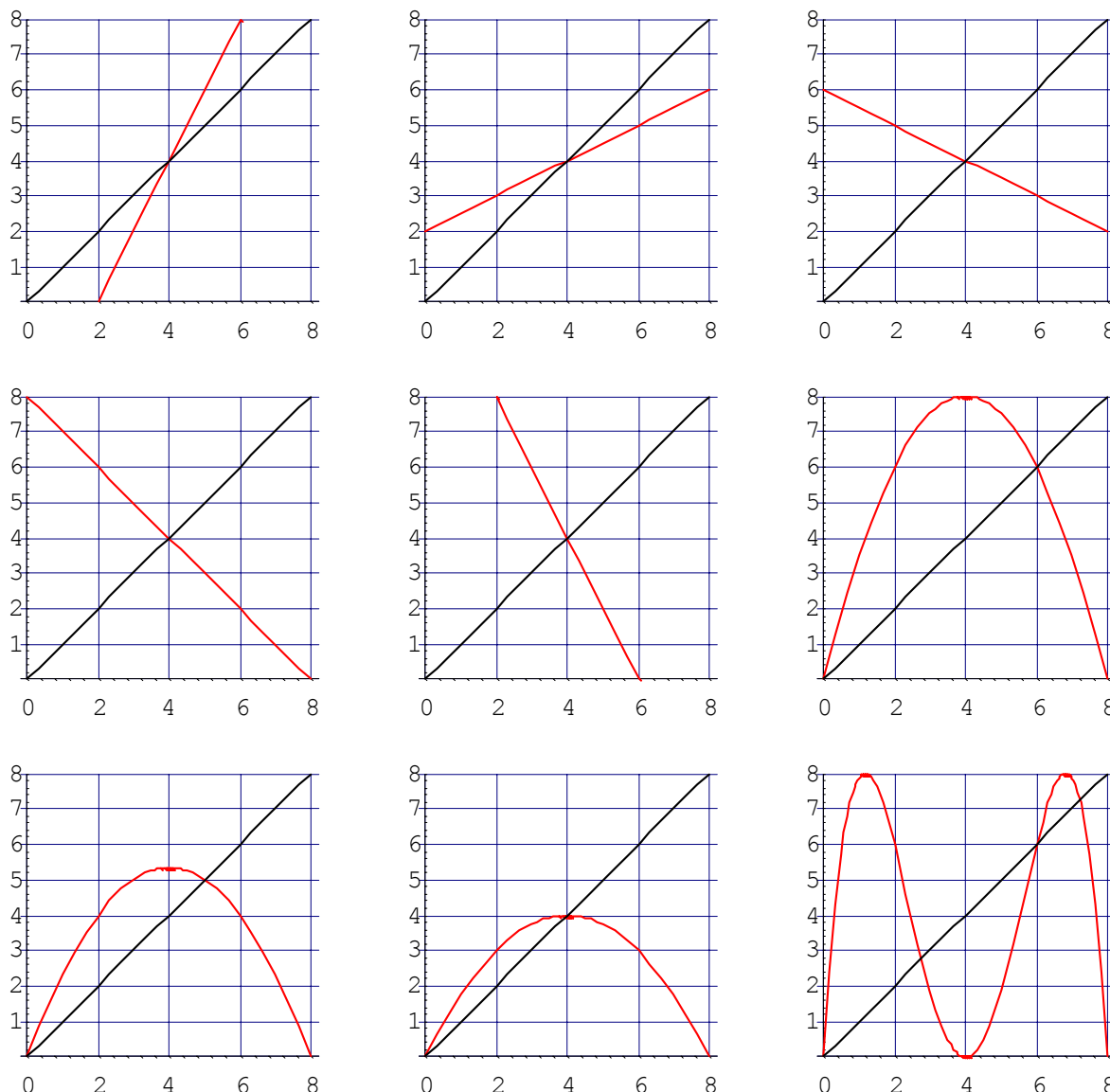


Chaos und Fraktale Rekursion Erste Erfahrungen



$f_1(x) = 2x - 4$	$f_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$	$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 6$
$f_4(x) = -x + 8$	$f_5(x) = -2x + 12$	$f_6(x) = \frac{1}{2}x(8 - x)$
$f_7(x) = \frac{1}{3}x(8 - x)$	$f_8(x) = \frac{1}{4}x(8 - x)$	$f_9(x) = \frac{1}{2}f_6(x)(8 - f_6(x))$

Gezeichnet sind die **Trägerfunktionen** für entsprechende **rekursiv definierte Folgen**.

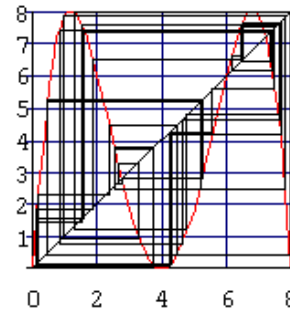
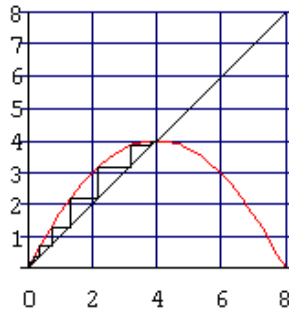
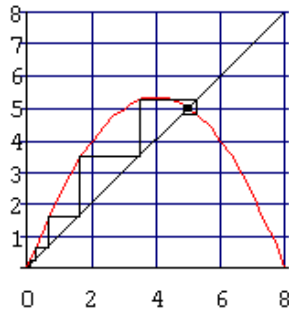
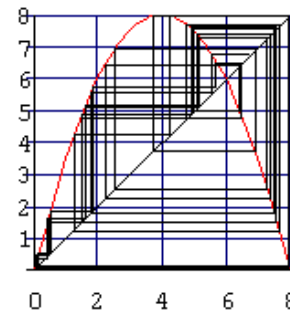
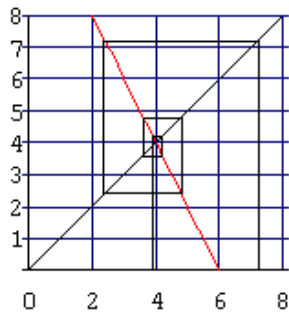
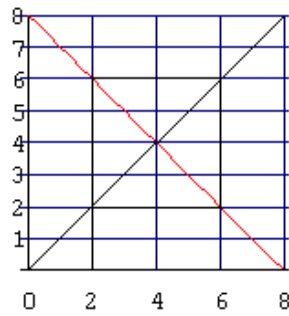
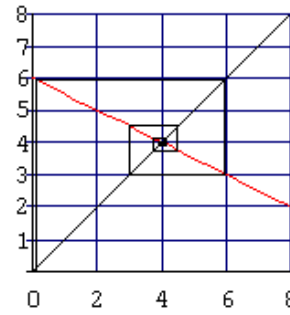
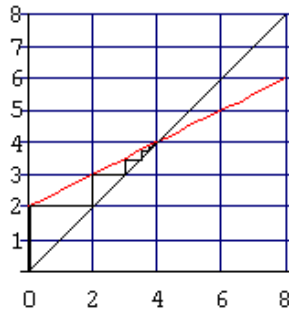
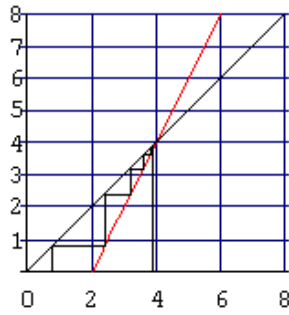
Es gilt $a_{n+1} = f(a_n)$. Als Startwert a_0 kann jeder Wert genommen werden. In diesen Zeichnungen sollte er zwischen 0 und 8 liegen.

Zeichnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0 . Wiederhole oft:

senkrecht zur Kurve, waagrecht zur Winkelhalbierenden

Rechnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0 . Berechne a_1 mit der Formel, notiere und speichere a_1 . Berechne a_2 mit der Formel, notiere und speichere a_2 . Und so weiter.

Chaos und Fraktale Rekursion Lösungen



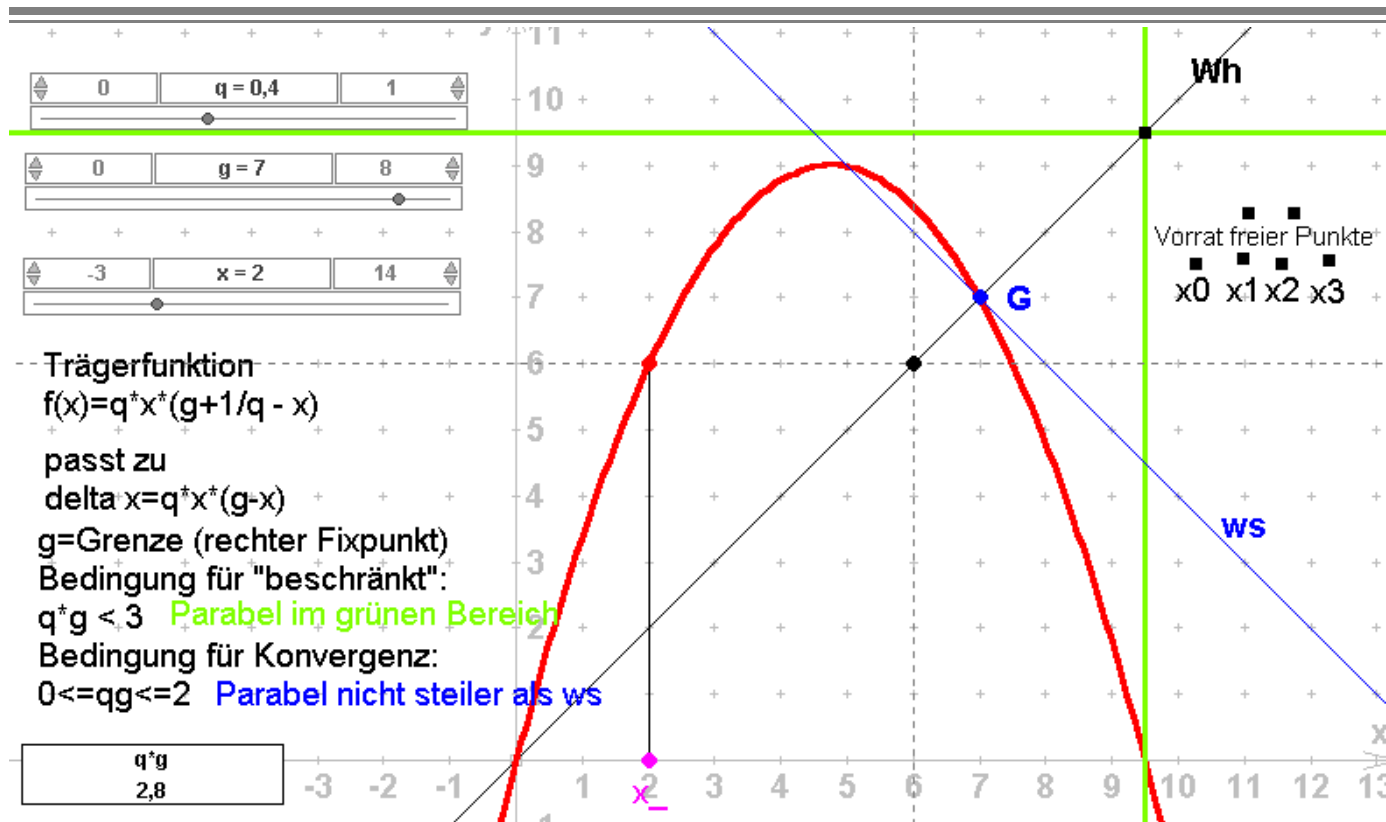
$a_{n+1} = 2 a_n - 4$	$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 2$	$a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + 6$
$a_{n+1} = -a_n + 8$	$a_{n+1} = -2 a + 12$	$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n (8 - a_n)$
$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n (8 - a_n)$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n (8 - a_n)$	$a_{n+1} = \frac{1}{2} f_6(a_n)(8 - f_6(a_n))$

- {f1, {3.9, 3.8, 3.6, 3.2, 2.4, 0.8, -2.4, -8.8}},
- {f2, {0.1, 2.05, 3.025, 3.5125, 3.75625, 3.87812, 3.93906, 3.96953}},
- {f3, {0.1, 5.95, 3.025, 4.4875, 3.75625, 4.12187, 3.93906, 4.03047}},
- {f4, {0.1, 7.9, 0.1, 7.9, 0.1, 7.9, 0.1, 7.9}},
- {f5, {3.9, 4.2, 3.6, 4.8, 2.4, 7.2, -2.4, 16.8}},
- {f6, {0.1, 0.395, 1.50199, 4.87997, 7.61283, 1.47373, 4.80899, 7.67277}},
- {f7, {0.1, 0.263333, 0.679107, 1.65722, 3.5038, 5.25126, 4.81145, 5.11385}},
- {f8, {0.1, 0.1975, 0.385248, 0.733393, 1.33232, 2.22087, 3.20867, 3.84345}},
- {f9, {0.1, 1.50199, 7.61283, 4.80899, 1.25538, 7.97273, 0.428873, 5.17619}}

Analysis und Sek I "Wachstum" Logistische Parabel

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt

5. Juli 2004



Nutzen dieser Euklid-Dynageo-Datei:

- Erklärung der Treppchendarstellung (Spinnweb~).
- Erkundung der Wirkung von q bei festem g .
- Erkundung der Wirkung von g bei festem q .
- Bestätigung der links unten genannten Bedingungen für qg .
- Überlegungen warum die Konvergenzbedingung so sein muss.
- In Analysis kann diese Bedingung errechnet werden.
- Überlegungen warum die Beschränktheitsbedingung so sein muss.
- Diese Bedingung kann auch in der Sek I errechnet werden. (Ebenso die folgenden B.)
- Erkundung einer Bedingung für monotonen Wachstum der Folge.
- Erkundung, wann die Folge gegen 0 strebt.

Hinweise:

zu A) Wähle am x -Regler einen Startwert, hier 2, setze den freien Punkt x_0 auf x_- . (* Verfolge die Striche zur Funktion, zur y -Achse, die graphische Spiegelung an der Wh , setze dort x_1 hin. Setze mit dem Regler x - auf x_1 .) Wiederhole(*....*) mit $x_2, x_3 \dots$

zu E) Die Steigung im Fixpunkt muss betragsmäßig kleiner 1 sein (siehe Vorübungen mit Geraden).

zu F) Die Ableitung der Trägerfunktion ist an der Stelle g auf -1 zu setzen. Daraus ist qg zu bestimmen.

zu G) Der Bereich (grün) ist durch die Nullstelle bestimmt. Wenn der Scheitel der Parabel oben hinauswandert, kommen Folgenglieder zustande, die auf der x -Achse rechts von der Nullstelle liegen. Dann wird der nächste Wert negativ und die Folge strebt gegen $-\infty$

zu H) Die Nullstelle ist bei $g + 1/q$ und die Scheitelstelle auf der Hälfte. Der Scheitelwert muss kleiner als $g + 1/q$ sein.

zu I) Die Folge wächst ausschließlich, wenn die Steigung in G nicht negativ ist.

zu J) Die Folge strebt gegen 0, wenn $qg \leq 0$ ist.

Definition: Eine Folge heißt *streng rekursiv*,

wenn $a_n = f(a_{n-1})$ gilt.

f soll sonst nur Konstanten enthalten. Jedes gegebene a_0 definiert zusammen mit der rekursiven Formel eine neue Folge. Dann gibt es die **Trägerfunktion** f der Folge, deren Funktionsterm durch Einsetzen von x anstelle der Folgenglieder entsteht.

a ist Fixpunkt, wenn gilt $a=f(a)$

Der Fixpunkt a ist
anziehend, wenn gilt $|f'(a)| < 1$
unklarer Art, wenn gilt $|f'(a)| = 1$
abstoßend, wenn gilt $|f'(a)| > 1$

Beispiel Logistische Parabel

$a_n = r \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1})$ hat die Trägerfunktion $f(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$

Sei $r > 0$. Wichtig ist das Intervall $[0,1]$. Startwerte sollen in diesem Intervall liegen.

Fragen:

Ā Welche Fixpunkte hat $\{a_n\}$?

Ī Welche Steigung hat f_r in den Fixpunkten?

Ē Für welche r gibt es zwei / einen / keinen anziehenden Fixpunkt im Intervall $[0,1]$?

Ñ Für welches r hat die Parabel den maximalen Wert 1? Was bedeutet es für die Folge, wenn r noch größer wird?

Ö g mit $g(x) = f(f(x)) = (f \otimes f)(x)$ heißt die zweifach Iterierte von f .

Welches ist die zweifach Iterierte der logistischen Parabel, welchen Graphen hat sie? (Z.B. für $r=3,5$) Untersuchen Sie möglichst mit CAS, (Computer-Algebra-System oder Graphikzeichner), welche Wirkung r auf die zweifach Iterierte hat und überlegen Sie, was das für die Folgen bedeutet.

Weitere Beispiele lassen sich leicht finden. Man braucht lediglich eine von einem Parameter abhängige Kurvenschar, die für irgendwelche Parameterwerte die Winkelhalbierende schneidet. Wenn dann die Steigung im Schnittpunkt sowohl Werte annimmt, die betragsmäßig kleiner 1 sind, als auch solche, die betragsmäßig größer als 1 sind, dann gibt es alle an der logistischen Parabel beobachteten Phänomene, insbesondere auch ein Attraktor-Diagramm (=Feigenbaum-Diagramm) mit Bifurkationskaskade. Das beste schulgemäße Werkzeug hierfür ist Turboplot www.turboplot.de, beschrieben auch in www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt. Insbesondere können Lernende selbst solche Kurven erfinden und erkunden. Besonders einfach sind Parabelscharen, aber auch Heron-Verfahren, rekursiv formulierte Schnittprobleme wie $x = r \cdot \cos(x)$ u.s.w.

Logistische Parabel

$$a_n = r \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1})$$

$$f(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$$

f ist die Trägerfunktion für die rekursive Folge a_n .

Die **logistische Gleichung** beschreibt viele Vorgänge in Natur und Technik. Insbesondere in der Biologie kann man a_n deuten als Bevölkerungszahl z.B. einer Mäusepopulation in einem begrenzten Lebensraum. Der Parameter r ist dann aus Geburten- und Sterberate zusammengesetzt, mit n ist die Zyklus-Zeit, etwa Wochen, gemeint. Die logistische Gleichung sagt dann aus, dass die Bevölkerungszahl proportional ist zum Produkt aus (momentaner) Bevölkerungszahl und "Abstand" von der Bevölkerungsgrenze.

Wie sich die Folge verhält, wird rechts auf zwei Arten dargestellt. Links ist a_n über a_{n-1} aufgetragen. Man nennt die Darstellung auch **Spinnwebverfahren**, Web-Darstellung, Phasendiagramm.

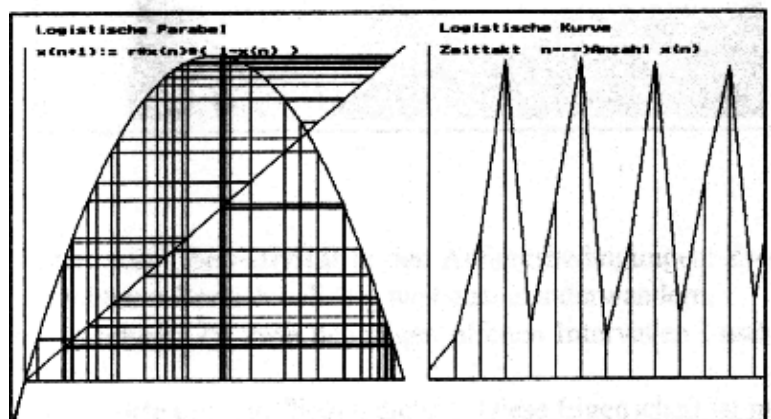
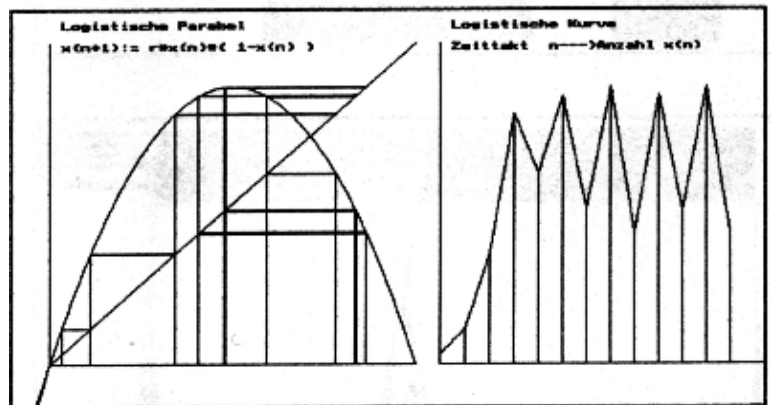
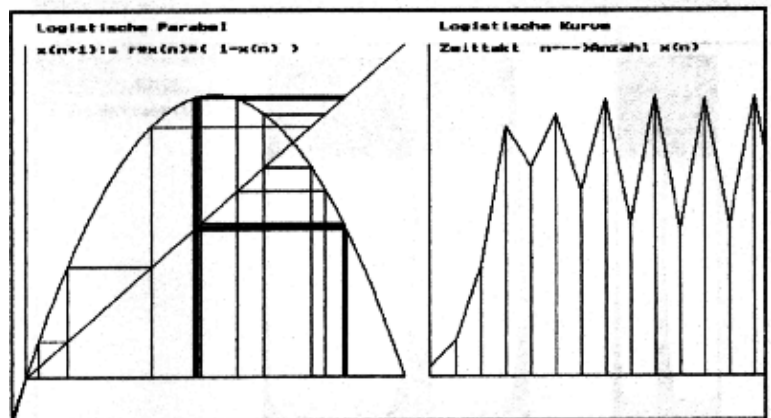
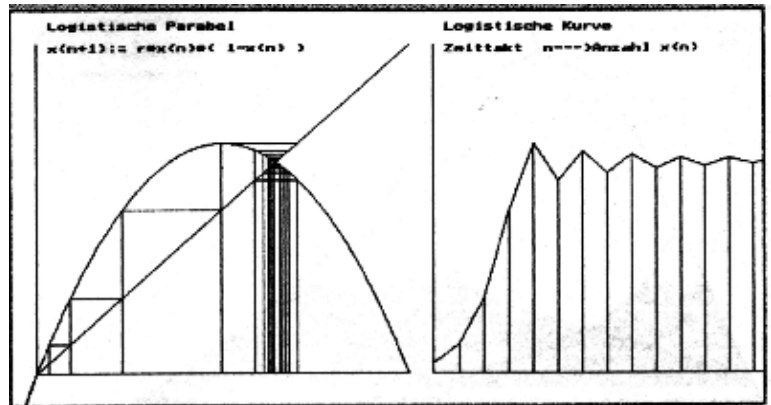
Man startet bei beliebigem a_0 und zeichnet immer abwechselnd senkrecht zur Kurve und waagrecht zur Winkelhalbierenden.

Rechts sind die so zustande gekommenen Bevölkerungszahlen über der Zeit n aufgetragen.

Das Verhalten der Folge wird im Wesentlichen von dem Parameter r beeinflusst.

Für $0 < r < 1$ konvergiert die Folge gegen 0.
 Für $1 < r < 3$ konvergiert die Folge gegen den rechten Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden. Er ist dann anziehender Fixpunkt. Das ist er nämlich genau solange, wie die Steigung von f im Schnittpunkt betragsmäßig kleiner ist als 1. Für $r > 1$ schneidet die Parabel rechts nicht.

Für $3 < r$ treten zuerst mehrere Häufungspunkte auf, ab $r = 3,57$ verhält sich die Folge chaotisch.



Das Feigenbaum-Szenario

wurde von Mitchel Feigenbaum in den 70-iger Jahren zuerst untersucht.

Auf der Hochachse ist von oben nach unten der Parameter r für die logistische Gleichung in einem vorher gewählten Bereich aufgetragen. Die Rechtsachse hat x -Werte zwischen 0 und 1.

Für jedes r aus dem Bereich entsteht eine Pixelzeile des Bildes. Es werden 100 Iterationen "im Dunkeln" gerechnet, für die nächsten 100 Iterationen wird ein Punkt in die Zeile gezeichnet. Wenn die Folge für dieses r konvergiert, sieht man nur das 200ste Pixel.

Beim oberen Bild geht r von 2,9 (oben) bis 4 (unten). Bei $r=3$ tritt die erste **Bifurkation** auf. Man sieht für die nun folgenden r das 199ste und 200ste Pixel. Es liegen zwei Häufungswerte vor, bis r auf 3,449489... angewachsen ist.

Diesen genauen Wert für r kann man aus den Schnitt-Steigungen der 2. Iterierten von f gewinnen.

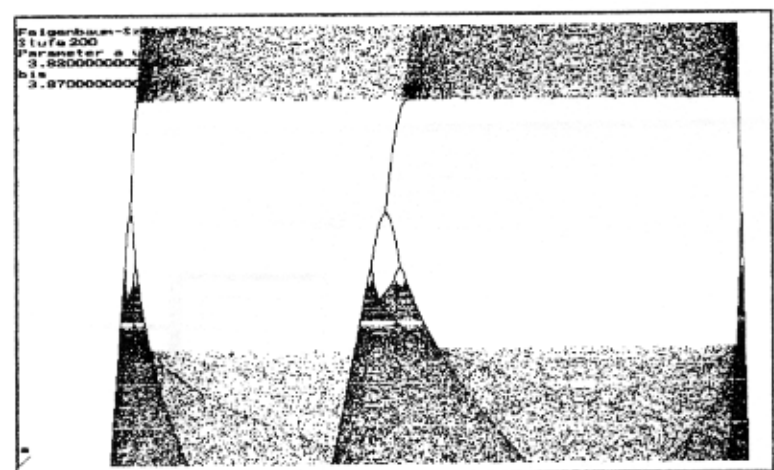
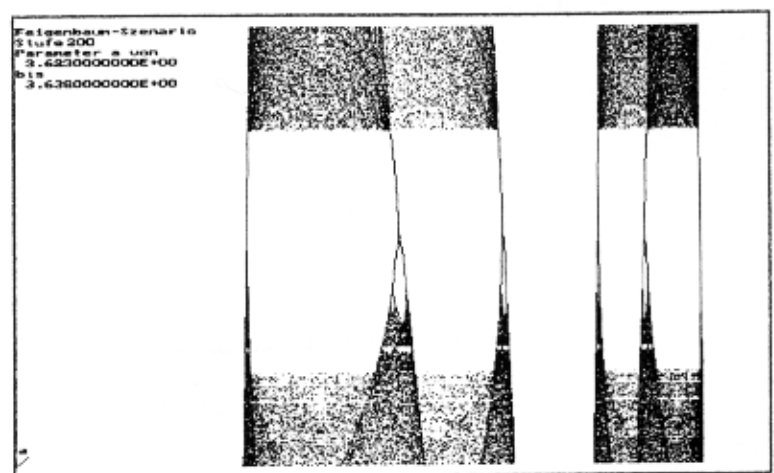
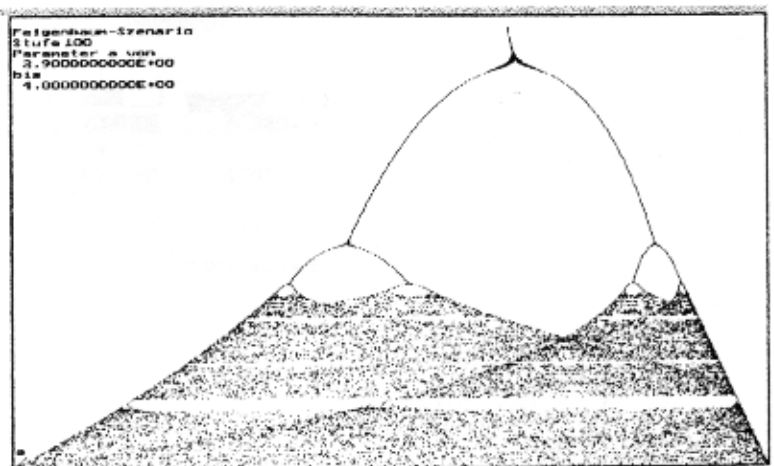
Es folgt eine **Bifurkationskaskade**, das Verhältnis der r -Abstände konvergiert gegen eine mathematische universelle Konstante, die **Feigenbaum-Konstante** $\ast=4,6692016091\dots$

Der Eintritt ins Chaos erfolgt bei $r=3,5699456\dots$. Das ist hier daran sichtbar, dass die gezeichneten Pixel von Nr. 101 bis 200 als breites Band sichtbar werden.

In dem chaotischen Bereich gibt es aber immer wieder **Inseln der Ruhe**. In ihnen sind zunächst wieder wenige Häufungspunkte zu sehen. Deren Zahl ist nun aber keine reine Zweierpotenz mehr. Dann folgt wieder eine Bifurkationskaskade und erneuter Eintritt ins Chaos.

Mathematisches Chaos ist gekennzeichnet durch **Sensitivität** in den Anfangsbedingungen: Zwei beliebig dicht startende Punkte können im betrachteten Bereich beliebig weit auseinander wandern. Mathematisches Chaos hat die **Mischungseigenschaft**: Zu zwei beliebigen offenen Intervallen I und J kann man in J Punkte finden, die in I gestartet sind.

In mathematischem Chaos gibt es **periodische Punkte** und die "liegen dicht". Diese Eigenschaft ist mit Computern nicht zu prüfen. Sie geht in der Rechenungenauigkeit unter.



$$f(x) = -a(x - 2)^2 + 4$$

Suchen Sie die gezeigten Eigenschaften zu beschreiben und mit Zahlen zu versehen.
 Erkunden Sie in TurboPlot, rechnen Sie, was Sie können auch genau aus.

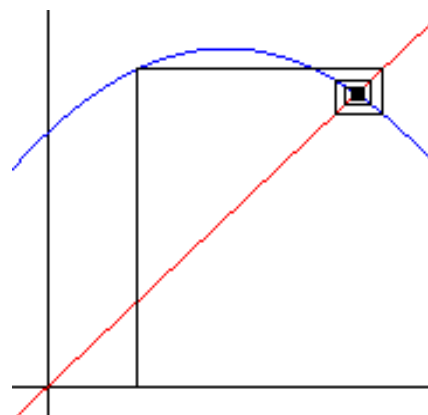


Abbildung 1

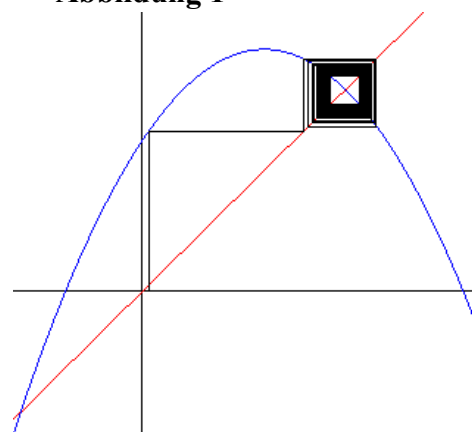


Abbildung 2

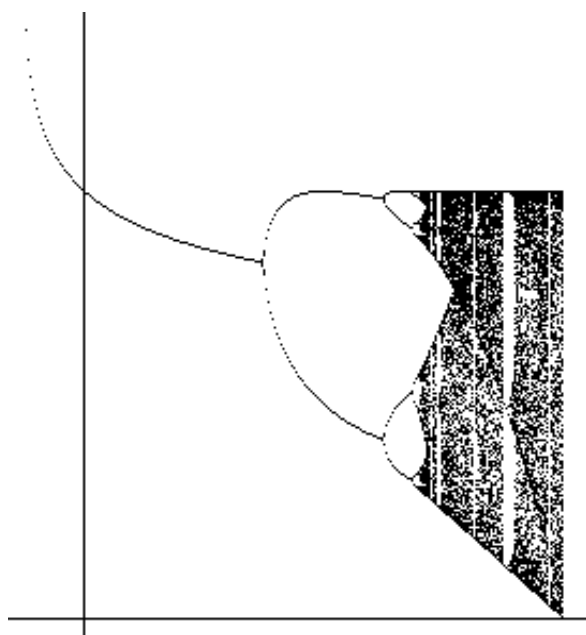


Abbildung 3

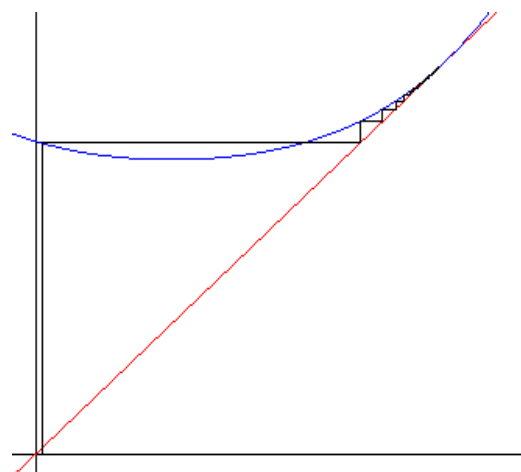


Abbildung 4

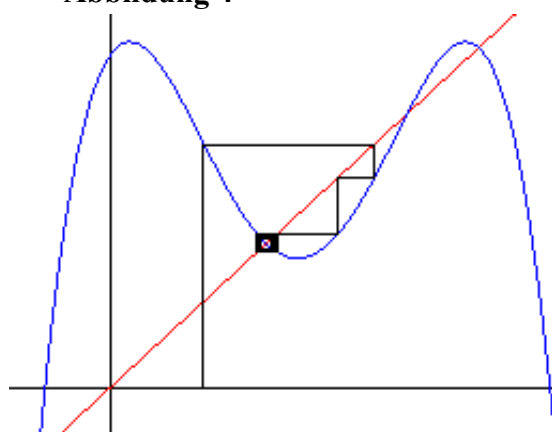


Abbildung 5

Logistische Parabel (z.B.) und Spinnwebgraphen

Logistische Parabel Haftendorn April 2011

$f(x) := r \cdot x \cdot (1-x)$ ▶ *Fertig* Im Graph-Fenster werden der Parameter r ▶ 3.22 und der Startwert $au1$ ▶ 0.1 mit Schiebereglern gesteuert.

Es ist nun konkret $f(x)$ ▶ $-3.22 \cdot x \cdot (x-1)$.

Man variiert nun vor allem r und beobachtet die Entwicklung der Spinnwebfolge.

Da man r und $au1$ nur im Graphfenster variieren kann, ist es sinnvoll, am PC den Seitensortierer größer zu ziehen, damit man auch die Wirkung in den beiden Streuplots beobachten kann.

Der eine Streuplot ist der übliche Zeitgraph der Folge. Der andere verbindet die Datenpunkte direkt und ermöglicht auch eine Sicht auf das Folgenverhalten.

Die mathematische Aussagekraft ist aber beim Webgraphen deutlich größer.

Die Tabellenseite ist wie in Excel gemacht. Sie ist für die Streuplots nötig, aber nicht für die Spinnwebdarstellung.

Für Experimente mit eigenen Kurven ist die allgemeinere Datei günstiger.

Man kopier besser nicht das Problem in dieser Datei, da die Datenhaltung der Treppchen für den Rechner aufwendig ist.

logistische-Parabel.tns

Der TI Nspire hat keine eigene Möglichkeit Spinnwebgraphen zu zeichnen. Das konnten TI92 bzw. TI voyage seit 1995! Darum kann diese –oder die etwas allgemeinere Versions- als **Musterdatei** dienen. Auf der Notes-Seite trägt man das eigene f ein. Beim **Hantieren** ist zu beachten: Als $f1(x)$ ist die Trägerfunktion eingetragen, $f2(x)=x$, die Winkelhalbierende.

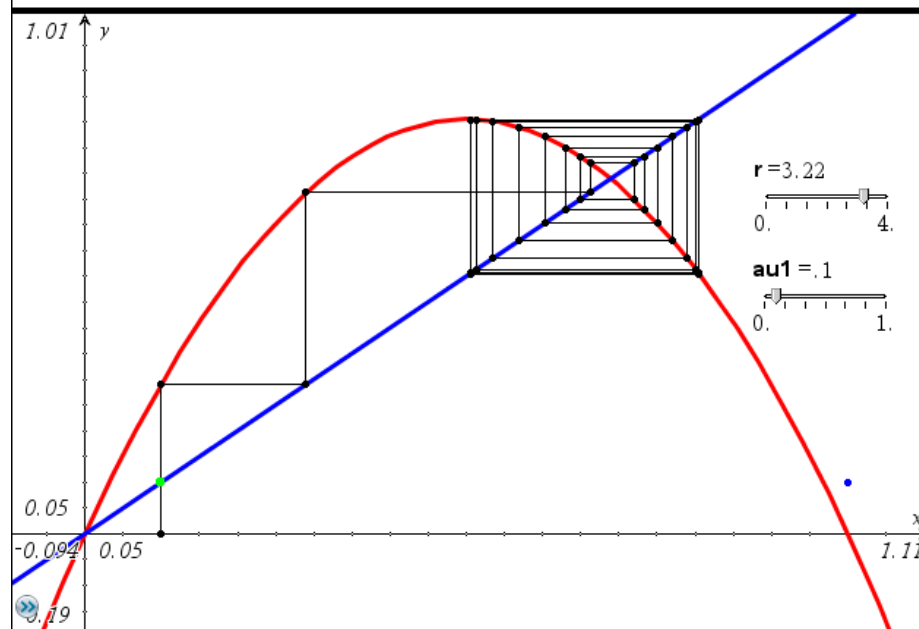
Wenn man bei $f3$ rechte Maustaste-> Graphiktyp -> Folge->Folge wählt, sieht man, wie $u1$ eingegeben ist, mit der Südtaste sieht man $u2$ als verschobene $u1$.

Wieder re Maus-> Graphiktyp -> Folge->Eigene erlaubt eine x -Liste und eine y -Liste, hier $u1$ und $u2$, eine Parameterdarstellung für Folgen.

Dann das nochmal und $u1$ und $u1$ (Punkte auf der Wh!!!!)

Die Treppchen-Strecken sind dann mühsam von Hand eingefügt.

Wenn man so eine Datei nun als Muster nimmt, muss man diese Arbeit nicht selber machen.

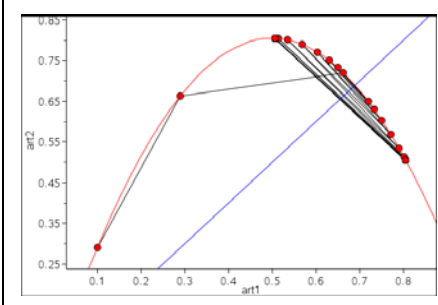


	A nli	B art1	C art2
1	1	0.1	0.2898
2	2	0.2898	0.662727
3	3	0.662727	0.719734
4	4	0.719734	0.649529
5	5	0.649529	0.733004

Für die Zeitdarstellung links braucht man die Liste $art1$, sie ist die Folge $u1$. In B1 wird $=au1$ eingetragen. in B2 kommt $=f(B1)$ dieser Zelleninhalt wird nach unten kopiert. (re-unt-Ecke das Plus erscheint, anfassen, nach unten ziehen).

In C1 steht $=b2$, und das wird auch nach unten kopiert.

Beim rechten Data-Plot ist $art2$ über $art1$ aufgetragen und „Punkte verbinden“ gewählt.



Es ist hier ein "neues Problem" am TI eröffnet, da man nur so für Untersuchungen mit allgemeinem r dieselben Bezeichnungen verwenden kann, wie in den Seiten mit den konkreten Zeichnungen.

$$f(x) := r \cdot x \cdot (1-x) \quad \text{Fertig} \quad \text{Allgemeiner Fixpunkt-Ansatz: } f(x) = x \rightarrow -r \cdot x \cdot (x-1) = x$$

$$\text{solve}(f(x)=x, x) \rightarrow x = \frac{r-1}{r} \text{ or } x=0, \text{ Der linke Fixpunkt ist klar, der interessante ist}$$

$$\text{xfix} := \frac{r-1}{r} \rightarrow \frac{r-1}{r}. \text{ Für diesen ist die Steigung wichtig: } \frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow -(2 \cdot x - 1) \cdot r, \text{ Steigung am}$$

$$\text{Fixpunkt: } \text{mxfix} := \frac{d}{dx}(f(x))|_{x=\text{xfix}} \rightarrow -(r-2) \Delta. \text{ Erwartungsgemäß hängt dies von r ab.}$$

$$\text{Interessant sind die r-Werte mit Steigung 1 oder -1: } \text{solve}(\text{mxfix}=1, r) \rightarrow r=1 \text{ oder } \text{solve}(\text{mxfix}=-1, r) \rightarrow r=3$$

$$\text{Für } r=1 \text{ gilt kommt die Parabel mit Steigung 1 aus dem Ursprung } f(x)|_{r=1} \rightarrow -x \cdot (x-1)$$

$$\text{Für } r=3 \text{ } f(x)|_{r=3} \rightarrow -3 \cdot x \cdot (x-1) \text{ haben wir den Eintritt in die Bifurkationsparabel gefunden.}$$

Das prüft man jetzt in dem anderen Problem durch Einstellen der Schieberegler.

Auf der anderen Notes-Seite sind Überlegungen zu den Iterierten.

Überlegungen zu den Iterierten

Die Iterierten entstehen, wenn man die Trägerfunktion immer wieder in sich selbst einsetzt.

Die Nummerierung übernehme ich von Turboplot, weil man dort auch das Feigenbaumdiagramm ansehen kann. Normal würde man mit 0 anfangen,

$$1. \text{ Iterierte } f(x) \rightarrow -r \cdot x \cdot (x-1)$$

$$2. \text{ Iterierte } g_2(x) := f(f(x)) \rightarrow \text{Fertig} \text{ Das ist } g_2(x) \rightarrow -r^2 \cdot (r \cdot x \cdot (x-1) + 1) \cdot x \cdot (x-1),$$

$$\text{expand}(g_2(x)) \rightarrow -r^3 \cdot x^4 + 2 \cdot r^3 \cdot x^3 - r^3 \cdot x^2 - r^2 \cdot x^2 + r^2 \cdot x \text{ Polynom 4. Grades}$$

Fixpunkte von g2:

$$\text{solve}(g_2(x)=x, x) \rightarrow x = \frac{-\sqrt{r^2-2 \cdot r-3} - r-1}{2 \cdot r} \text{ or } x = \frac{\sqrt{r^2-2 \cdot r-3} + r+1}{2 \cdot r} \text{ or } x = \frac{r-1}{r} \text{ or } x=0$$

Es tauchen natürlich die beiden alten Fixpunkte auf. Dazu aber zwei neue. Sie existieren nur, wenn der Radikant der Wurzel positiv ist. Sie Auch Graph in diesem Problem.

$$\text{solve}(r^2-2 \cdot r-3=0, r) \rightarrow r=-1 \text{ or } r=3 \text{ Also erst am } r=3. \text{ Wie ist die Steigung in diesen}$$

$$\text{Fixpunkten? } \frac{d}{dx}(g_2(x)) \rightarrow -(2 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x^2 \cdot r - 2 \cdot x \cdot r + 1) \cdot r^2 \text{ Also}$$

$$\text{solve}\left(\left(-(2 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x^2 \cdot r - 2 \cdot x \cdot r + 1) \cdot r^2\right)|_{x=\frac{-\sqrt{r^2-2 \cdot r-3} + r+1}{2 \cdot r}} = -1, r\right) \rightarrow r = -(\sqrt{6} - 1) \text{ or } r = \sqrt{6} + 1 \Delta$$

$r = -(\sqrt{6} - 1) \text{ or } r = \sqrt{6} + 1 \rightarrow r = -1.44949 \text{ or } r = 3.44949$ Damit haben wir das r für die nächste Bifurkation exakt berechnet.

$$4. \text{ Iterierte } g_4(x) := f(f(f(f(x)))) \rightarrow \text{Fertig}$$

$$g_4(x)$$

$$\rightarrow -r^4 \cdot (r \cdot x \cdot (x-1) + 1) \cdot (r^3 \cdot x^2 \cdot (x-1)^2 + r^2 \cdot x \cdot (x-1) + 1) \cdot (r^7 \cdot x^4 \cdot (x-1)^4 + 2 \cdot r^6 \cdot x^3 \cdot (x-1)^3 + r^5 \cdot x^2 \cdot (x-1)^2 + r^4 \cdot x \cdot (x-1) + r^3 \cdot x \cdot (x-1) + 1) \cdot x \cdot (x-1)$$

$$\text{expand}(g_4(x))$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow -r^{15} \cdot x^{16} + 8 \cdot r^{15} \cdot x^{15} - 28 \cdot r^{15} \cdot x^{14} + 56 \cdot r^{15} \cdot x^{13} - 70 \cdot r^{15} \cdot x^{12} + 56 \cdot r^{15} \cdot x^{11} - 28 \cdot r^{15} \cdot x^{10} \\ & + 8 \cdot r^{15} \cdot x^9 - r^{15} \cdot x^8 - 4 \cdot r^{14} \cdot x^{14} + 28 \cdot r^{14} \cdot x^{13} - 84 \cdot r^{14} \cdot x^{12} + 140 \cdot r^{14} \cdot x^{11} - 140 \cdot r^{14} \cdot x^{10} \\ & + 84 \cdot r^{14} \cdot x^9 - 28 \cdot r^{14} \cdot x^8 + 4 \cdot r^{14} \cdot x^7 - 6 \cdot r^{13} \cdot x^{12} + 36 \cdot r^{13} \cdot x^{11} - 90 \cdot r^{13} \cdot x^{10} + 120 \cdot r^{13} \cdot x^9 \\ & - 90 \cdot r^{13} \cdot x^8 + 36 \cdot r^{13} \cdot x^7 - 6 \cdot r^{13} \cdot x^6 - 2 \cdot r^{12} \cdot x^{12} + 12 \cdot r^{12} \cdot x^{11} - 34 \cdot r^{12} \cdot x^{10} + 60 \cdot r^{12} \cdot x^9 \\ & - 70 \cdot r^{12} \cdot x^8 + 52 \cdot r^{12} \cdot x^7 - 22 \cdot r^{12} \cdot x^6 + 4 \cdot r^{12} \cdot x^5 - 6 \cdot r^{11} \cdot x^{10} + 30 \cdot r^{11} \cdot x^9 - 61 \cdot r^{11} \cdot x^8 + 64 \cdot r^{11} \cdot x^7 \\ & - 36 \cdot r^{11} \cdot x^6 + 10 \cdot r^{11} \cdot x^5 - r^{11} \cdot x^4 - 6 \cdot r^{10} \cdot x^8 + 24 \cdot r^{10} \cdot x^7 - 36 \cdot r^{10} \cdot x^6 + 24 \cdot r^{10} \cdot x^5 - 6 \cdot r^{10} \cdot x^4 \\ & - r^9 \cdot x^8 + 4 \cdot r^9 \cdot x^7 - 8 \cdot r^9 \cdot x^6 + 10 \cdot r^9 \cdot x^5 - 7 \cdot r^9 \cdot x^4 + 2 \cdot r^9 \cdot x^3 - r^8 \cdot x^8 + 4 \cdot r^8 \cdot x^7 - 8 \cdot r^8 \cdot x^6 + 10 \cdot r^8 \cdot x^5 \\ & - 7 \cdot r^8 \cdot x^4 + 2 \cdot r^8 \cdot x^3 - 2 \cdot r^7 \cdot x^6 + 6 \cdot r^7 \cdot x^5 - 7 \cdot r^7 \cdot x^4 + 4 \cdot r^7 \cdot x^3 - r^7 \cdot x^2 - r^6 \cdot x^4 + 2 \cdot r^6 \cdot x^3 - r^6 \cdot x^2 \\ & - r^5 \cdot x^4 + 2 \cdot r^5 \cdot x^3 - r^5 \cdot x^2 - r^4 \cdot x^2 + r^4 \cdot x \end{aligned}$$

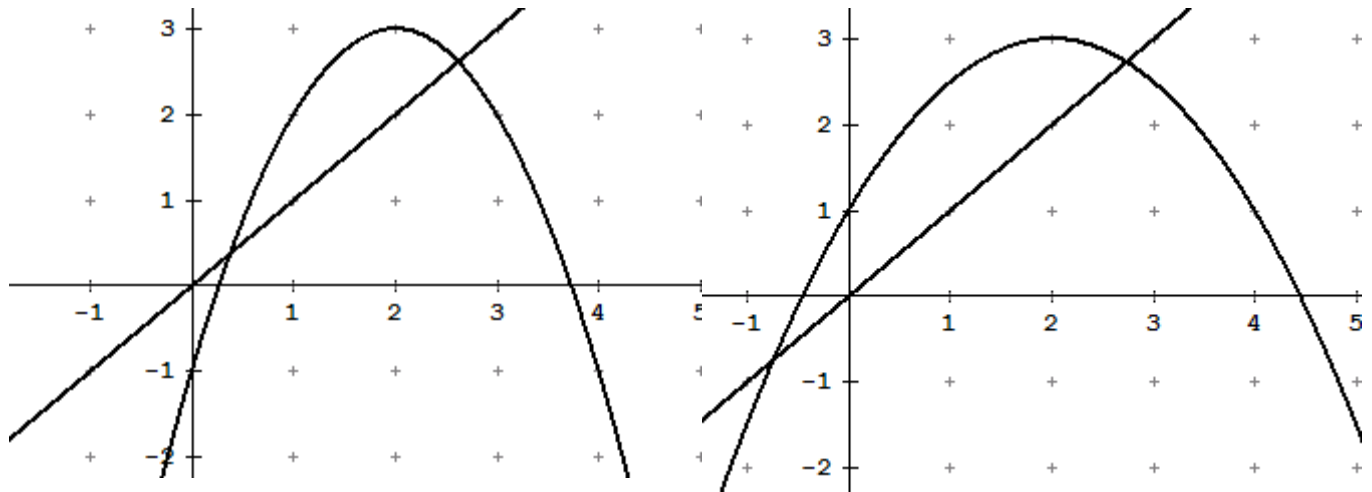
Auf die Idee, die Iterierten zu untersuchen, kommt man durch Betrachtung des Feigenbaumdiagramms.

Nach der ersten Bifurkation haben die Folgen zwei Häufungswerte. Sie werden im Wechsel angenommen. Wenn man also nur jedes zweite Folgenglied betrachtet, hat man den einen

Häufungswert als Grenzwert. Genau das tut man, wenn man die zweite Iterierte ansieht. sie hat also zwei anziehende Fixpunkte, die „alten“ Fixpunkte sind anstoßend geworden.

Wenn nun r weiter wächst wird die Steigung in diesen anziehenden Fixpunkten betragsmäßig auch größer, bis sie wieder -1 erreicht. Dann ziehen auch diese Fixpunkte nicht mehr an. Nun gilt entsprechendes für die vierte Iterierte, dort kommen vier neue anziehende Fixpunkte dazu.

Rechnerische Behandlung mit allgemeinem r ist nun kaum noch möglich. Aber man kann sie für feste r auf Schieberegler noch recht genau erfinden.

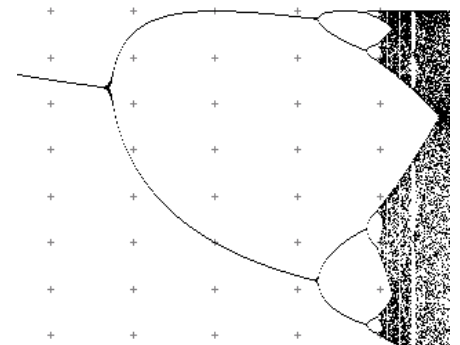
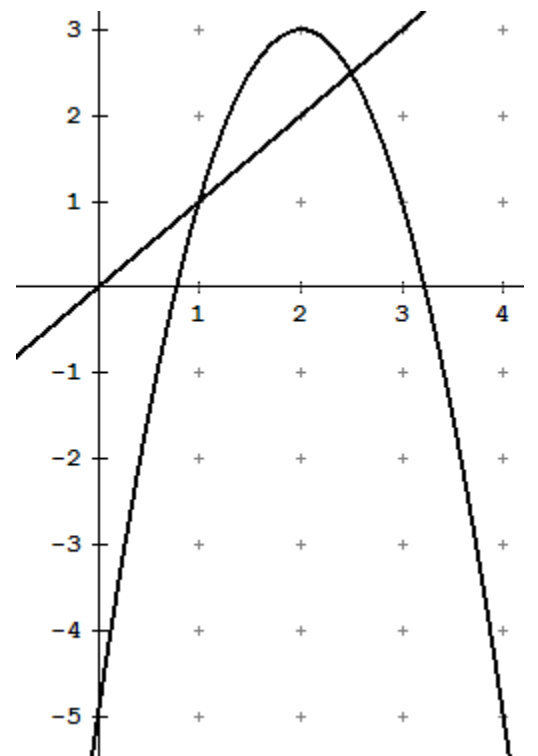


Aufgabe 3 zur Rekursion

$$f(x) = -r(x-2)^2 + 3$$

Dies ist die Trägerfunktion einer rekursiv gegebenen Folge. Oben sind die Graphen für $r=1$, $r=0,5$, rechts $r=2$.

- Notieren Sie die Rekursionsformel für a_n . Berechnen Sie für $r=1$ und den Startwert $a_0=1$ drei Folgenglieder und verfolgen Sie diese graphisch im linken oberen Bild.
- Entscheiden Sie welche Fixpunkte anziehend und welche abstoßend sind (nach Sicht und dranschreiben). Berechnen Sie bei einem der Beispiele die Fixpunkte und entscheiden Sie die vorige Frage rechnerisch.
- Markieren Sie beim rechten oberen Graphen auf der x-Achse Bereiche für Startwerte:
 - bei denen die Folge sicher konvergiert
 - bei denen die Folge sicher divergiert
 Markieren Sie die Tefferfälle.
- Markieren Sie beim rechten und beim obereb linken Graphen auf der x-Achse je zwei Bereiche für Startwerte:
 - bei denen die Folge unklares Verhalten zeigt, Chaosbereich.
 - bei denen die Folge gegen unendlich strebt.
- Erläutern Sie, wie das Feigenbaumdiagramm (rechts) zustande kommt. Wie hängt die erste Bifurkation mit Ihren obigen Betrachtungen zusammen?



2.4.95

Rekursion Aufgabenblatt Thema: Parabeln

Ha 95

Welche der folgenden Parabeln ist hier gezeichnet?

A: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$

B: $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + 1$

C: $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + 2$

D: $f(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$

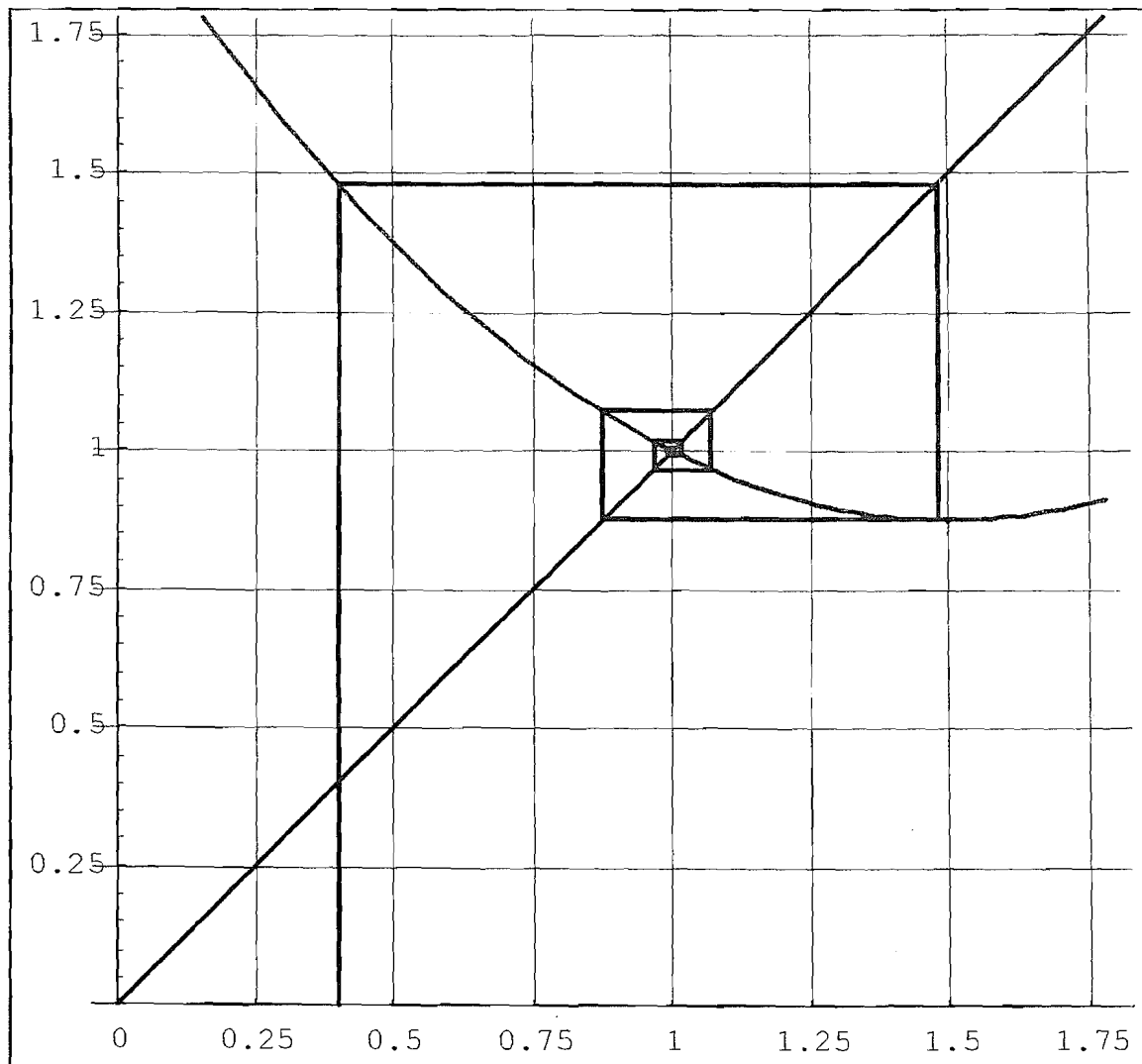
Welche Rekursionsformel gehört zu dem von dir gewählten Funktionsterm?

Startwert ist $x_0=0,2$. Berechne 5 Werte.

Wähle andere Startwerte, auch außerhalb des hier gezeichneten Bereichs. Berechne und zeichne, wie die Folge sich verhält. Zeichne dazu die Parabel ins Heft.

Schneidet der Graph weiter rechts noch einmal die Winkelhalbierende? Wenn ja: wo?

Wenn nein: warum?



Aufgabe 1 Gegeben ist die Parabel $p(x) = (x - 2,5)^2 + 1,75$

- Zeichne die Parabel.
- Sie ist Trägerfunktion der Folge x_n mit $x_{neu} = (x_{alt} - 2,5)^2 + 1,75$
- Welche Folge ergibt sich, wenn man mit $x_0 = 1,5$ startet? (6 Werte mind.)
- Bestimme die Fixpunkte der Folge. Welcher ist abstoßend, welcher anziehend?
- Für welche Startwerte gelangt man zum anziehenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte gelangt man zum abstoßenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte strebt die Folge ins Unendliche?
- Gibt es Startwerte, bei denen sich das Verhalten der Folge nicht entscheiden läßt?

Aufgabe 2 Gegeben ist die Parabel $p(x) = \frac{1}{4}(x - 5)^2 + 2$

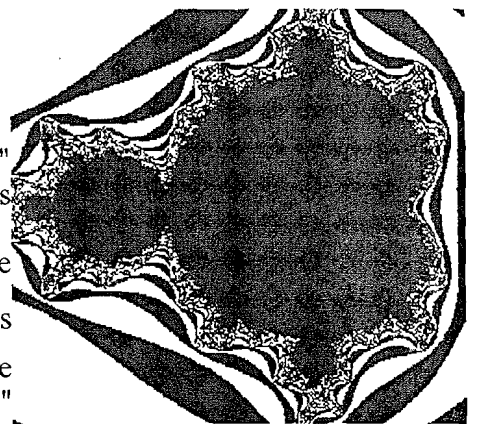
- Zeichne die Parabel.
- Sie ist Trägerfunktion der Folge x_n mit $x_{neu} = \frac{1}{4}(x_{alt} - 5)^2 + 2$
- Welche Folge ergibt sich, wenn man mit $x_0 = 10$ startet? (8 Werte mind.)
- Bestimme die Fixpunkte der Folge. Welcher ist abstoßend, welcher anziehend?
- Für welche Startwerte gelangt man zum anziehenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte gelangt man zum abstoßenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte strebt die Folge ins Unendliche?
- Gibt es Startwerte, bei denen sich das Verhalten der Folge nicht entscheiden läßt?

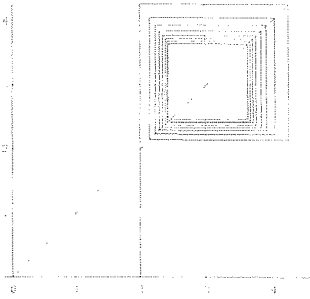
Aufgabe 3 Gegeben ist die Parabel $p(x) = \frac{3,3}{4}x(4 - x)$

- Zeichne die Parabel.
- Sie ist Trägerfunktion der Folge x_n mit $x_{neu} = \frac{3,3}{4}x_{alt}(4 - x_{alt})$
- Welche Folge ergibt sich, wenn man mit $x_0 = 1$ startet? (10 Werte mind.)
- Bestimme die Fixpunkte der Folge. Welcher ist abstoßend, welcher anziehend?
- Für welche Startwerte gelangt man zum anziehenden bzw. abstoßenden Fixpunkt?
- Für welche Startwerte strebt die Folge ins Unendliche?
- Gibt es Startwerte, bei denen sich das Verhalten der Folge nicht entscheiden läßt?
- Fällt dir ein besonderes Verhalten auf? Was ist, wenn du statt 3,3 3,8 schreibst?
- Was ist los, wenn man ganz andere Zahlen an diese Stelle schreibt?

Aufgabe 4 Gegeben sind viele Parabeln $p_c(x) = x^2 + c$, für jedes c eine andere.

- Zeichne in verschiedenen Farben mehrere von ihnen ein.
Für welche c existiert ein anziehender Fixpunkt?
Markiere diese c auf der y -Achse in dickem Schwarz.
Spiegelst du dieses Stück an der Winkelhalbierenden, so hast du gerade ein Stück aus dem dicken Bauch des "Apfelmännchens" gezeichnet. Es ist das Stück auf der Symmetrieachse vom Hals bis rechts das einheitliche Schwarz aufhört.
Das Innere des Apfelmännchens besteht aus allen Punkten c , für die die Folge mit der Rekursionsformel $z_{neu} = z_{alt}^2 + c$ nicht ins Unendliche entwindet. Dabei ist z aber eine sogenannte komplexe Zahl, dargestellt durch einen Punkt in der "Gaußschen Zahlenebene". Unser normaler Zahlenstrahl ist davon eine Teilmenge, nämlich die Symmetrieachse des Apfelmännchens.





Aufgabe 1 Rekursive Folge: $a_n = \frac{1}{4} (a_{n-1} - 5)^2$

Zeichnen Sie die Trägerfunktion in einem größeren als dem dargestellten Bereich.

Berechnen Sie die Fixpunkte der rekursiv definierten Folge. Entscheiden Sie, falls möglich, welcher der Fixpunkte anziehend, welcher abstoßend ist.

Markieren Sie auf der x-Achse Bereiche für Startwerte bestimmt divergenter und konvergenter Folgen, bzw. Folgen unklaren Verhaltens. Zeichnen Sie noch

typische "Treppchen" ein.

Es gibt den Satz: "Monotone und beschränkte Folgen sind konvergent."

Sehen Sie hier Teilfolgen, auf die Sie diesen Satz anwenden können?

Aufgabe 2 zum Schnitt zweier Kurven, diverse Verfahren

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Kosinusfunktion mit der Hauptwinkelhalbierenden

A) direkt, indem Sie aus der Schnittpunktgleichung eine rekursive Folge machen,

B) mit dem Newtonverfahren.

C) Erläutern Sie zeichnerisch an einer groben Skizze das Verhalten des Sekantenverfahrens in diesem Fall.

D) Welches der Verfahren konvergiert am schnellsten?

E) Warum funktioniert Methode A) nicht, wenn man statt dessen $f(x)=2 \cos x$ betrachtet?

Aufgabe 3 zur Taylorreihen

andere Thema

Bestimmen Sie eine Näherungsparabel um $x=0$ für die Kosinushyperbolicusfunktion mit Hilfe der Taylorreihe. Machen Sie eine Skizze.

Prüfen Sie, wie gut die Parabel noch bei $x=1$ ist.

Was müsste man tun, um eine bessere Näherungsfunktion zu erhalten?

Wird der Konvergenzradius der Taylorentwicklung unendlich oder endlich sein?

Sind Probleme zu erwarten?

Nennen Sie ein Beispiel, wo der Konvergenzradius sicher endlich ist.

Aufgabe 4 zu Polynomen 4. Grades

an dem Thema

Erzeugen Sie aus zwei doppelten konkret ausgesuchten Nullstellen ein Polynom 4. Grades.

Weisen Sie nach, dass die Wendetangente die Kurve an einer Stelle schneidet, die sich aus dem Abstand der Wendepunkte ergibt.

Warum ist die Wendestelle 3-fache Schnittstelle des obigen Schnittproblems?

Warum ist es nicht wesentlich, dass man oben mit konkrete Nullstellenwerten gerechnet hat und nicht allgemeinen Werten.

Wie lässt sich die Aufgabe verallgemeinern?

Aufgabe Analysis

Die allgemeine Heron-Formel zur Bestimmung höherer Wurzeln lautet:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{r}{a_n^{k-1}} \right)$$

a) Weisen Sie nach, dass diese rekursive Folge für positive r den Fixpunkt $a = \sqrt[k]{r}$ hat.

b) Rechts ist die Webdarstellung für $r = 8$ gezeichnet.

Um welches k handelt es sich dann offensichtlich?

Verfolgen Sie die hier dargestellten Folgenwerte rechnerisch vier Schritte weit (als Dezimalzahlen).

c) Entwickeln Sie in einer eigenen Zeichnung den Graphen der

Trägerfunktion $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{r}{x^{k-1}} \right)$ als Mittelwert

zweier einfacherer Funktionen. Sie können sich auch für eine Darstellung als Summe zweier Funktionen entscheiden.

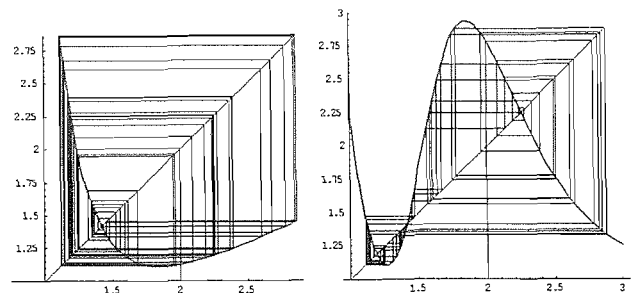
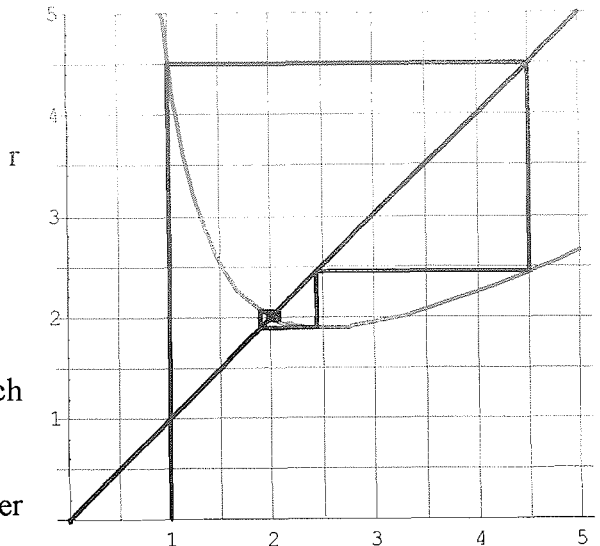
Wie ändert sich der Graph von f , wenn k wächst? (Beschreiben, grobe Skizze)

d) Der in a) berechnete Fixpunkt ist nicht immer anziehend. Berechnen Sie genau, für welche k und r er anziehend und für welche er abstoßend ist.

e) Für $r = 8$ und $k = 6$ erhält man für die Trägerfunktion f und für die zweite Iterierte folgende Graphen:

Die zweite Iterierte ist $y = f(f(x))$.

Erläutern Sie den Zusammenhang und begründen Sie das Verhalten der Folge qualitativ.



e) Bei der logistischen Parabel haben Sie ein “Feigenbaum-Diagramm” kennen gelernt. Es heißt auch “Attraktor-Diagramm”

In gleicher Weise entsteht hier ein “Heron-Feigenbaum-Diagramm”, wenn k variiert wird. Im Bild zeigt die Rechtsachse k von 3 bis 6.

Erläutern Sie das Zustandekommen der Graphik.

Was sagen die Verzweigungsstellen aus?

Wo finden sich die betrachteten Fälle wieder?

Aufgabe Rekursive Verfahren, Heron-Verfahren

In den Schulbüchern wird heute häufig das Heron-Verfahren zur Bestimmung von

Quadratwurzeln vorgestellt. Es hat die Trägerfunktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{r}{x} \right)$

- 1) Geben Sie die zugehörige rekursive Formel an und berechnen Sie für $r=2$ für den Startwert 1 drei Werte.
- 2) Zeichnen Sie die Trägerfunktion, zeigen und erklären Sie, wie Folgenwerte graphisch gewonnen werden.
- 3) Beweisen Sie, dass $x_s = \sqrt{r}$ Fixpunkt ist, und dass für alle Radikanden r superschnelle Konvergenz vorliegt.
- 4) Wie kann man auf Schulniveau erklären, wie Heron die Formel gefunden haben könnte.
- 5) Für höhere Wurzeln führt die Erklärung aus 4) zu

der Trägerfunktion h mit $h(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{r}{x^{k-1}} \right)$.

Beweisen Sie, dass $x_s = \sqrt[k]{r}$ Fixpunkt ist.

Skizzieren Sie grob (im Prinzip) diese Annäherung im Spinnweb-Graphen.

- 6) Im Internet war folgende Trägerfunktion für die Bestimmung höherer Wurzeln zu finden:

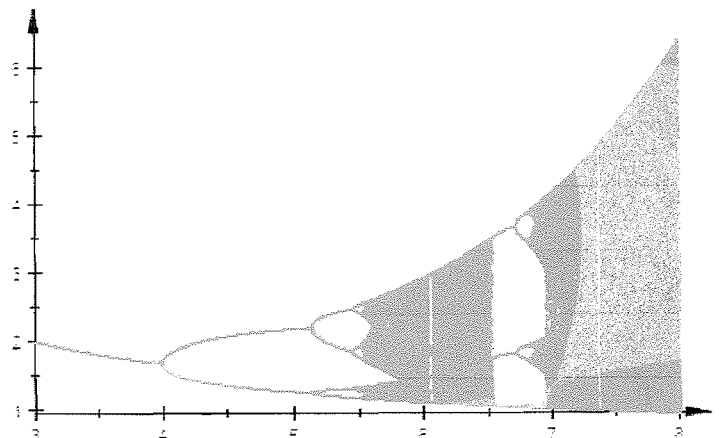
$$g(x) = \frac{1}{k} \left((k-1)x + \frac{r}{x^{k-1}} \right). \text{ Nebenstehend}$$

sind für $r = 8$ und $k = 3$ Folgenwerte dargestellt.
 Diese Trägerfunktion stammt aus dem

Newtonverfahren für die Nullstelle der Funktion p mit $p(x) = x^k - r$. Damit muss die Konvergenz hier superschnell sein. Zeigen Sie an der zweiten Liste, woran man das sehen kann. Weitere Beweise hierzu sind nicht verlangt.

- 7) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten beider Verfahren und bestimmen Sie für die h -Formel aus 5) die Steigung im Fixpunkt in Abhängigkeit von k . Für welche k liegt Konvergenz vor?

- 8) Erklären Sie, wie das Feigenbaumdiagramm zur h -Formel aus 5) zustande kommt. Deuten Sie 5) und 7) an dem Diagramm.
 Warum gibt es für die g -Formel aus 6) kein Feigenbaumdiagramm?



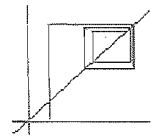
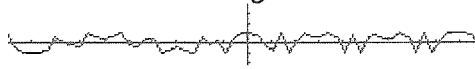
2.0
 3.58103165306122448979501836735
 2.10263197737760212322686885161
 1.9560761333311168685878244326
 2.0134524785281454144123794675
 1.9886799182319887353854176856
 2.0057568795407448376347718227
 1.9971463218238337430485232267
 2.00143295854630194691755288742
 1.99928565918700189216718747854
 2.00055788389476483102051435485

2.0
 4.72108843577414065986394559823
 3.26703450965185736988193752477
 3.427862617615893455335495921731
 2.070972291007491623371484805873
 2.00140447078591166379611071954
 2.00009288613443049036973111263
 2.0000000000041648779618313663
 2.000000000000000000000006731
 2.0
 2.0

Es ist die Schar f_k mit $f_k(x) = \cos(kx^2)$ gegeben.

- a) Entwickeln Sie die Graphen hierzu als Verkettung. Beschreiben Sie die Graphen in

Worten. Gehen Sie auf dieses vom Graphenzeichner gelieferte Bild ein:



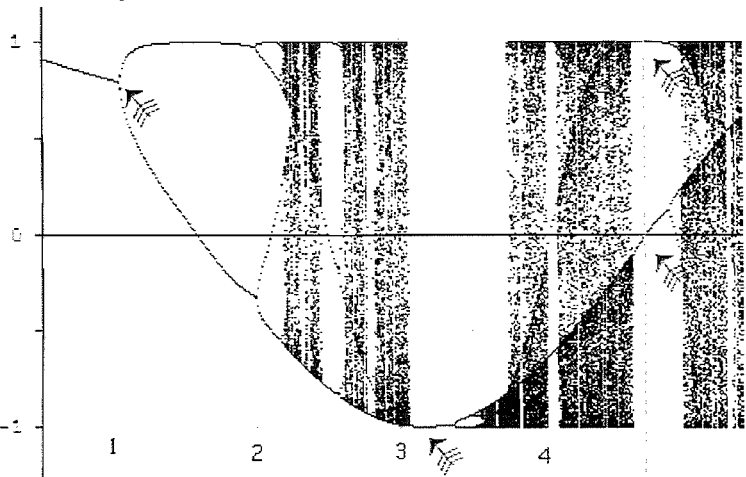
- b) Fassen Sie die f_k als Trägerfunktion von rekursiven Folgen auf.

Berechnen Sie für $k=1$ und Startwert $0,2$ fünf Folgenglieder und erläutern Sie den zugehörigen Web-Graphen.

- c) Bestimmen Sie den Fixpunkt für $k=1$ mit zwei verschiedenen Methoden und zeigen Sie auf zwei Arten, dass es sich um einen anziehenden Fixpunkt handelt. (Eine Ableitung ist „von Hand“ zu zeigen.)

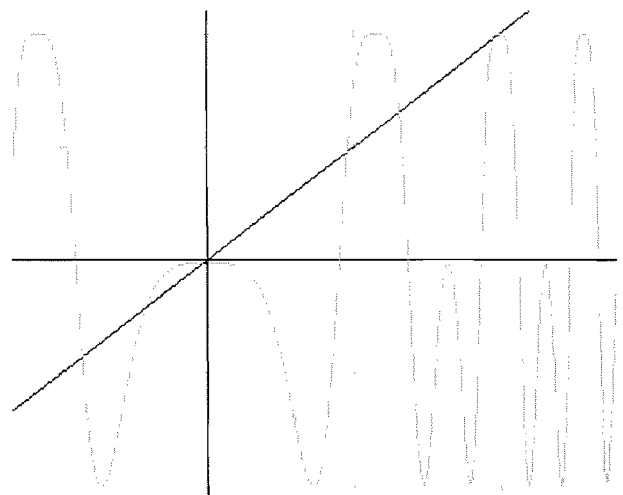
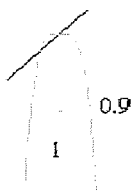
- d) Bestimmen Sie exakt ein k so, dass das erste linke Minimum von f_k in den Punkt $M=(-1/-1)$ fällt. Erläutern Sie, warum M dann ein Fixpunkt mit superschneller Konvergenz ist. Skizzieren Sie das Verhalten der Folgen mit Startwerten in der Nähe von -1 .

- e) Sie sehen rechts einen Teil des Feigenbaumdiagramms für diese Schar.



- Erläutern Sie das Zustandekommen eines Feigenbaumdiagramms grundsätzlich.
- Erläutern Sie das Verhalten bei den beiden linken Pfeilen. Stellen Sie eine Verbindung zu Obigem her.

- Der senkrechte blaue Strich ist bei $k=4,7$. Klären Sie das Verhalten an den beiden rechten Pfeilen durch eine geeignete Untersuchung mit Ihrem Folgezeichner. Beziehen Sie auch den rechten Graphen der 2. Iterieren in Ihre Betrachtungen ein. Die Berührung rechts sieht im Zoom so aus.



- f) Wie geht das Feigenbaumdiagramm über den gezeichneten Bereich hinaus rechts und links weiter?

Dies ist eine von 3 Aufgaben für 4 Std.,
TI voyage vorhanden