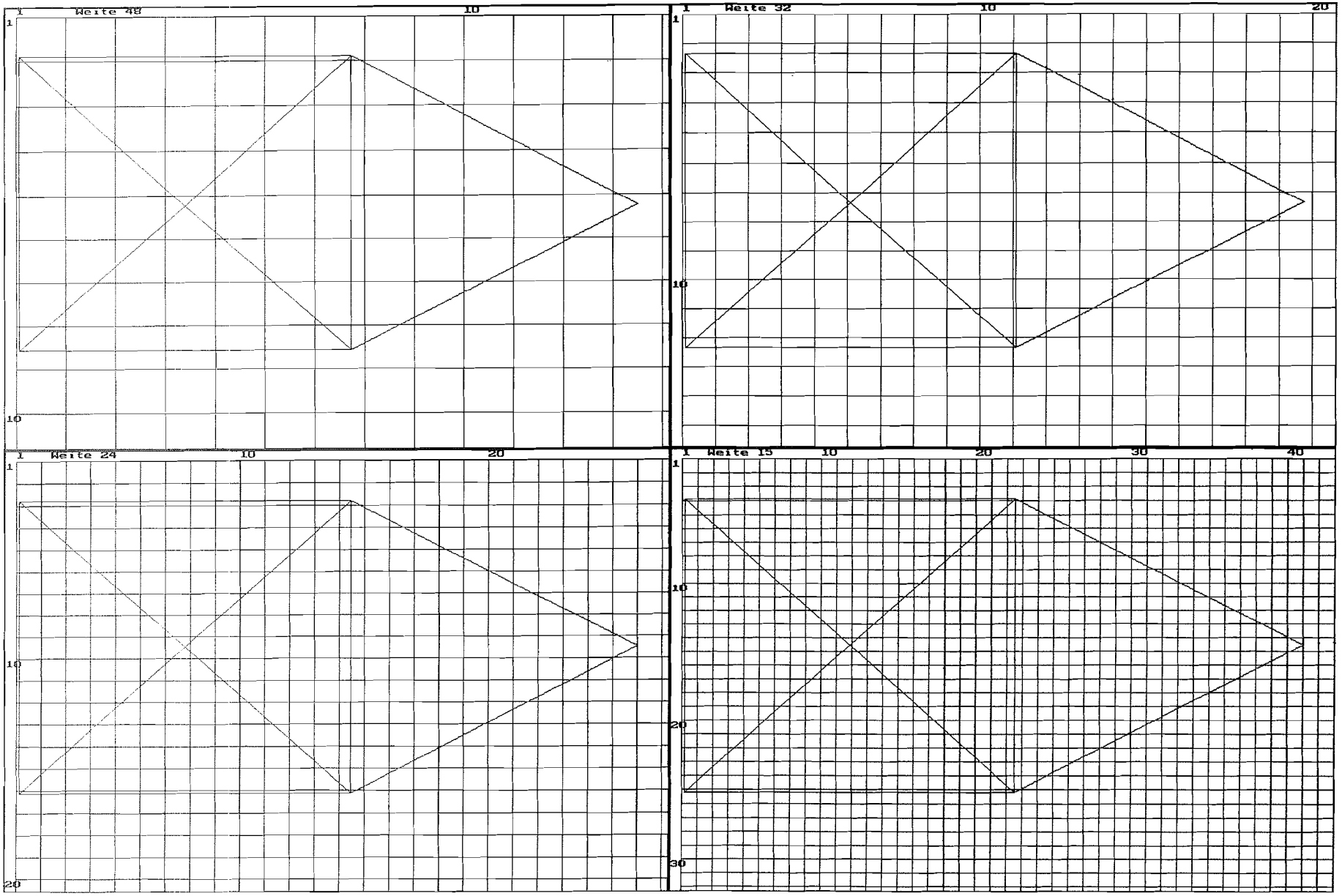
Auszählungen zur Bestimmung der Boxdimension von Fraktalen k= Größe des Fraktals in Karos links ablesbar, links oben k=47 m= Zahl der vom Fraktal getroffenen Karos. (Wurde von Schülern gezählt). Trage die Punkte (k/m) in doppelt-logarithmischer Darstellung auf und bestimme die Ausgleichsgerade (in Excel=Trendlinie). Ihre Steigung ist die Boxdimension D des Fraktals.









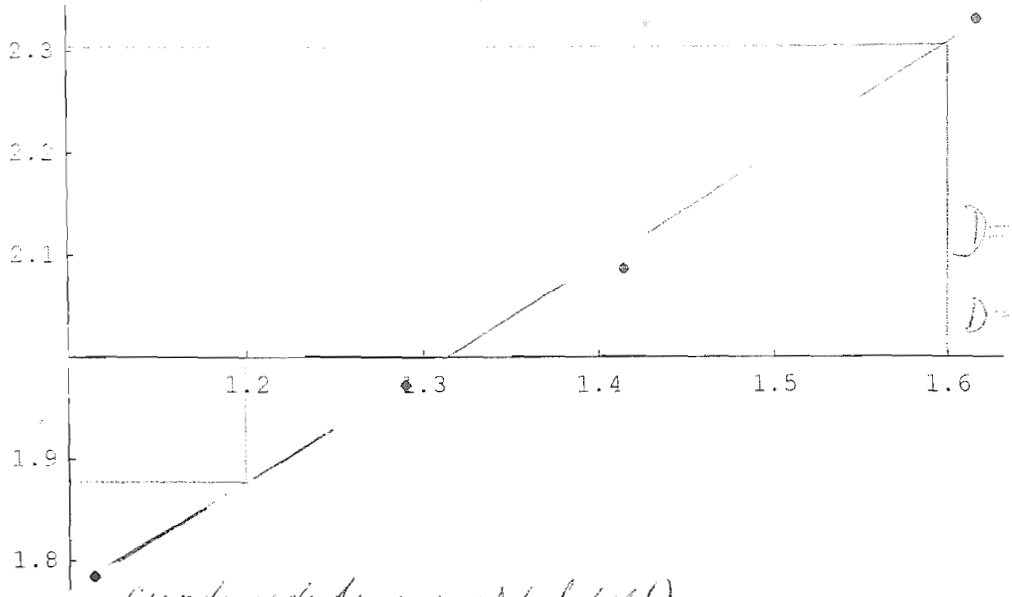


Nikolaus

Zähle, wieviele Karos von der Linie getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension Ha 95

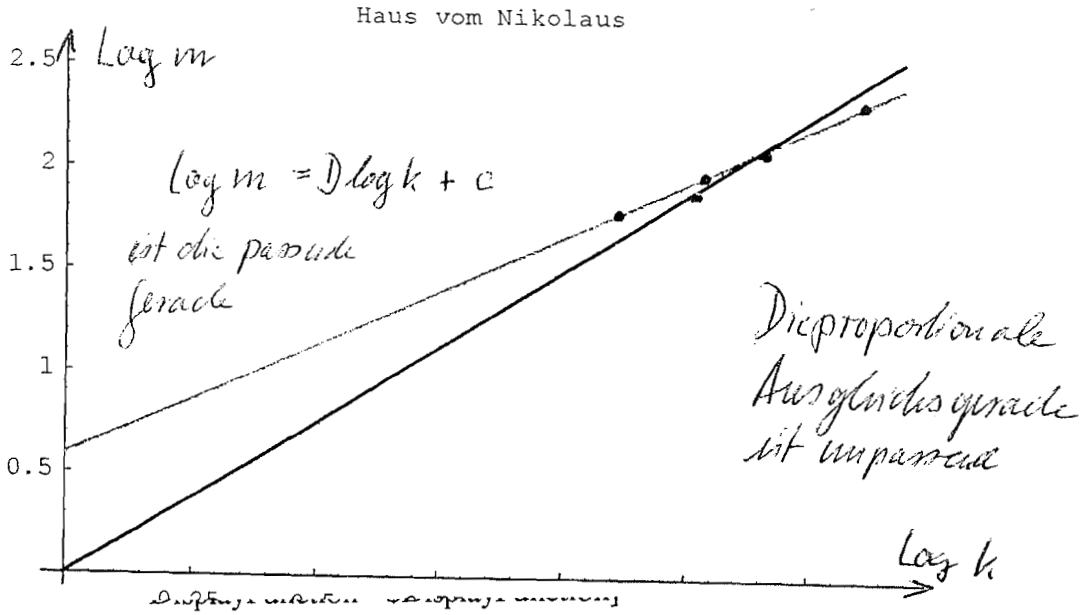
dopLgPunkte=ListPlot[dopLgDaten]

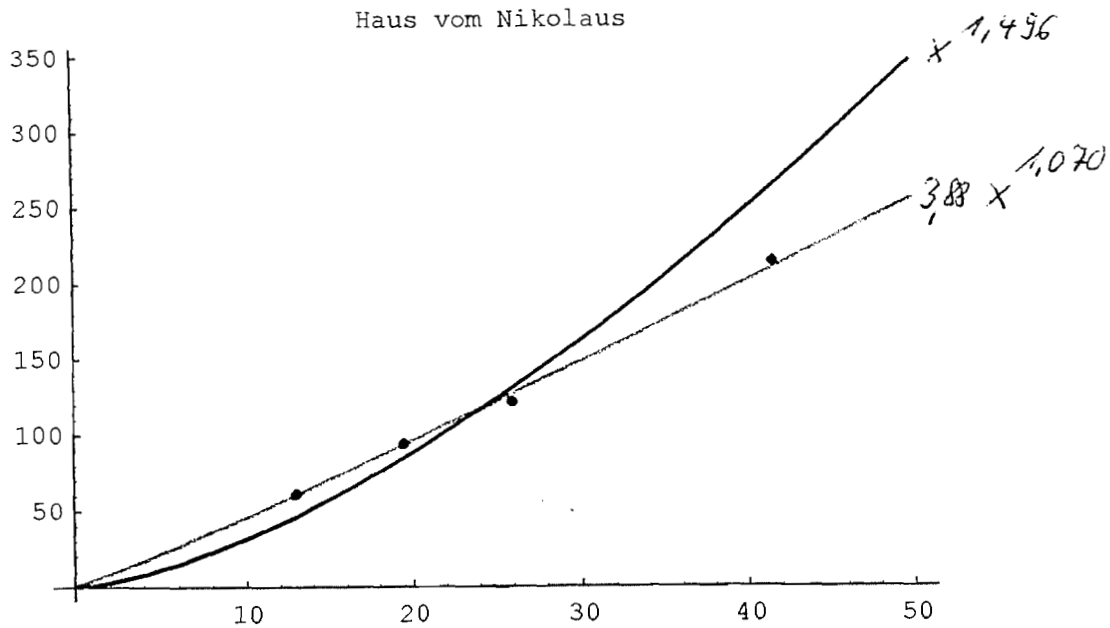


$D = \frac{2{,}31 - 1{,}88}{0{,}4}$

$D = 1{,}075$

Gerade nach Augenmaß (ehrlich!)

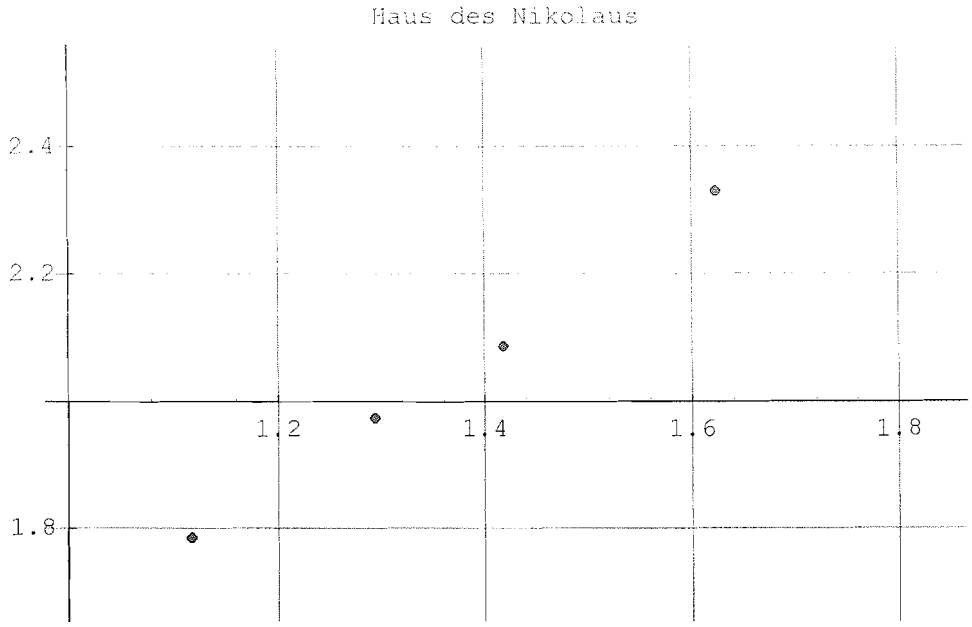


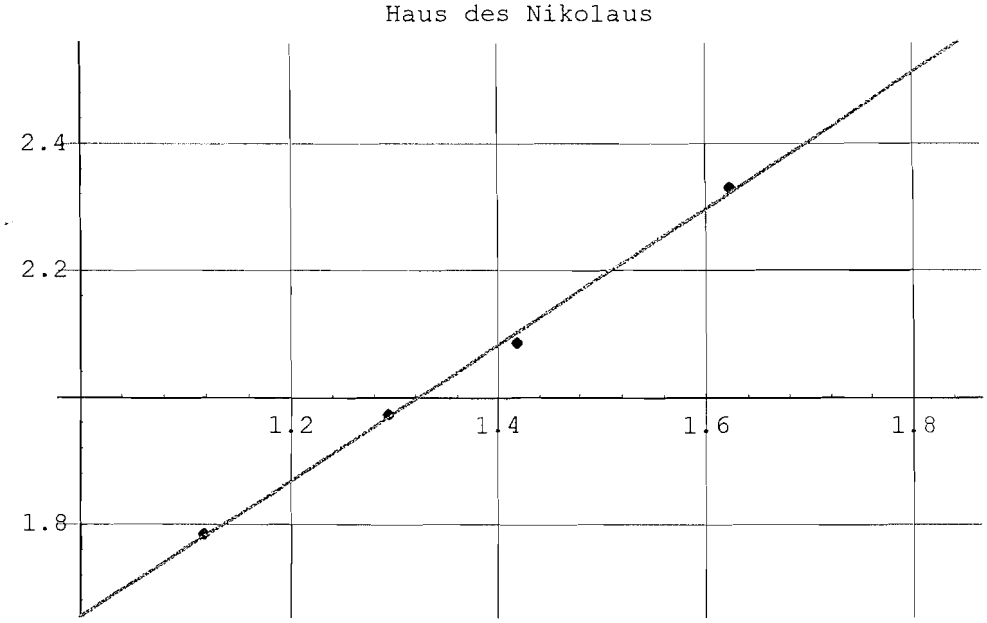


Out[67]=

-Graphics-

1.3.29





Out[65]=

```
Gesamtmaß:  K =35  W = 18   g = 630
```

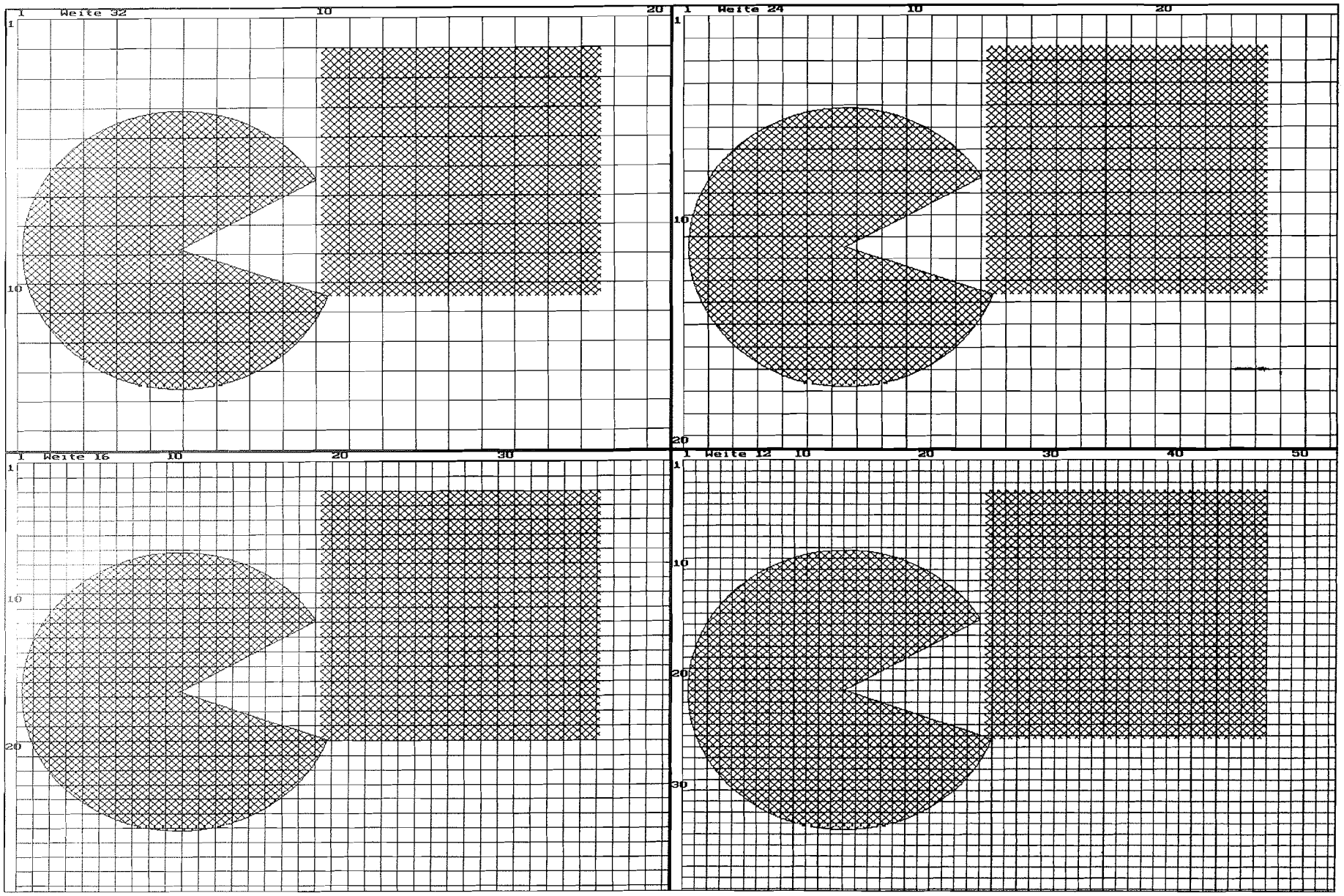
Out[66]//MatrixForm=

48	34	24	16
13.125	19.6875	26.25	42.
61.	94.	122.	214.
1.1181	1.29419	1.41913	1.62325
1.78533	1.97313	2.08636	2.33041

Out[67]=

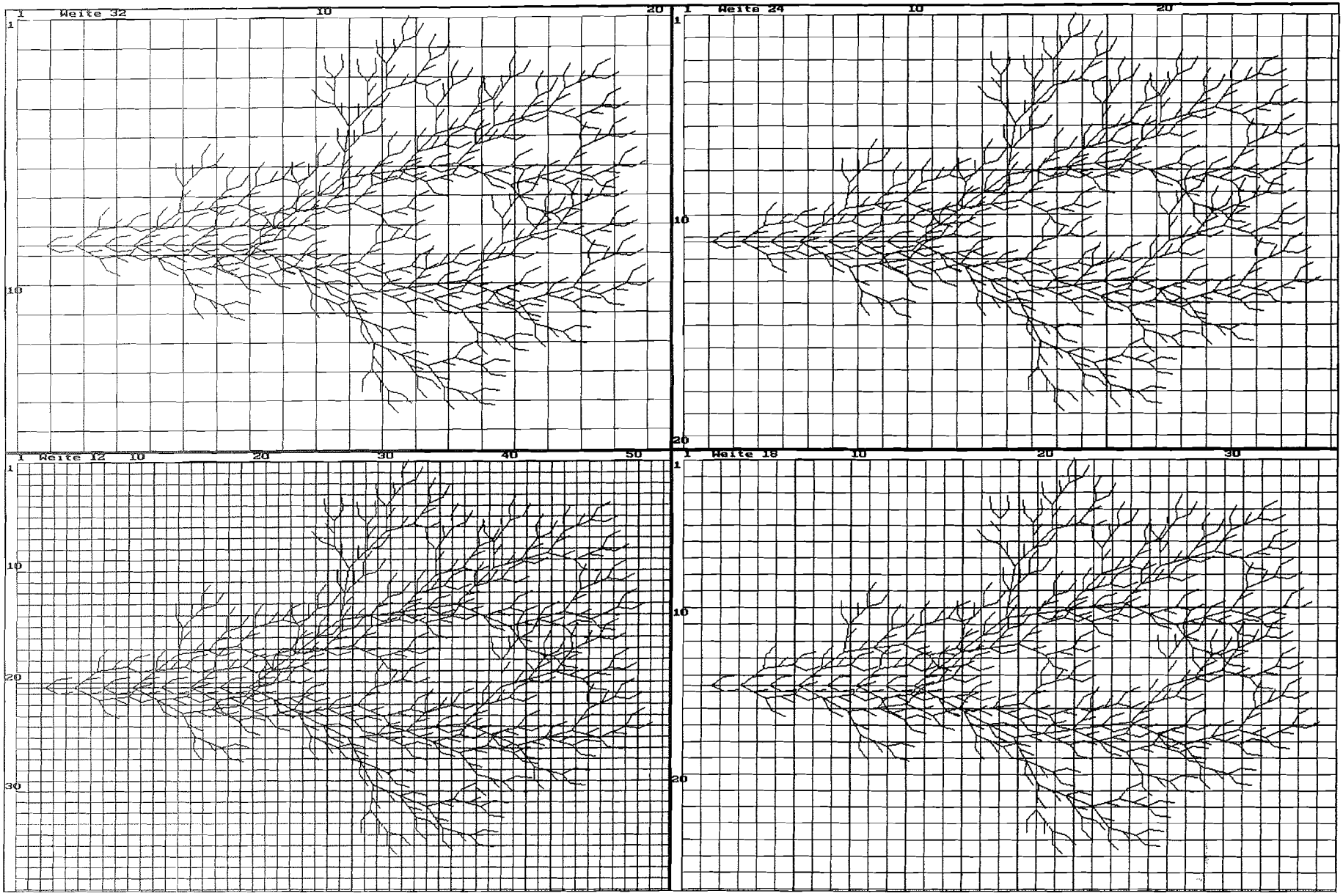
```
0.584065 + 1.07045 x
```

Die Steigung dieser Geraden ist eine Näherung für die Boxdimension.



Fläche

Zähle, wieviele Karos von der Fläche getroffen werden.



Busch 4 Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden. Bestimmung der Boxdimension Ha 95

In[39]:=

```
xmax=60;  ymax=800; name="Busch 4";
```

Achtung, bei Änderung der Daten hier Zeichenbereiche anpassen und Überschrift ändern.

In[40]:=

```
Lg[x_]:=Log[10,x]
```

Gerade wade, Augenmaß

In[41]:=

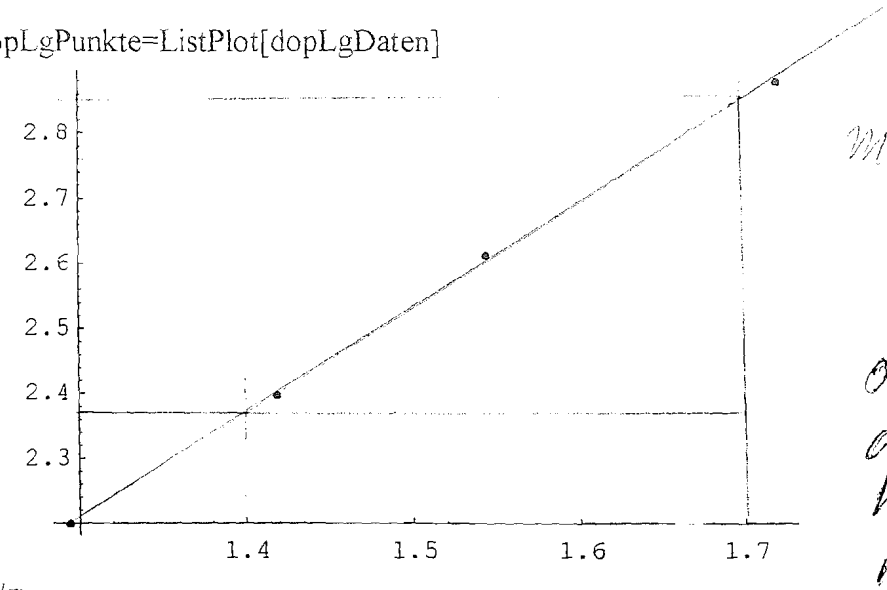
```
dopLgDaten=N[Map[Lg,daten]]
```

Out[41]=

```
{{1.29419, 2.19866}, {1.41913, 2.39794}, {1.54407, 2.61172},
  {1.72016, 2.87795}}
```

In[42]:=

```
dopLgPunkte=ListPlot[dopLgDaten]
```

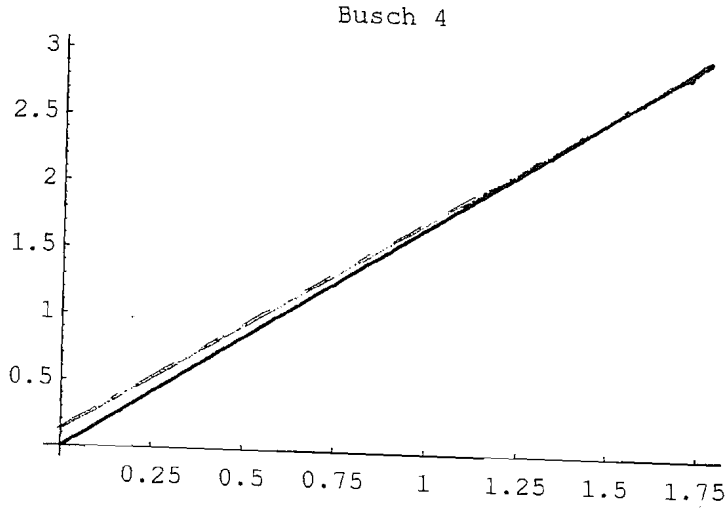


$$m = \frac{2{,}85 - 2{,}37}{0{,}3} = \frac{0{,}48}{0{,}3} = \underline{\underline{1{,}60}}$$

Ohne Maßstab!! das ist der Wert der nicht-prop.-Geraden

Out[42]=

-Graphics-



Out[46]=

-Graphics-

In[47]:=

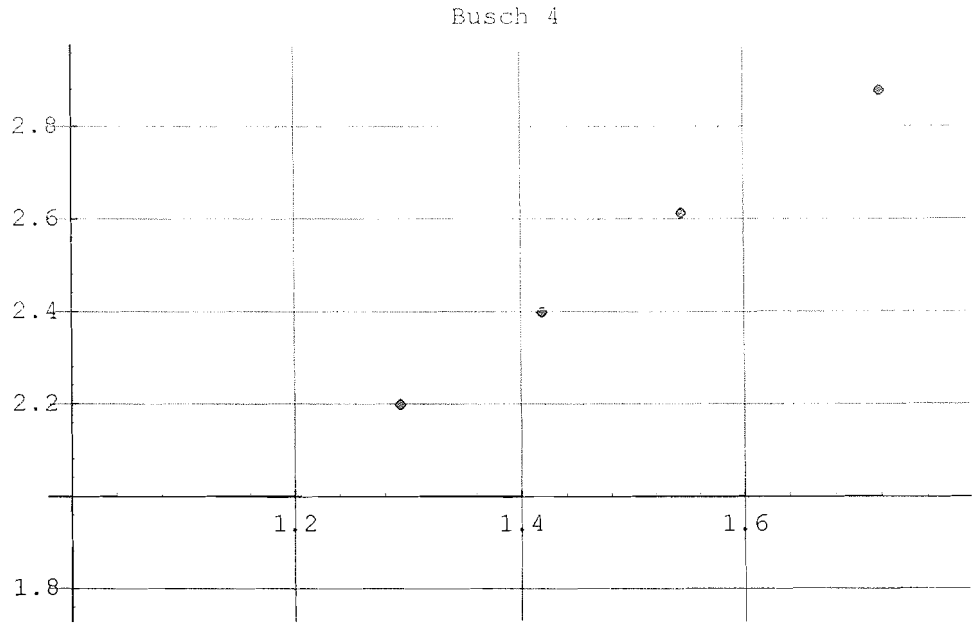
```
d=gerade[[2,1]];
a=Power[10,gerade[[1]] /d];
dprop=geradeprop[[1]];
fkt=Power[a x,d]
fktprop=Power[x,dprop]
```

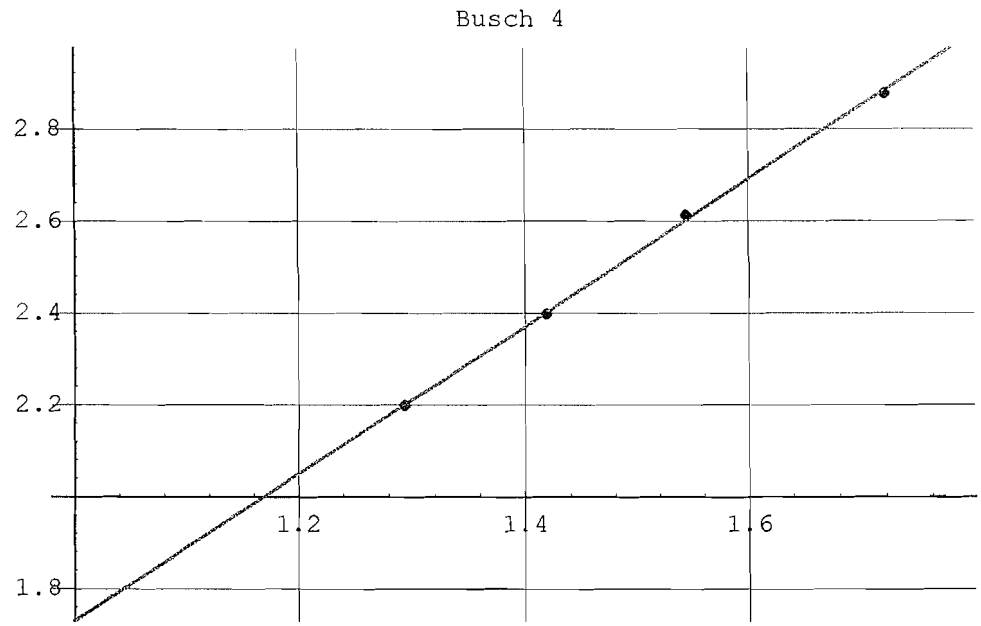
Out[50]=

$$1.34155\ x^{1.60197}$$

Out[51]=

$$x^{1.68642}$$





Out[403]=

```
Gesamtmaß: K =35 W = 18  g = 630  Umrechnung  k = 630: Weite
```

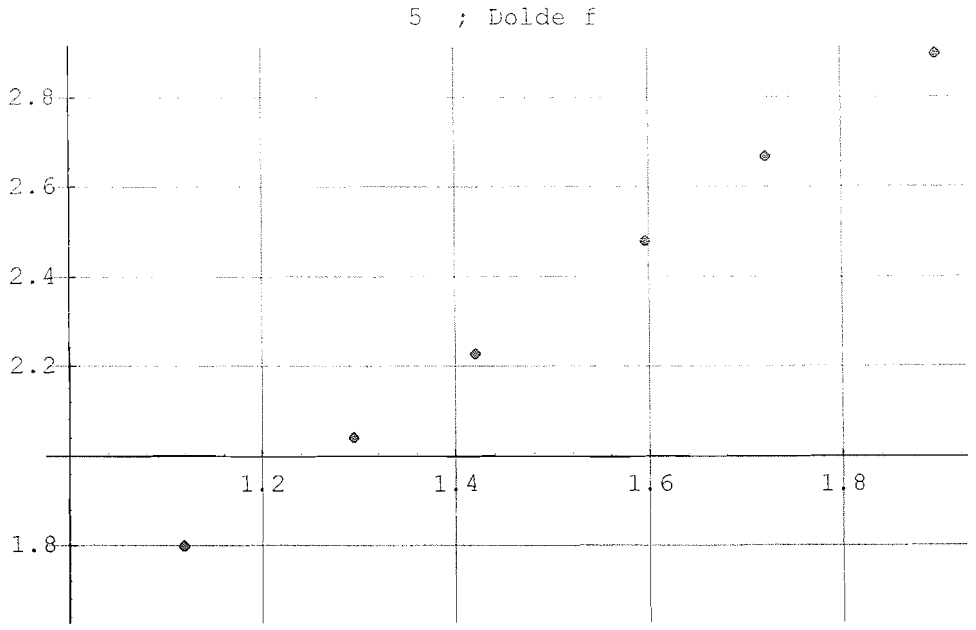
Out[404]//MatrixForm=

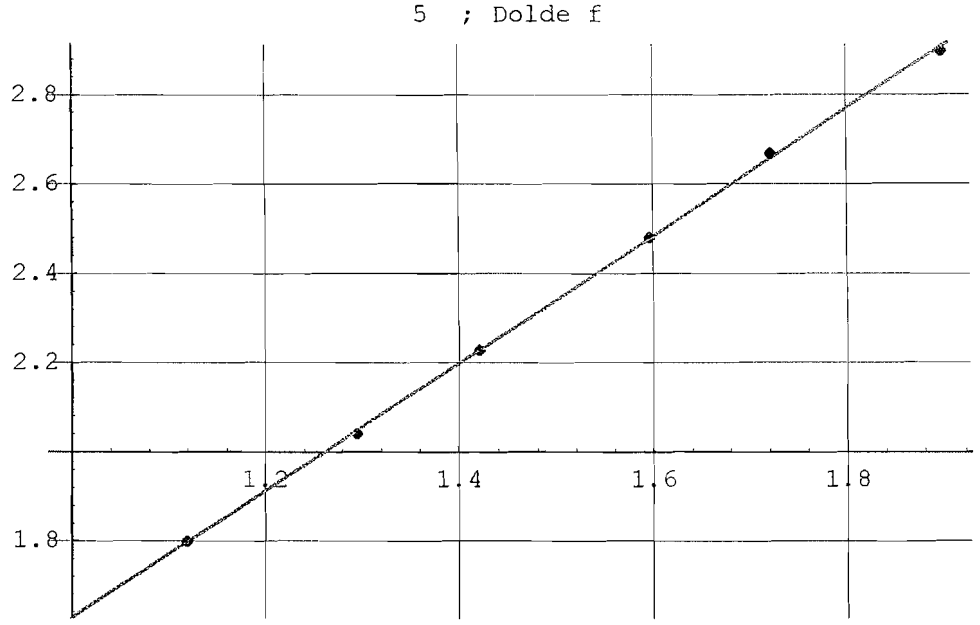
32	24	18	12
158	250	409	755
19.6875	26.25	35.	52.5
158.	250.	409.	755.
1.29419	1.41913	1.54407	1.72016
2.19866	2.39794	2.61172	2.87795

Out[405]=

```
0.127607 + 1.60197 x
```

Die Steigung dieser Geraden ist eine Näherung für die Boxdimension.






```
StringForm["Gesamtmaß: K =`` W = ``  g = ``  Umrechnung  k = ``: Weite",K,W,g,g]
MatrixForm[{rohDaten,daten,dopLgDaten}]
gerade
```

Out[787]=

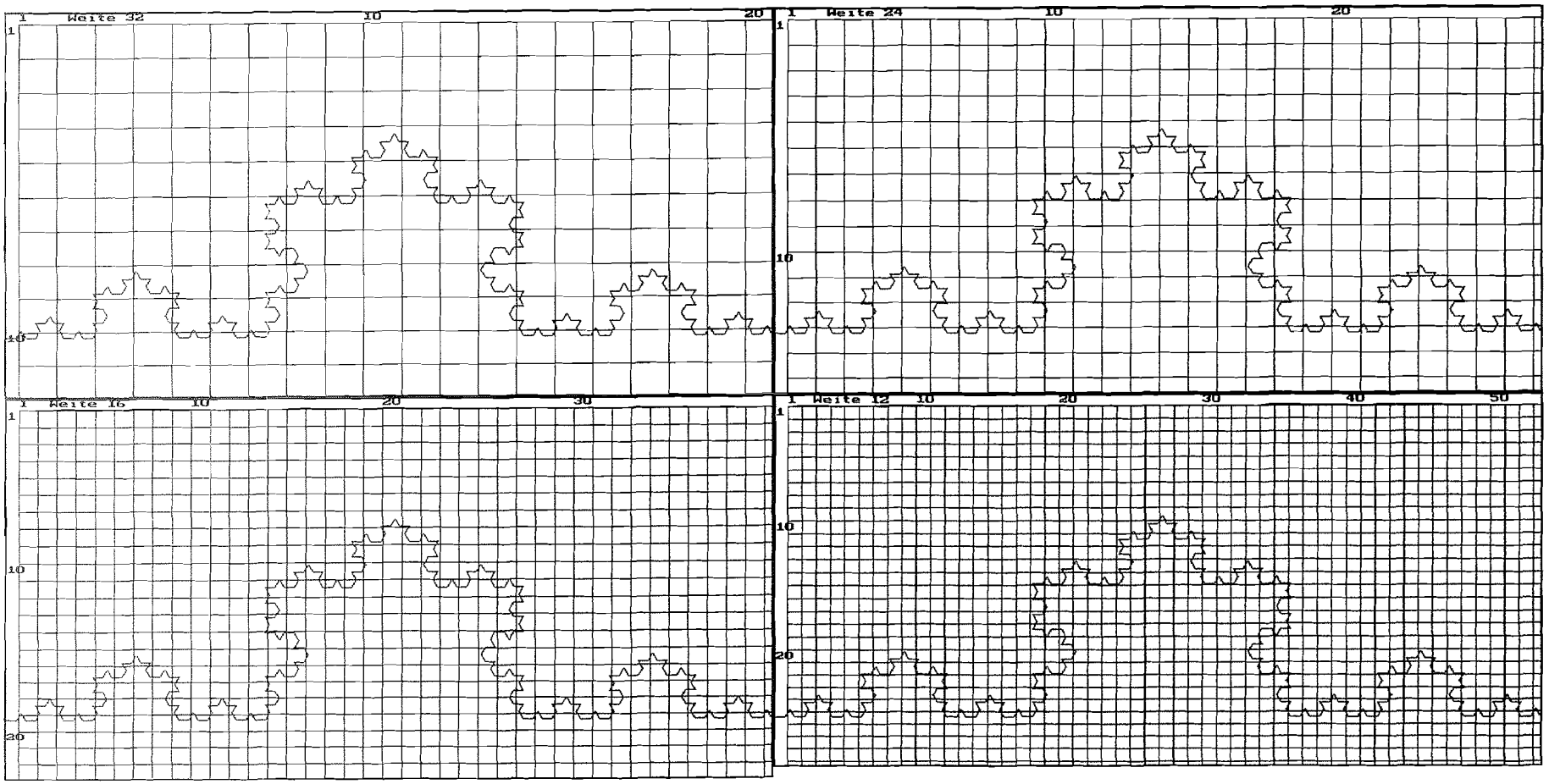
```
Gesamtmaß: K =79 W = 8  g = 632  Umrechnung  k = 632: Weite
```

Out[788]//MatrixForm=

48	32	24	16	12	8
63	110	169	302	465	788
13.1667	19.75	26.3333	39.5	52.6667	79.
63.	110.	169.	302.	465.	788.
1.11948	1.29557	1.42051	1.5966	1.72154	1.89763
1.79934	2.04139	2.22789	2.48001	2.66745	2.89653

Out[789]=

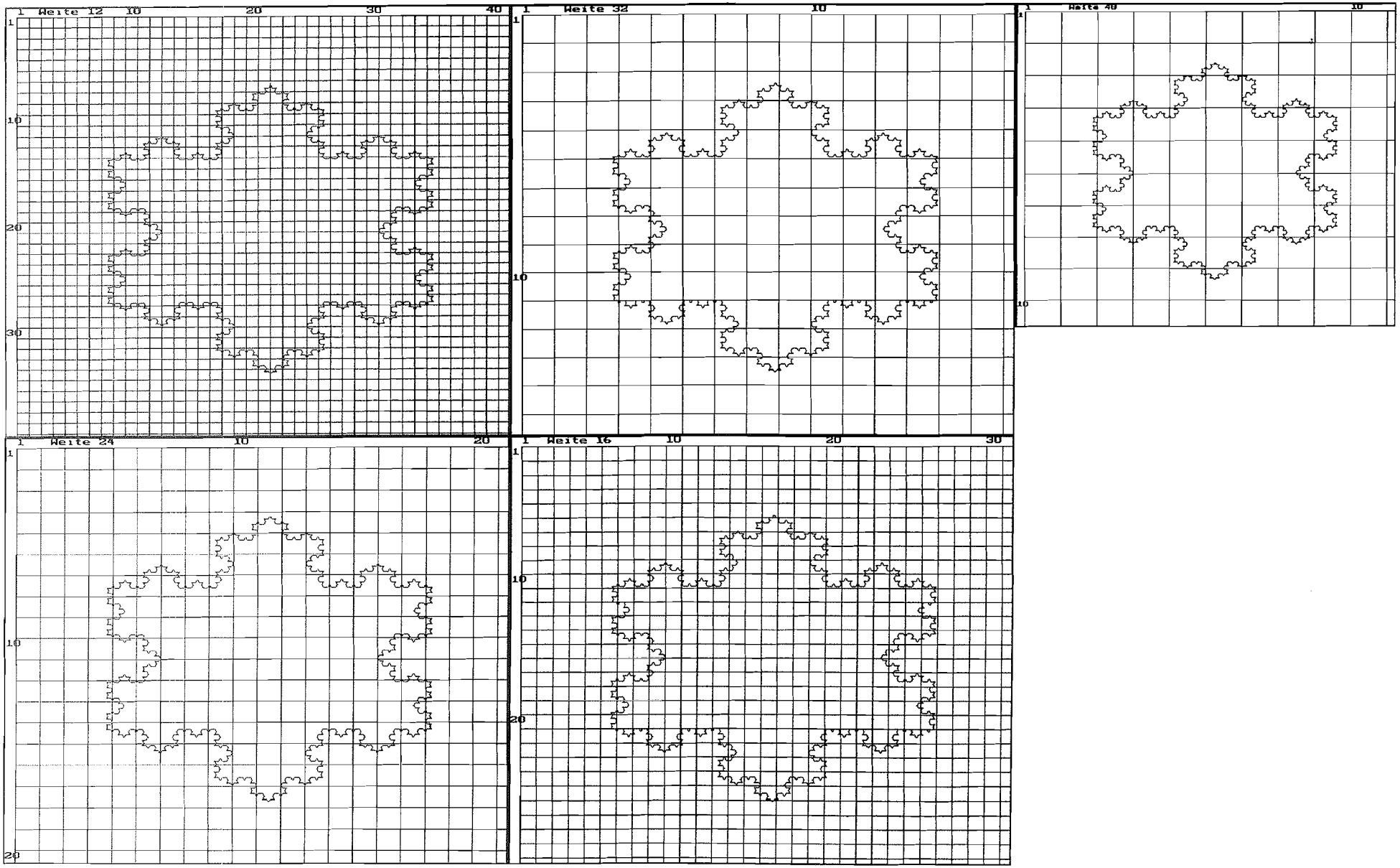
```
0.203821 + 1.42407 x
```



Kochkurve 4

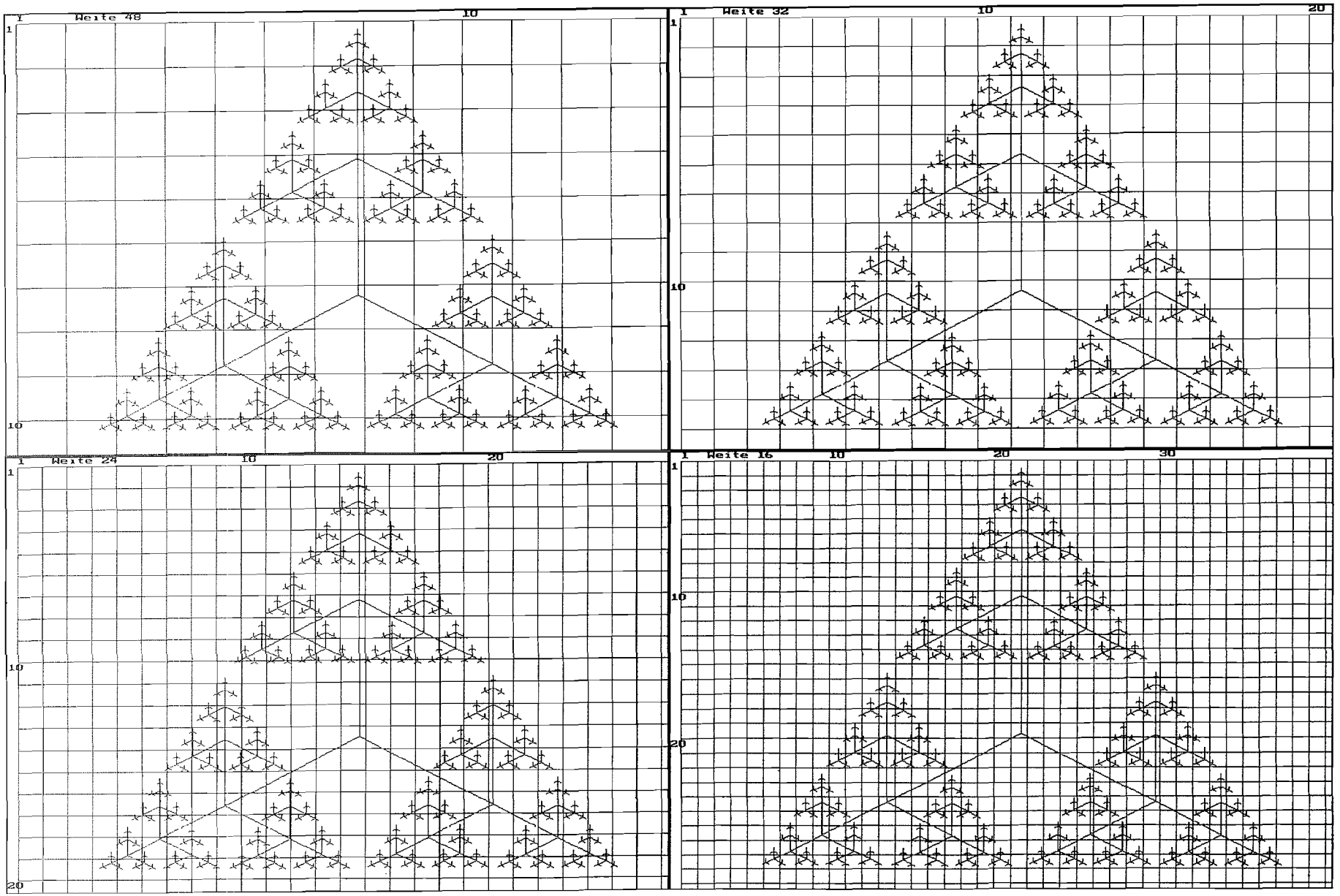
Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension Ha 95



Schneeflocke 4

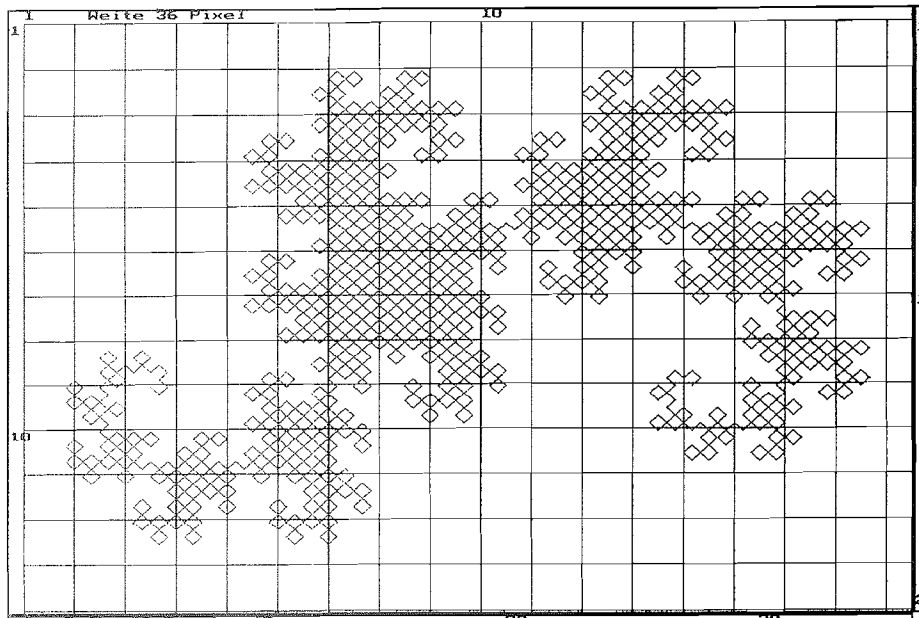
Zähle, wieviele Karos von dem ~~Linie~~ Fraktal getroffen werden.

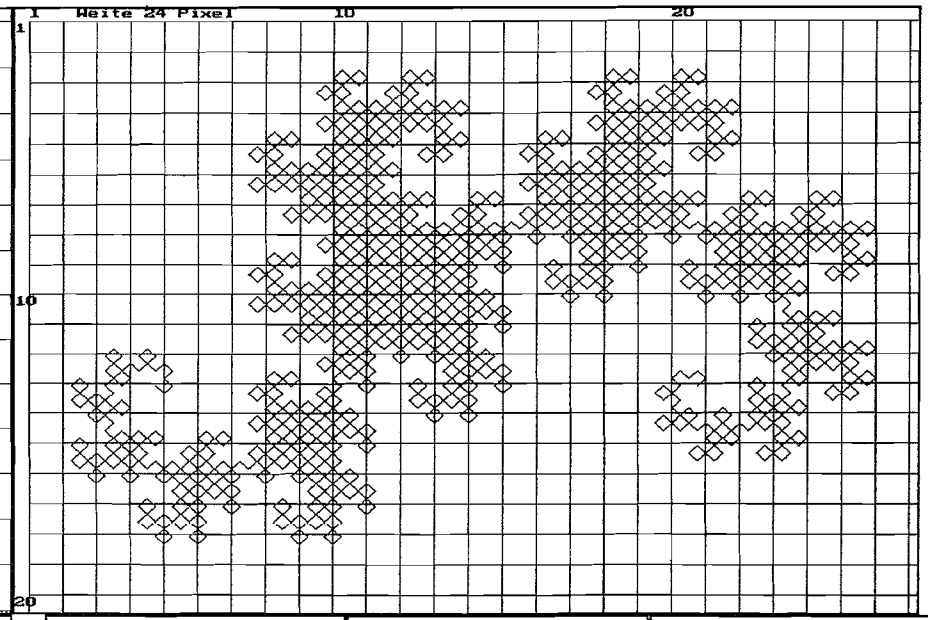


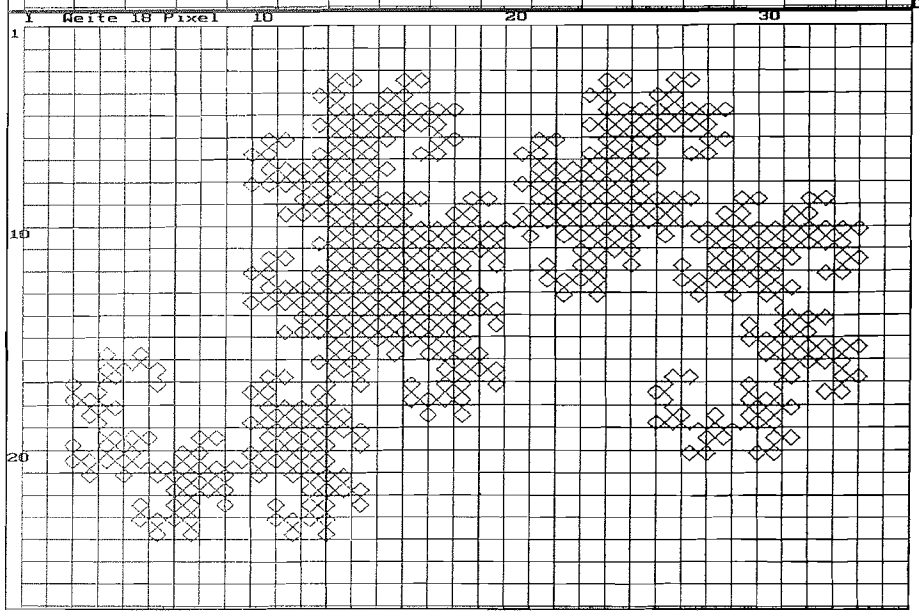
Ternärer Baum 6

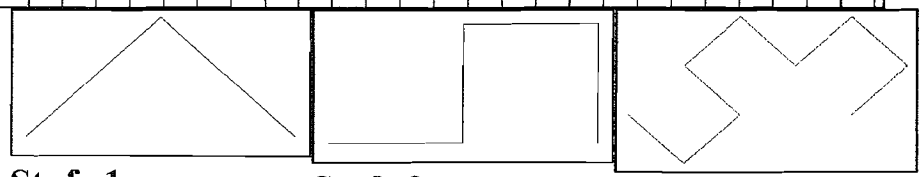
Zähle, wieviele Karos von dem ~~Linie~~ Fraktal getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension Ha 95









Stufe 1 **Stufe 2** **Stufe 3**

Kennst du das Drachenfraktal aus dem spannenden Buch

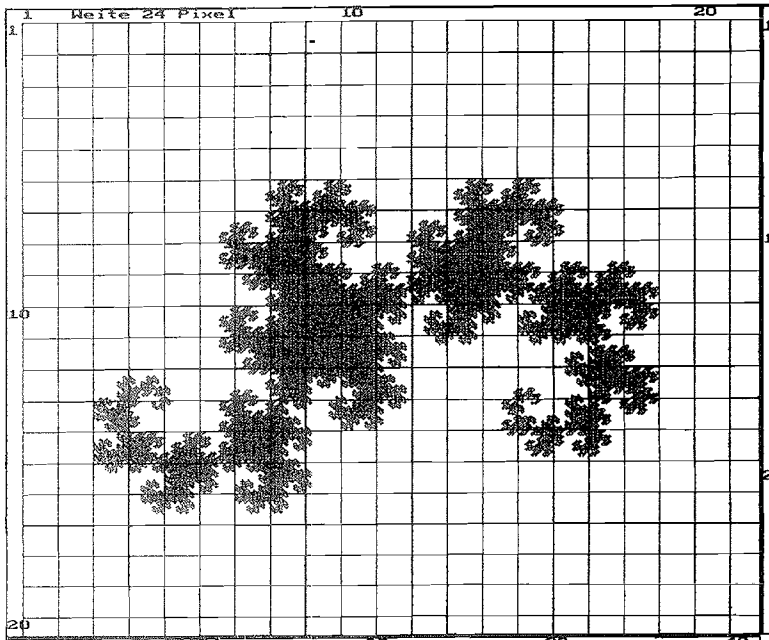
Dinopark von Michael Crichton ?

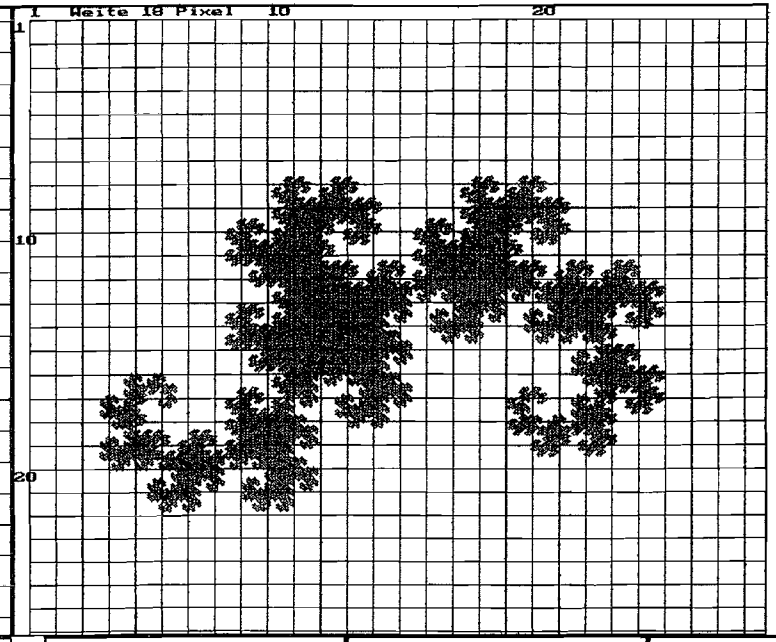
An Anfang eines jeden Kapitels ist es um eine Stufe mehr gezeichnet.
Es hat 7 Kapitel, dies aber ist die 11. Stufe.

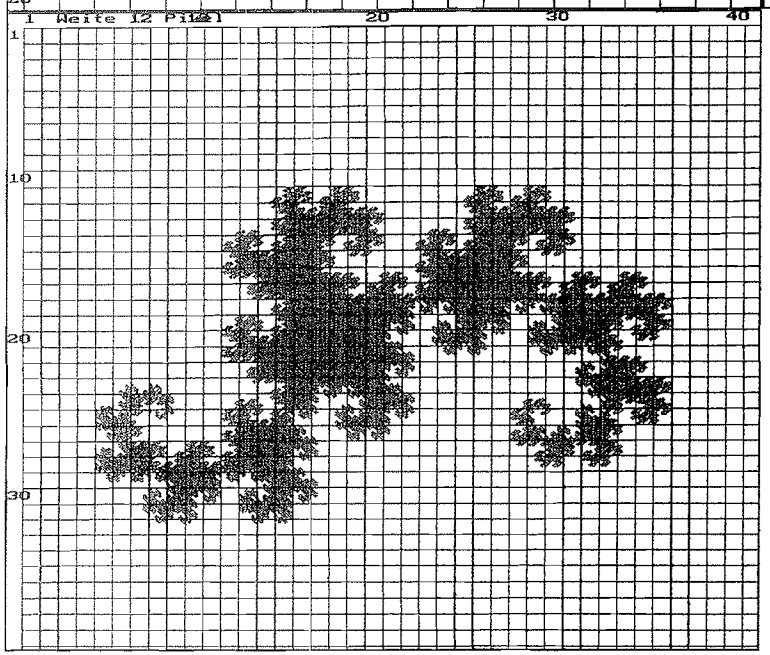
Drachen 11

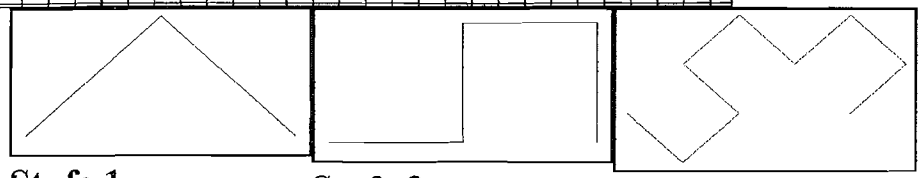
Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension Ha 95









Stufe 1 **Stufe 2** **Stufe 3**

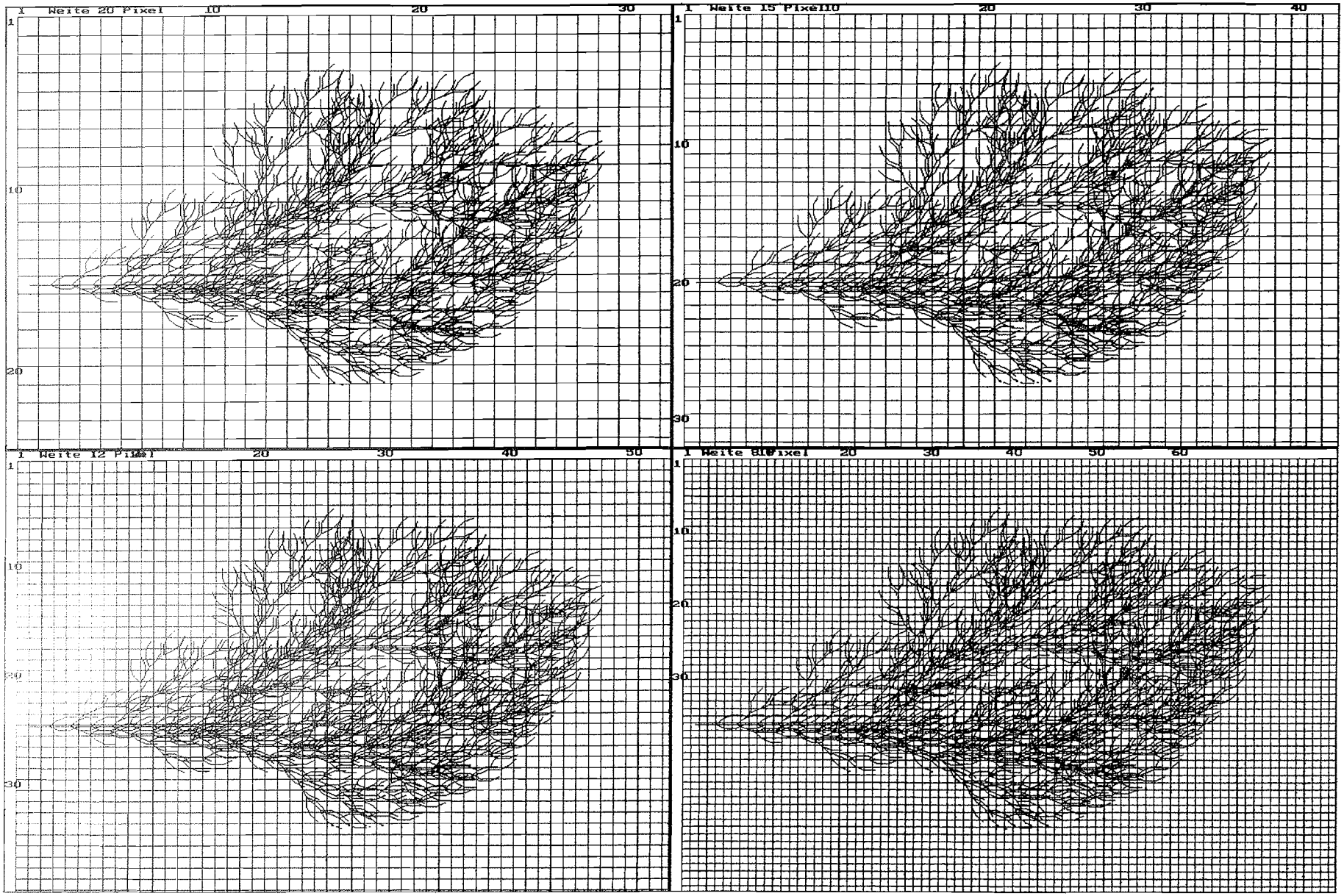
Kennst du das Drachenfraktal aus dem spannenden Buch **Dinopark** von Michael Crichton ?

Am Anfang eines jeden Kapitels ist es um eine Stufe mehr gezeichnet.
Es hat 7 Kapitel, dies aber ist die 15. Stufe.

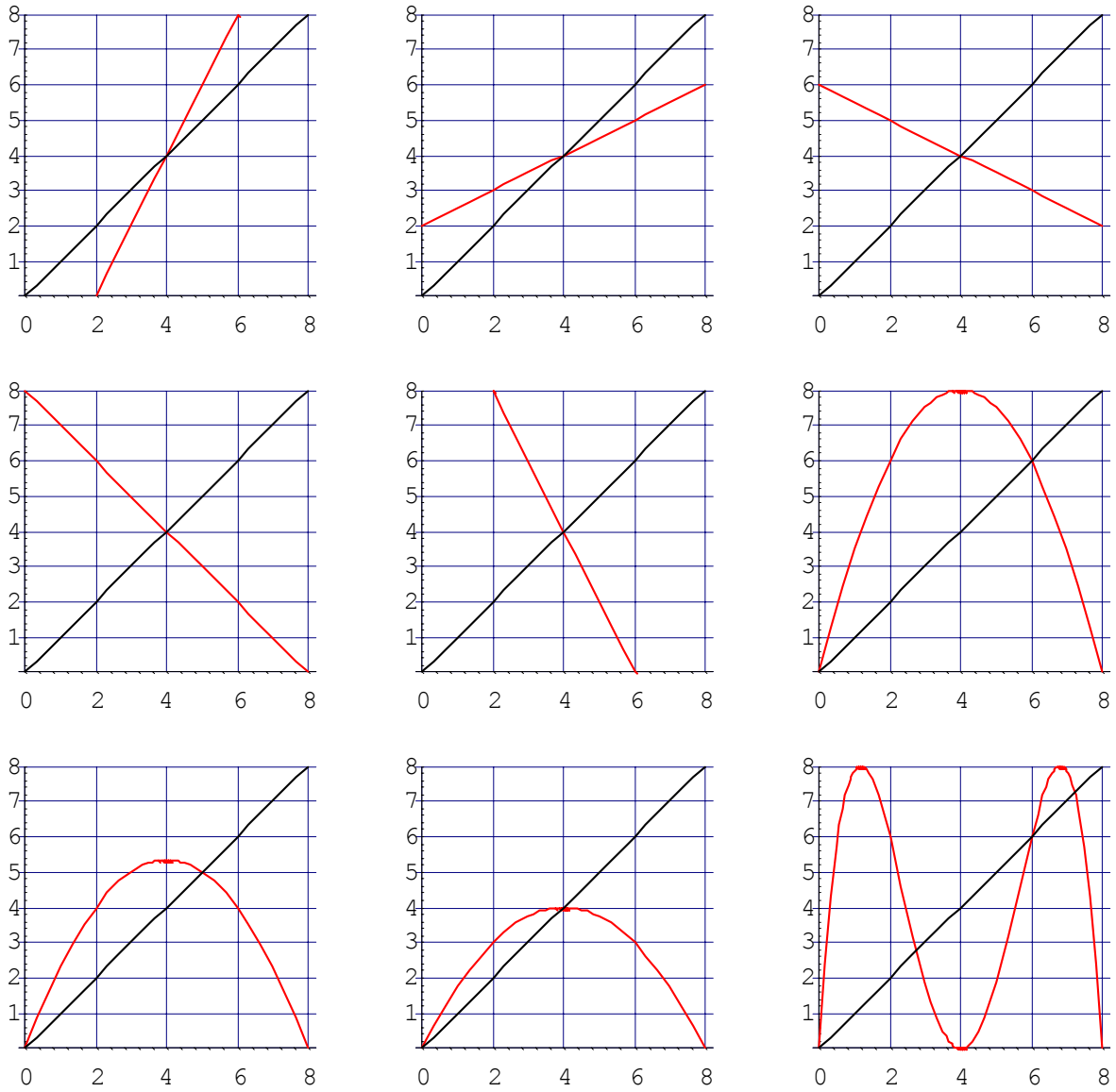
Drachen 15

Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden.

Bestimmung der Boxdimension Ha 95



Wedel (Lindenmayer) 4 Zähle, wieviele Karos von dem Fraktal getroffen werden. Bestimmung der Boxdimension Ha 95



$f_1(x) = 2x - 4$	$f_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$	$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 6$
$f_4(x) = -x + 8$	$f_5(x) = -2x + 12$	$f_6(x) = \frac{1}{2}x\,(8 - x)$
$f_7(x) = \frac{1}{3}x\,(8 - x)$	$f_8(x) = \frac{1}{4}x\,(8 - x)$	$f_9(x) = \frac{1}{2}f_6(x)\,(8 - f_6(x))$

Gezeichnet sind die **Trägerfunktionen** für entsprechende **rekursiv definierte Folgen.**
Es gilt $a_{n+1} = f(a_n)$. Als Startwert a_0 kann jeder Wert genommen werden. In diesen Zeichnungen sollte er zwischen 0 und 8 liegen.
Zeichnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0. Wiederhole oft:

senkrecht zur Kurve, waagerecht zur Winkelhalbierenden

Rechnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0. Berechne a_1 mit der Formel, notiere und speichere a_1. Berechne a_2 mit der Formel, notiere und speichere a_2. Und so weiter.