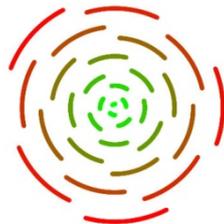
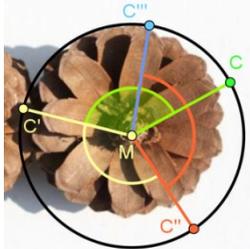
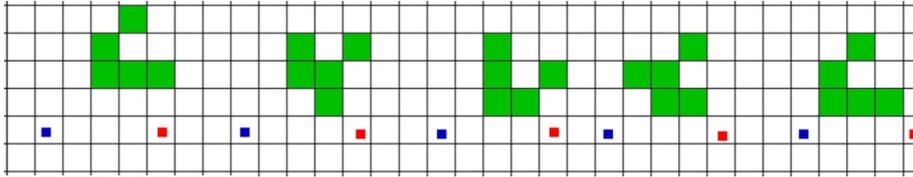
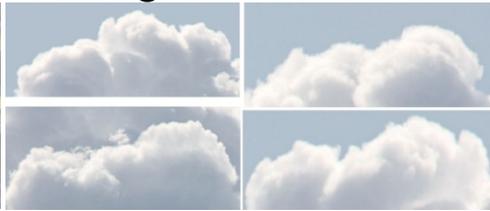
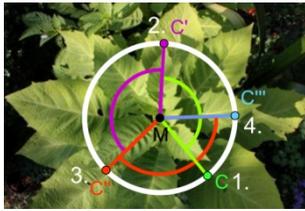


Fraktale und Ordnung in der Natur



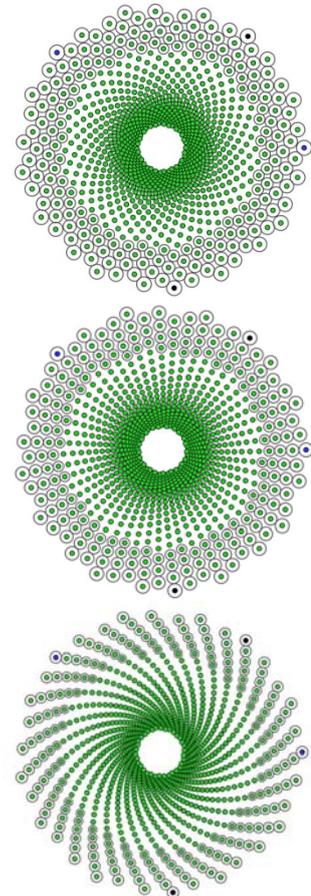
Erklärungen genau zu diesen Bildern finden Sie im Buch: Dörte Haftendorn

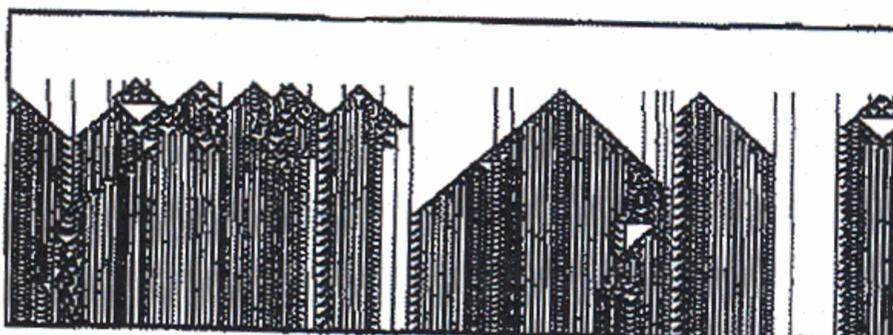
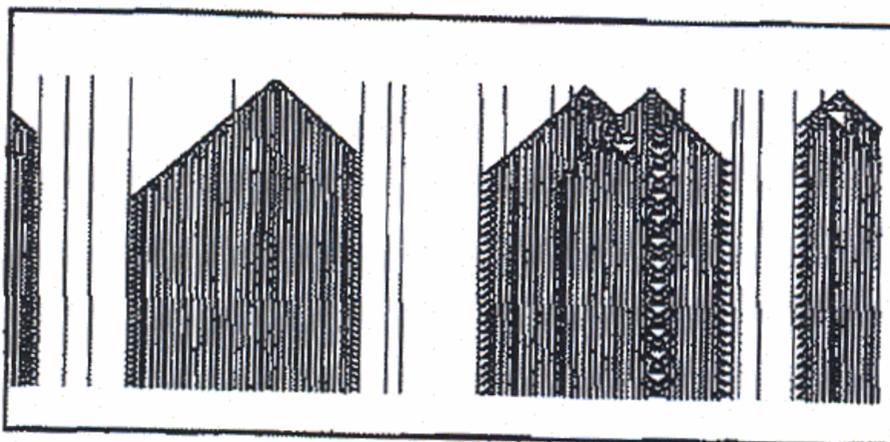
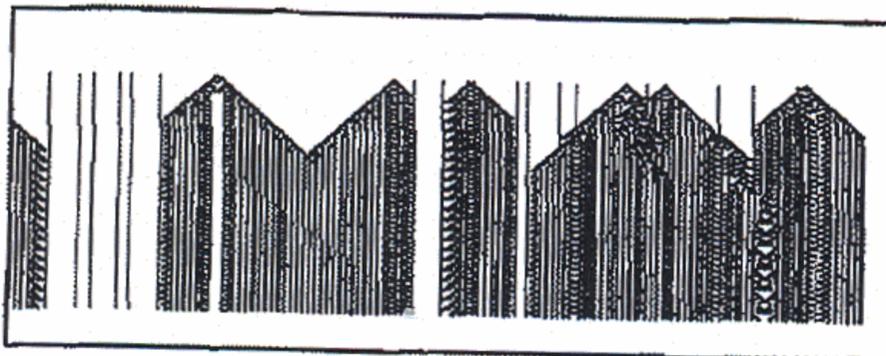
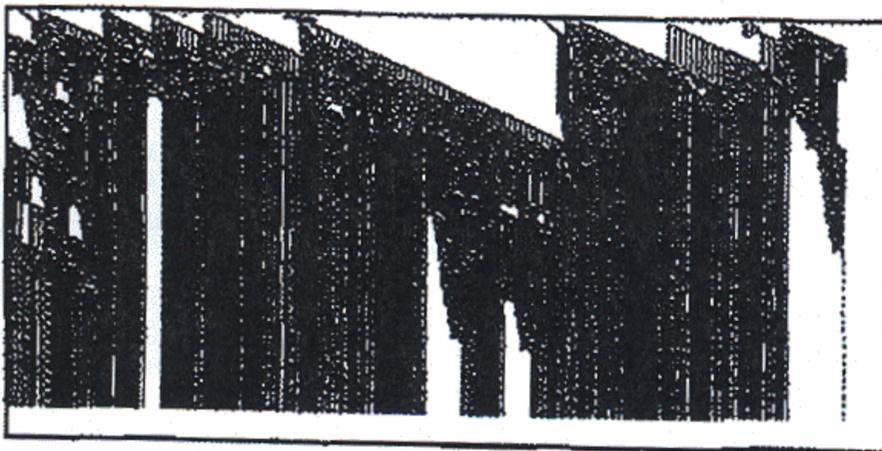
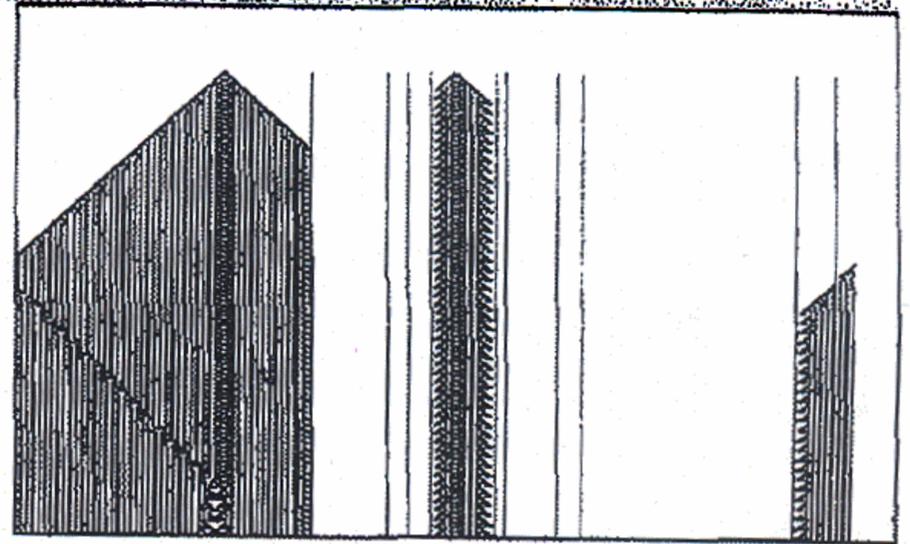
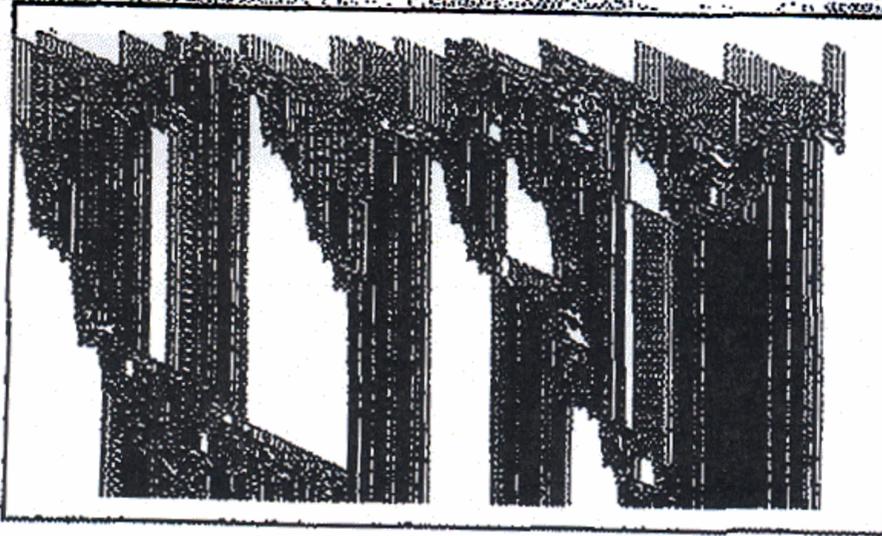
Mathematik sehen und verstehen

Interaktive Dateien zu diesem Kapitel auf der Website www.mathematik-sehen-und-verstehen.de

Es folgen hier Seiten für die Lehre und weitere Infos

HERE GOD CREATES CIRCLES, WAVES, AND FRACTALS





Zelluläre Automaten können durch Zeichnen auf dem Karopapier verwirklicht werden. Zellen, die (hier schwarz) gefärbt sind, heißen "lebendig", die anderen heißen "tot". Das Spiel läuft taktmäßig ab, und es gibt feste Regeln, nach denen eine lebende Zelle im nächsten Takt noch lebt, bzw. nach denen Zellen geboren werden. Diese Regeln beziehen sich auf die Nachbarschaft der betrachteten Zelle.

Der bekannteste zelluläre Automat ist wohl das "Spiel des Lebens" (Game of Life) von J. Conway.

(Das ist auf der Diskette Ha, lebenfrb.exe)

Diese Bilder hier sind von **linearen zellulären Automaten** erzeugt. D.h. alle Zellen sind (oben) in einer waagerechten Reihe und die nächste Generation ist in der Reihe darunter dargestellt.

(Verwirklichung durch Diskette Ha, linzauto.exe)

Beim Start können zufällig $p\%$ der Pixelpunkte der obersten Reihe als lebendig gewählt werden.

Die **ersten beiden Bilder in der linken Spalte** haben eine Startbelegung von 10% und folgende Regeln:

Die "Nachbarschaft" besteht aus je 3 Zellen links und rechts. Lebende Zellen sind hier schwarz.

1) Lebende Zellen überleben, wenn sie 4 oder 5 lebende Nachbarn haben, andernfalls sterben sie.

2) Tote Zellen werden geboren, wenn sie 2 oder 3 lebende Nachbarn haben, sonst bleiben sie tot.

Die **anderen Bilder** beziehen sich auf Startbelegungen von 4%, 3%, 4%, 2% und die Regeln:

Die Nachbarschaft besteht aus je 2 Zellen rechts und links und der Zelle selbst.

1) Lebende Zellen überleben, wenn sie 1,2 oder 3 lebende Nachbarn haben, andernfalls sterben sie.

2) Tote Zellen werden geboren, wenn sie 2 lebende Nachbarn haben, sonst bleiben sie tot.

Oft kommt es zu stabilen Mustern.

Dies ist linzauto.bat

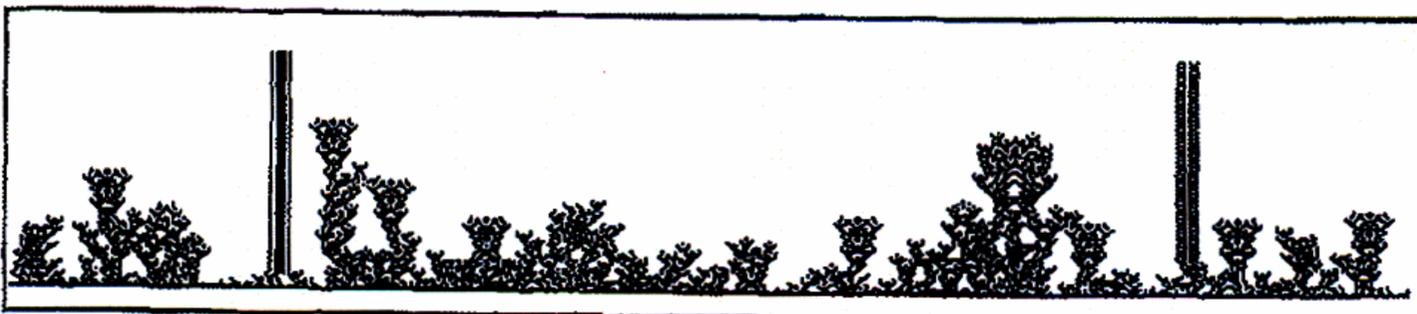
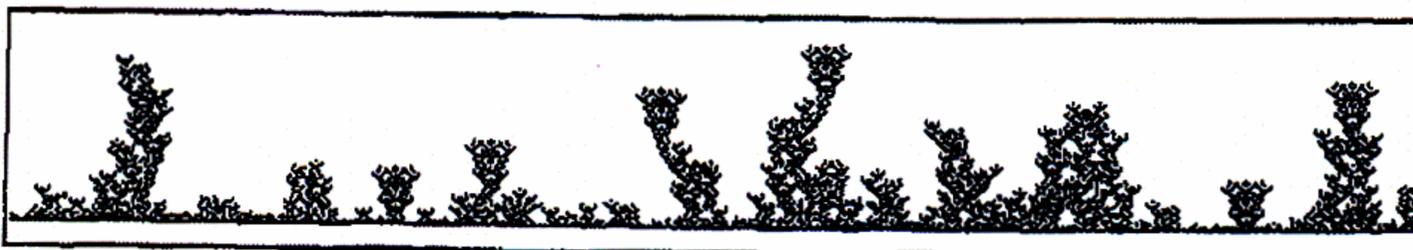
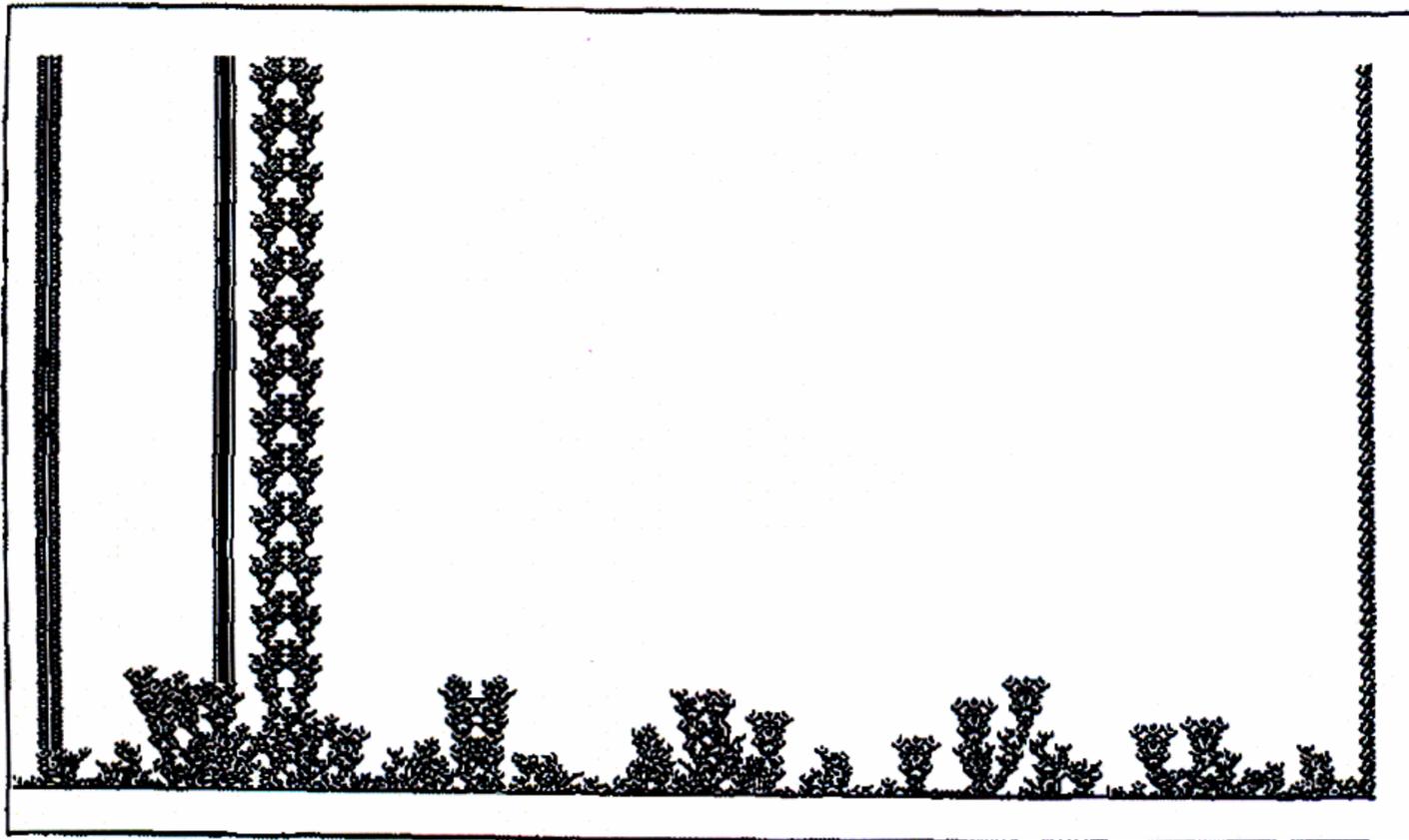
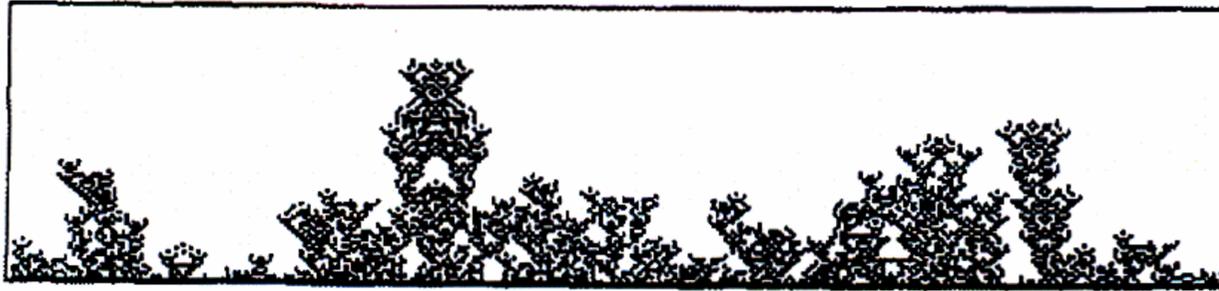
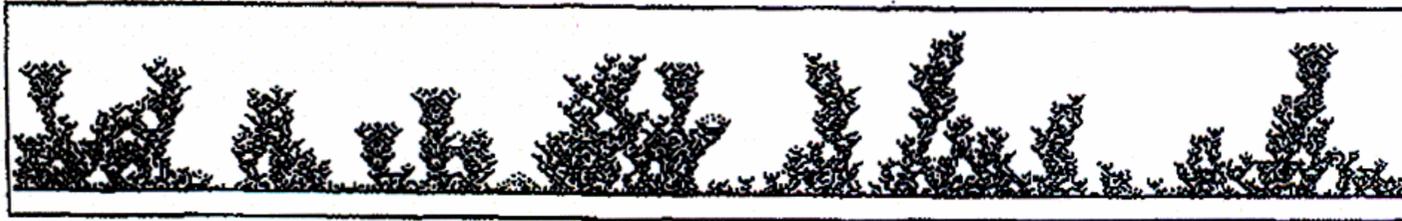
Chaos und Fraktale ▶▶ 7. Anwendungen ◀◀

Dr. Dörte Haftendorn

7.5.1 Lineare Automaten

21. Januar 1997

Lineare Automaten



Eine Zelle hat n Nachbarn.

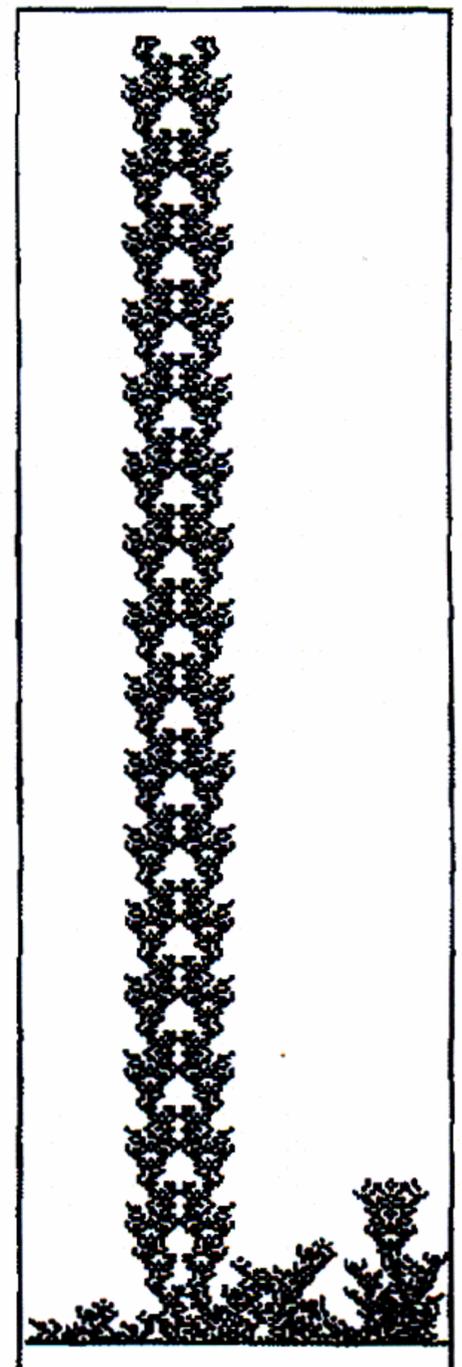
Regel 1

Eine lebende Zelle überlebt, wenn die Zahl ihrer Nachbarn genau a oder b oder... ist.

Regel 2

Eine tote Zelle wird geboren, wenn die Zahl ihrer Nachbarn x oder y oder... ist.

Prg. LINZAUTO
Startline enthält zufällig z.B. 20% Punkte.



Variert ist in den obigen Bildern vor allem die Startbelegung.
Durch die verschiedene Dichte der Punkte "wachsen" andere "Pflanzen" hoch.
Aber auch die zufällige Wahl der Startpixel hat einen Einfluß auf das Bild.
Bei Änderung der Regeln ergeben sich noch ganz andere Formen und Muster.

Computer und Unterricht Zelluläre Automaten

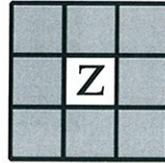
Dr. Dörte Haftendorn

Spiel des Lebens

21. Januar 1997

Zelluläre Automaten können zunächst durch Zeichnen auf dem Karopapier verwirklicht werden, für freiere Untersuchungen ist aber der Computer nötig. Der bekannteste zelluläre Automat ist wohl das "Spiel des Lebens" (Game of Life) von J. Conway. (Das ist auf der Diskette Ha, leben.exe)

Eine Zentralzelle **Z** hat 8 Nachbarn (graue Karos ("Moore-Umgebung")). Die Zellen können zwei Zustände haben. Einige sind "lebendig", oder

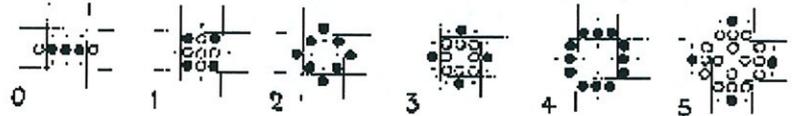


Regeln für eine Zelle **z** :
 Aufwachen bei genau 3 wachen Nachbarn.
 Wachbleiben bei 2 oder 3 wachen Nachbarn

"wach", die anderen heißen "tot" oder "schlafend". Das Spiel läuft taktmäßig ab, und es gibt feste

Regeln, nach denen eine lebende (wache) Zelle im nächsten Takt noch lebt (wach ist), bzw. nach denen Zellen geboren werden (aufwachen). Diese Regeln beziehen sich auf die Nachbarschaft der betrachteten Zelle.

Im Bild rechts ist verfolgt, wie sich eine Fünferreihe entwickelt. Am 6. und 7. Tag entsteht abwechselnd dieselbe Figur, die man Verkehrsampel nennen könnte.



Es lohnt sich auch die Entwicklung der anderen Stangen der Längen 1 bis 20 z.B. zu untersuchen. Einige "sterben aus" (z.B. 6,14,15,18,19), 7 ist besonders reichhaltig und wird dann zu "Imkerei", 10 landet schließlich in einer 15-ner Periode usw.

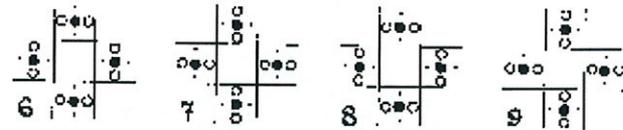


Bild 3.1 Aus einer Fünferlinie entwickelt sich eine Verkehrsampel (= 5-er-Blinker)

Unten sind noch unveränderliche Formen angegeben. Es lohnt sich auch, das Schicksal der Pentominos (Figuren aus 5 Karos) zu verfolgen.

Time	0	1	2	3	...	
(a)					...	Blinker
(b)					...	Blinker
(c)					...	Block

Bild 3.2 Wenn ein Zellenhaufen überlebt, entsteht entweder ein Blinker oder ein Block

In dem Leben-Programm von meiner Chaosdiskette kann die Entwicklung selbstgewählter Muster betrachtet werden.

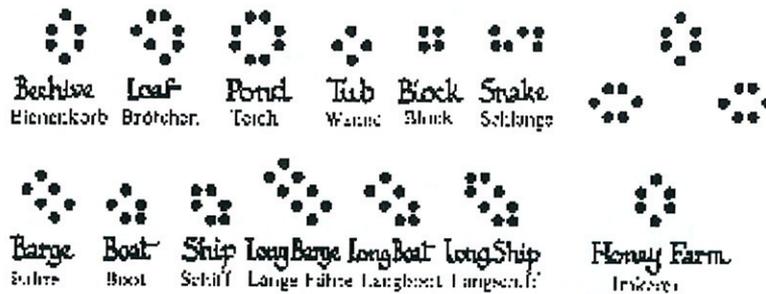


Bild 3.3 Einige der gängigen Formen von Still-Leben

Computer und Unterricht ▶ Zelluläre Automaten ◀

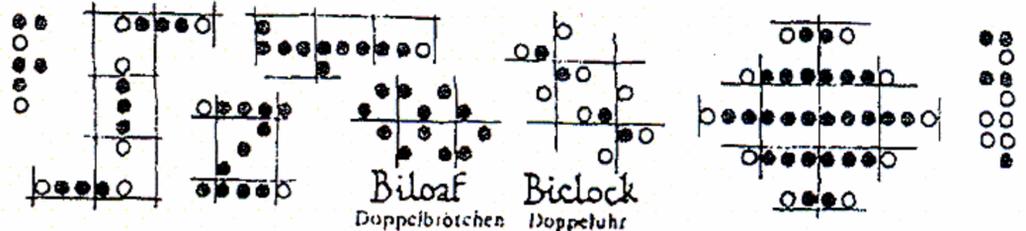
7.2.02

Dr. Dörte Haftendorn

Spiel des Lebens Beispiele

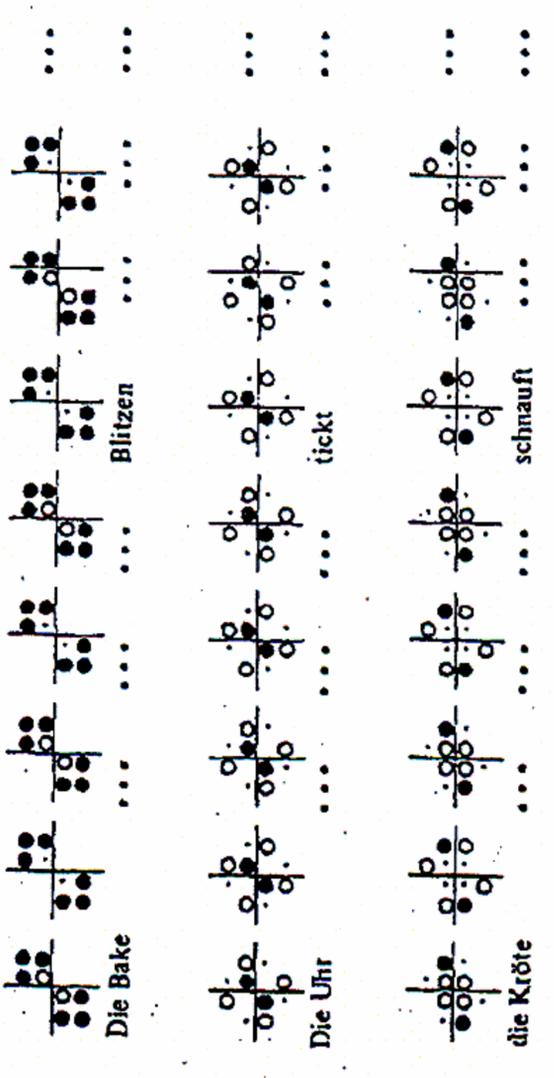
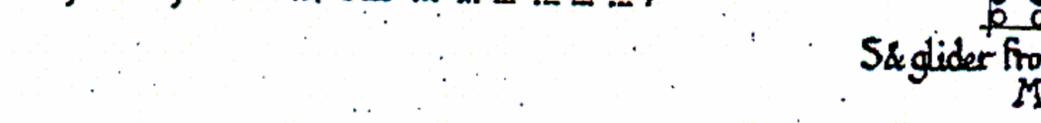
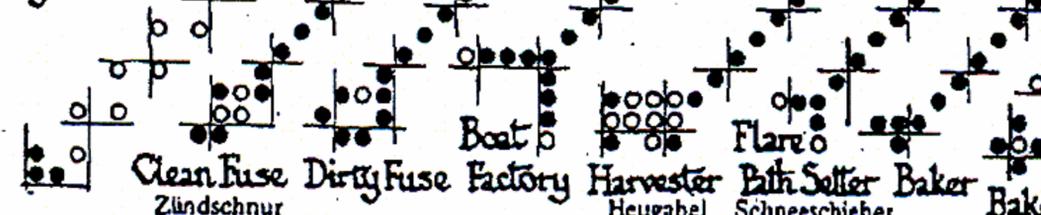
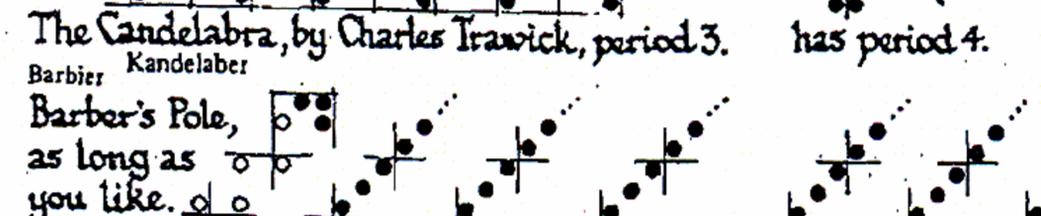
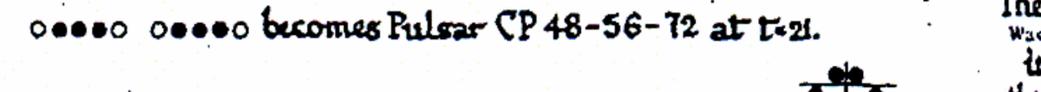
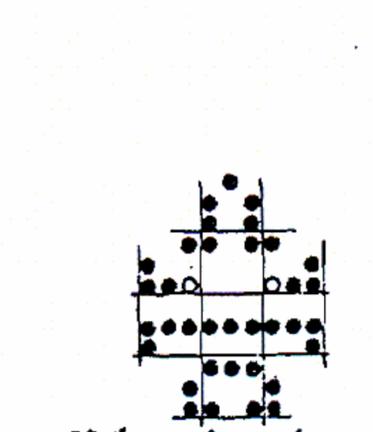
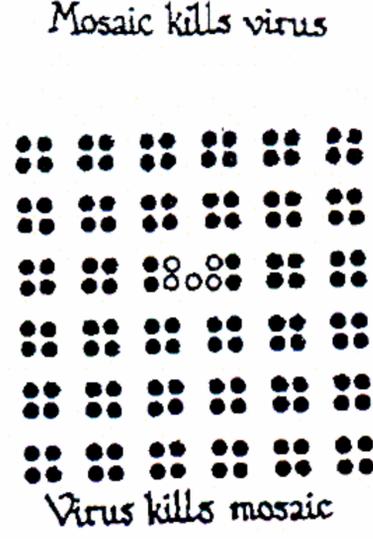
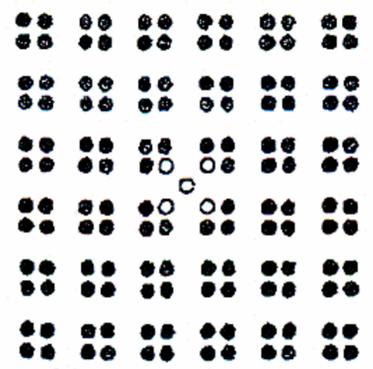
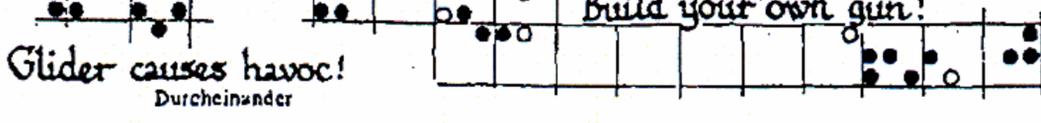
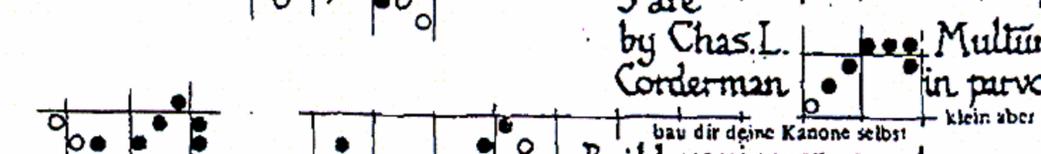
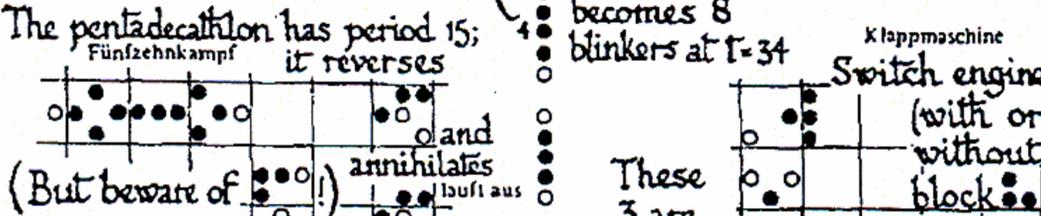
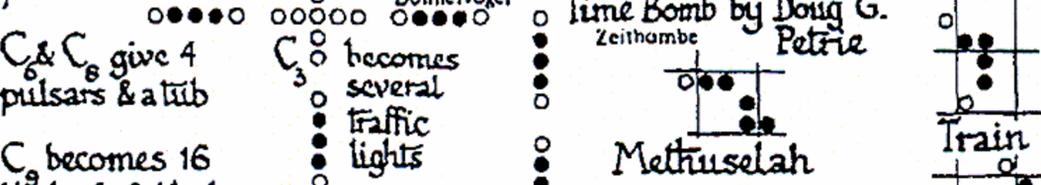
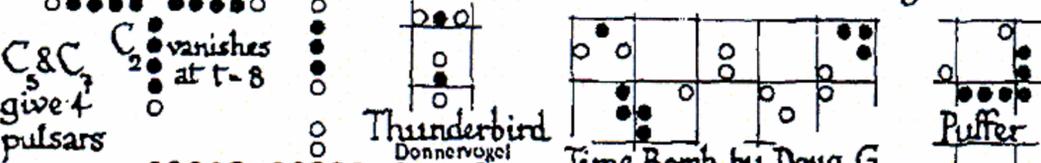
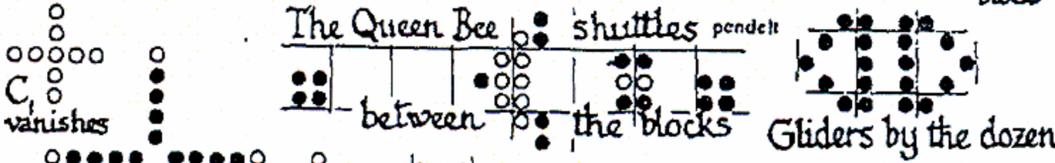
7. November 1995

Hier seien einige Beispiele vorgestellt aus dem Buch: Berlekamp/ Conway/Guy Gewinnen Bd.4 Vieweg 1985 ISBN 3-528-08534-7.



All these are "pure" glider generators

C_1 becomes 5 blinkers, 2 ponds & 6 blocks at $t=173$.
 C_2 gives 8 blinkers & 8 gliders which crash to make 8 blocks



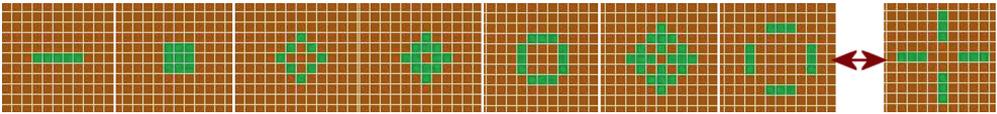


Abb. 5.33 Wie sich eine Fünferstange entwickelt

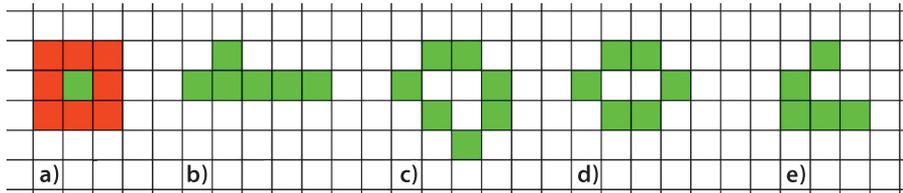


Abb. 5.34 Nachbarschaft und einige Startfiguren für das Spiel des Lebens

setzten Einzelkaro geboren werden, denn sie hat genau drei Nachbarn. Die Zelle ganz rechts stirbt an Einsamkeit, denn sie hat nur einen Nachbarn.



Aufgabe 5.2 Spiel des Lebens: Spielen Sie mit Karopapier solche Generationenwechsel nach.

Abb. 5.33 zeigt eine vollständige Generationenfolge für eine Fünferstange. Die beiden letzten Zustände wechseln sich dann immer ab.

Sie werden merken, dass Abb. 5.34c und d Konstellationen sind, die sich nie ändern. Für Abb. 5.34b finden Sie die Lösung im Anhang.

Abb. 5.34e ist der **Gleiter** (englisch *glider*), er erscheint nach vier Generationen wieder, nur um ein Karo nach links unten versetzt, wie Abb. 5.35 zeigt.

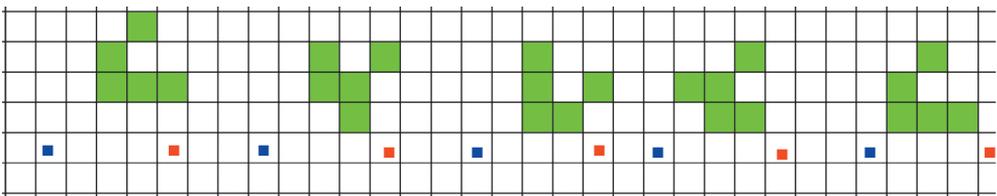


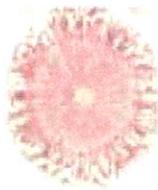
Abb. 5.35 Der Gleiter im Spiel des Lebens

Diese überraschende Bewegungseigenschaft, die er mit einigen anderen Konstellationen teilt, ist dafür verantwortlich, dass das Spiel des Lebens sehr weit reichende theoretische Folgen hat. Es ist nachgewiesen, dass man logische Schaltelemente „bauen“ kann, die sich verhalten wie die Zentraleinheit eines Computers. Damit wird das Spiel des Lebens im Sinne der theoretischen Informatik ein Computer. Wenn Sie mehr erfahren wollen, finden Sie in Wikipedia unter John H. Conway reichhaltige Informationen und Links.

Mein Programm von 1990, mit dem Abb. 5.33 erstellt ist, hatte ich für die freie erkundende Arbeit von Zwölfjährigen entwickelt. Die systematische Untersuchung der Entwicklung von Stangen verschiedener Länge, von Buchstaben usw. ist ein lohnendes Feld für mathematisches Arbeiten.

Fraktale Steigbilder

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 3. Juli 2003



Strauchtomate aus einem biologisch-dynamischen Anbau



Strauchtomate aus normalem Anbau

Das Erstaunliche ist, dass Chromatografien von Früchten oder Gemüse entsprechende Formen je nach Anbauart aufweisen.



Erde eines Gemüsegartens in Groß Hehlen

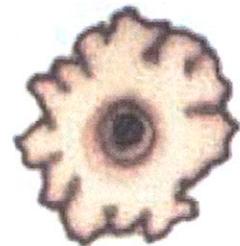


TELLING EARTH

Wir untersuchen Erdproben mit Hilfe der Rundbildchromatografie. Das ist vereinfacht ausgedrückt ein Aufsaugen von einem Aufguß in Papier. Dabei entstehen Muster, die über den biologischen Zustand der Erde Auskunft geben. Je formenreicher die Muster sind, desto mehr biologische Aktivität hat die jeweilige Probe.



Wälderde



Erde eines Ackers in Groß Hehlen

Wieland Seever, Lehrer der GHS Groß-Hehlen* bei Celle hat im EXPO-Jahr 2000 diese Steigbilder gemacht und mit dem von mir** für die Schule aufbereiteten Box-Dimension-Messverfahren ausgewertet. (Siehe Extrablatt) Oben Grünkohl aus biologisch-dynamischem Anbau, unten aus üblichem Gemüsegarten. So lässt sich zeigen, dass die fraktale Dimension bei hochwertigem Obst und Gemüse größer ist als bei minderwertigen.

* www.ghs-gross-hehlen-celle.de

(Mit freundlicher Genehmigung von Wieland Seever)

www.mathematik-verstehen.de
Bereich Fraktale->Natur
oder Fraktale->Wegfraktale->Dimension

Rechts Steigbild von Orangensaft
"Arkana" 29597 Stoetze

* Herr Seever ist pensioniert.
Das Projekt ist im Jahr 2000 abgeschlossen worden.



Die Anzahlen der rechts drehenden und der links drehenden Spiralen sind immer aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen.

In Abb. 5.40 habe ich dieses für den Pinienzapfen hervorgehoben. Ganz deutliche Spiralen ergeben sich auch beim Romanesco, wie Abb. 5.41 zeigt.



Abb. 5.41 Romanesco mit 13 links herum und acht rechts herum nach innen laufenden Spiralen

Der Romanesco ist auch ein schönes Beispiel für selbstähnliche Strukturen in der Natur. Die kleinen Kohlröschen sehen selbst aus wie ein ganzer Romanesco.

Die Sonnenblume

Bei der Sonnenblume sieht man die vielen Kerne in der Mitte. Wenn man für die Kernentstehung wieder die oben für die Blätter dargestellte biologische Erklärung annimmt, wird man zeitlich nacheinander entstehende Kerne wieder im goldenen Winkel verdreht erwarten.

Es bietet sich an, diesen Vorgang mit dem Computer zu simulieren. Meinem Kollegen Dieter Riebesehl ist dies in GeoGebra so gelungen, dass man interaktiv den Winkel, die kleinen Kreisradien und andere Parameter verändern kann. Probieren Sie es auf der Website zum Buch aus.

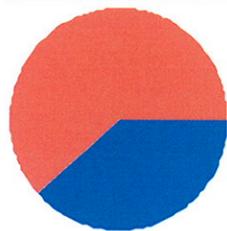
In Abb. 5.42a sehen Sie die Simulation mit dem – sechsstellig – genauen goldenen Winkel ω . Es gibt 21 links herum nach innen laufende und 34 rechts herum nach innen laufende Spiralen.

Für den Startradius der „Kerne“ konnte man 53 wählen. Wenn man den Drehwinkel um knapp sechs hundertstel Grad kleiner macht (Abb. 5.42b), erscheinen schon radial verlaufende Kernreihen, die es bei Sonnenblumen nicht gibt. Den Kernradius musste man verkleinern. Damit ist dies schon keine optimale Anordnung mehr. Bei Vergrößerung des Winkels gegenüber dem goldenen Winkel um knapp sechs hundertstel Grad (Abb. 5.42c), entstehen eindeutige Spiralen nur in der einen Richtung. Der Kernradius musste noch kleiner sein und der Platz ist gar nicht gut ausgefüllt. Diese Empfindlichkeit gegenüber kleinsten Änderungen hängt mit der besonderen Kettenbruchentwicklung von φ zusammen (Seite 112).

Fraktale

Sonnenblume und Goldener Schnitt

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 3. Juli 2003



Der Kreis	ist im "Goldenen Schnitt" geteilt, wenn sich der kleinere Teil zum größeren verhält wie der größere zum Ganzen.	
Das Rechteck		
Die Unterkante des Rechtecks		

Wenn also das Ganze 1 ist und der größere Teil g , dann muss gelten:

$$\frac{1-g}{g} = \frac{g}{1}, \text{ das ist eine quadratische Gleichung mit der positiven Lösung}$$

$$g = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033989... \text{ Der Kehrwert dieser Zahl ist der Betrag der}$$

$$\text{negativen Lösung } g^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033989... = 1 + g$$

Obiges Rechteck heißt "goldenes Rechteck", weil seine Seiten im "goldenen

Verhältnis" (golden ratio) stehen. Meist bezeichnet man $\varphi := g, \Phi := 1 + \varphi = \frac{1}{\varphi}$.

Zeichnet man die Punkte der komplexen Rekursion $f(z) = a \cdot z = q e^{2i\varphi\pi} \cdot z$ mit

$q=0.999$ und diesem $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, so ergibt sich eine Sonnenblume:

Der Faktor a verkürzt den Abstand vom Ursprung um

$1^\circ / \infty$ und dreht um

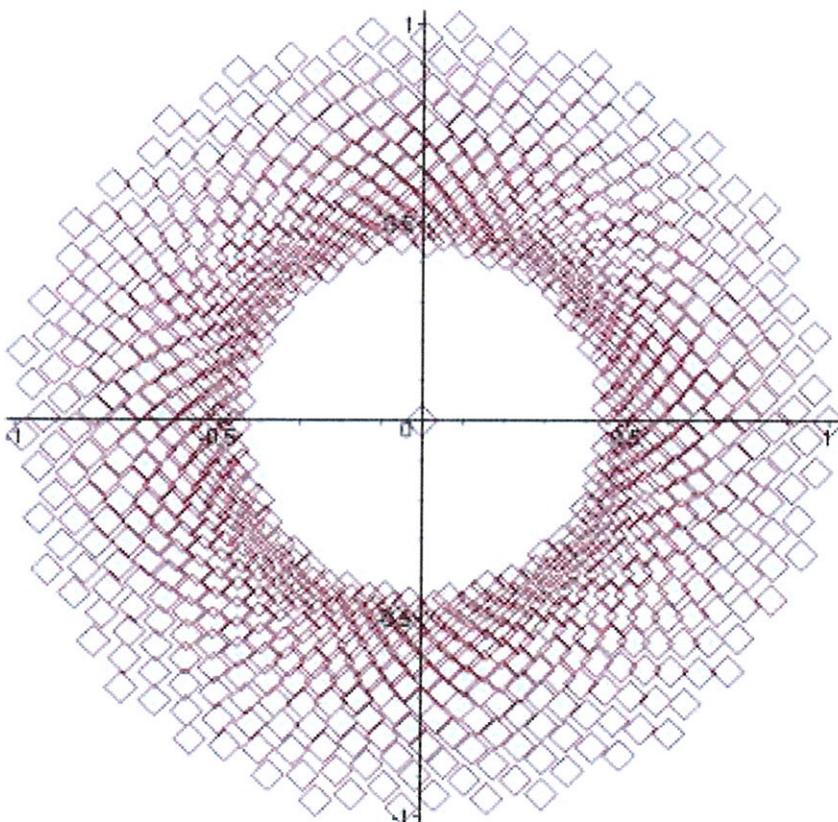
$$\varphi \cdot 360^\circ = 222,4922^\circ$$

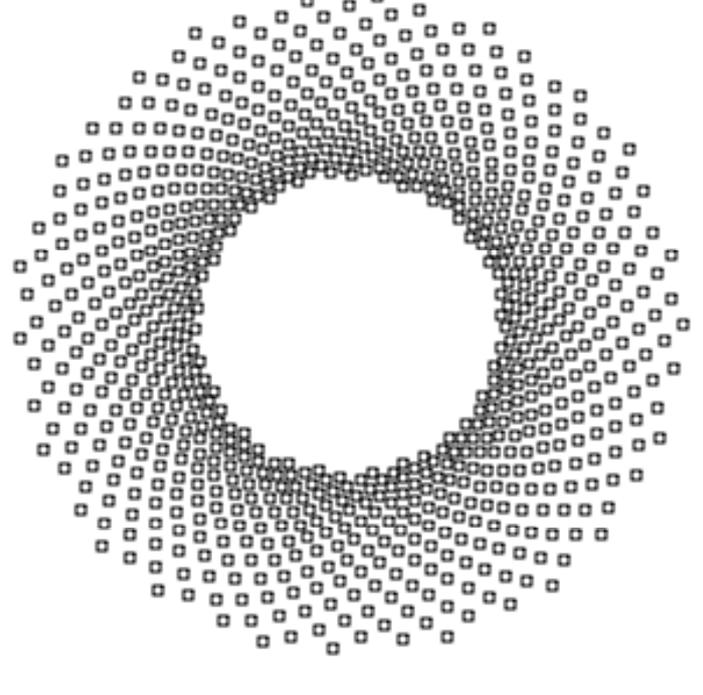
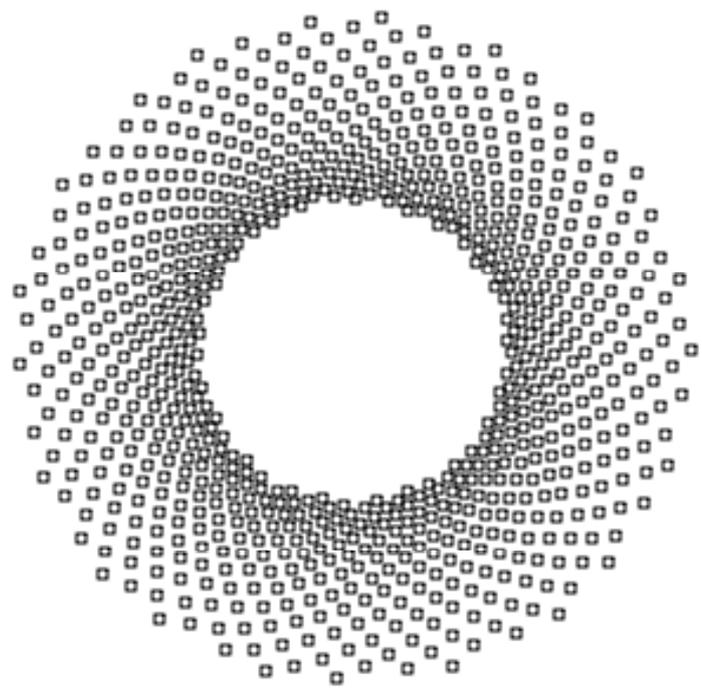
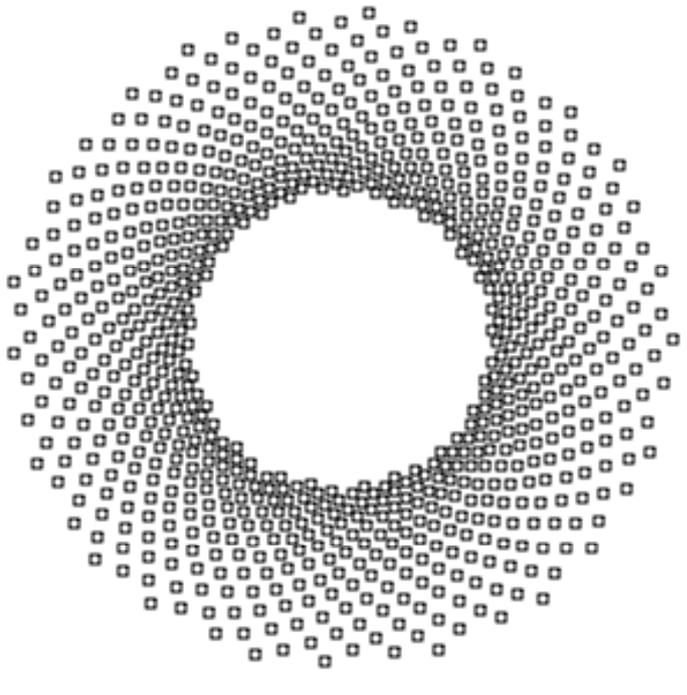
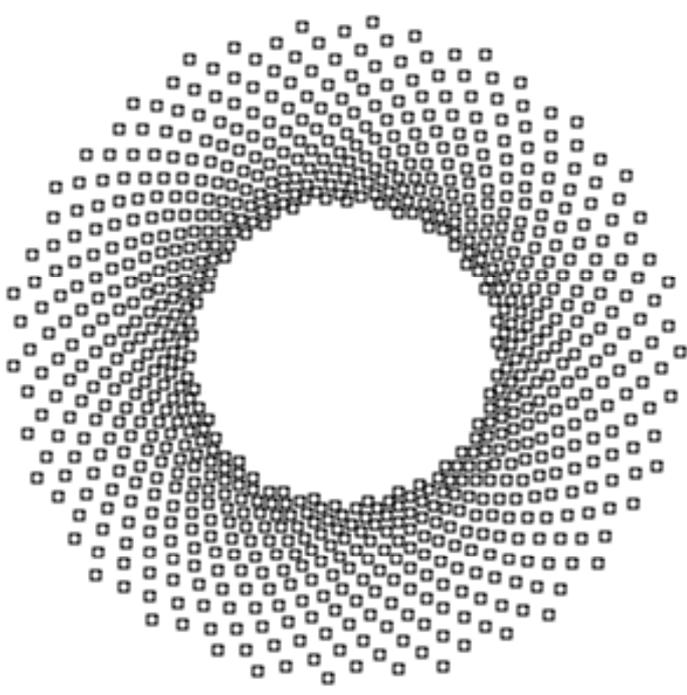
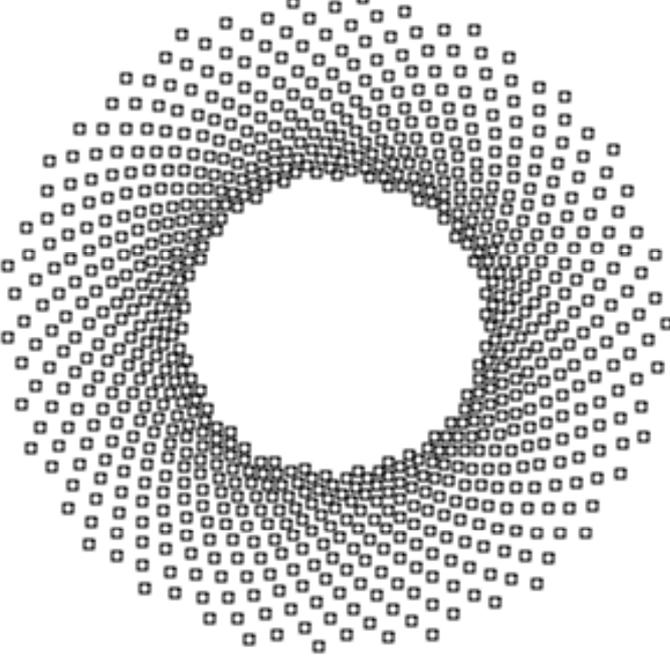
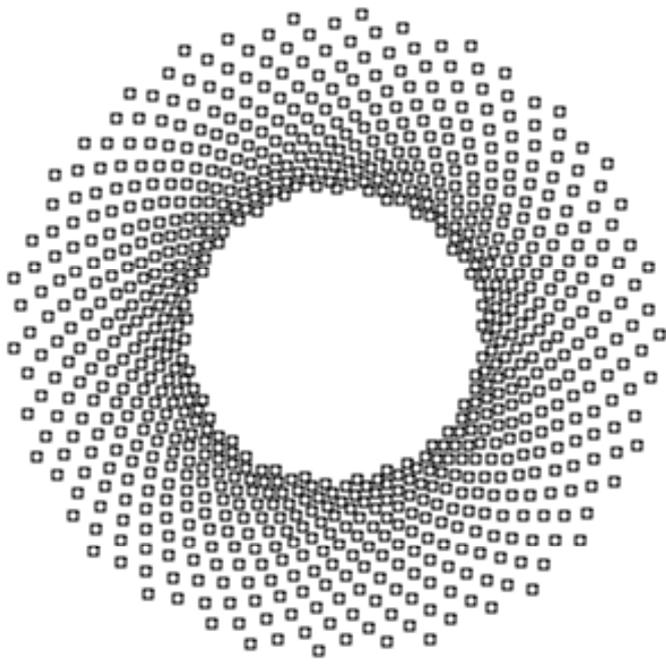
$$= -137,5078^\circ$$

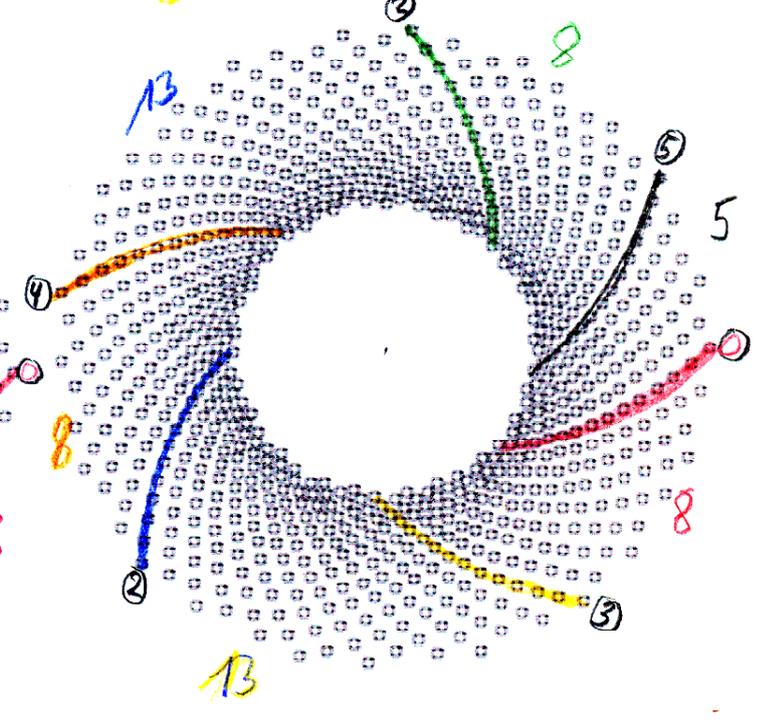
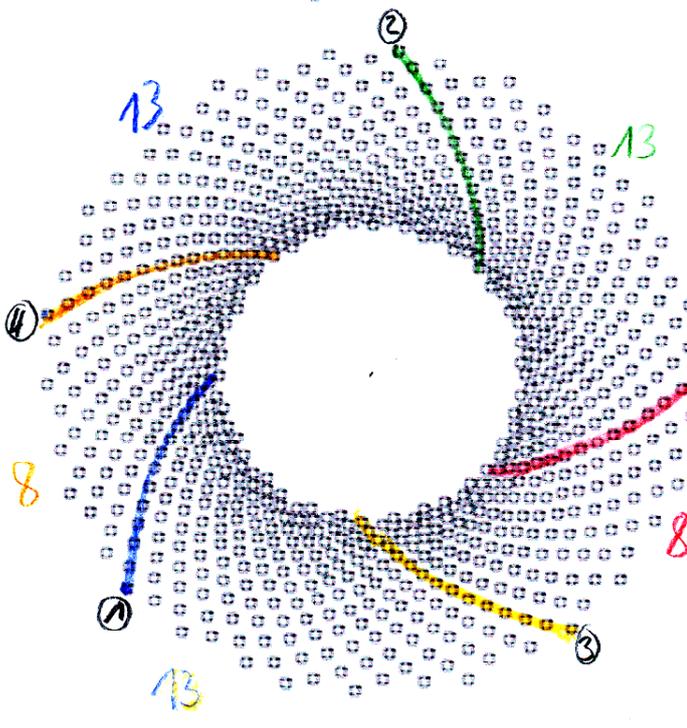
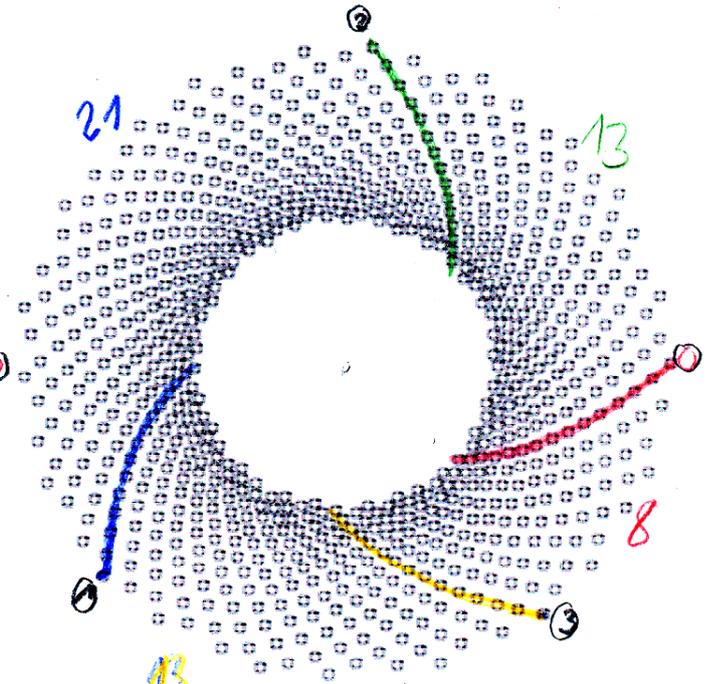
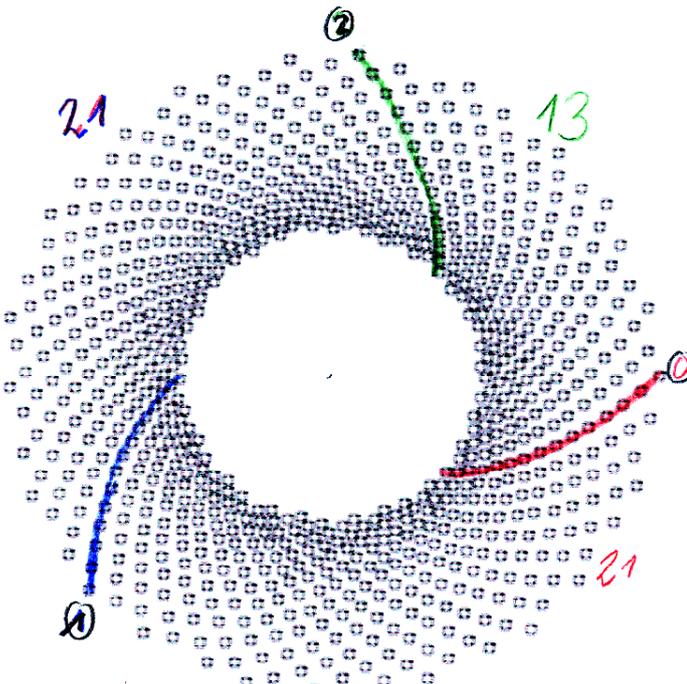
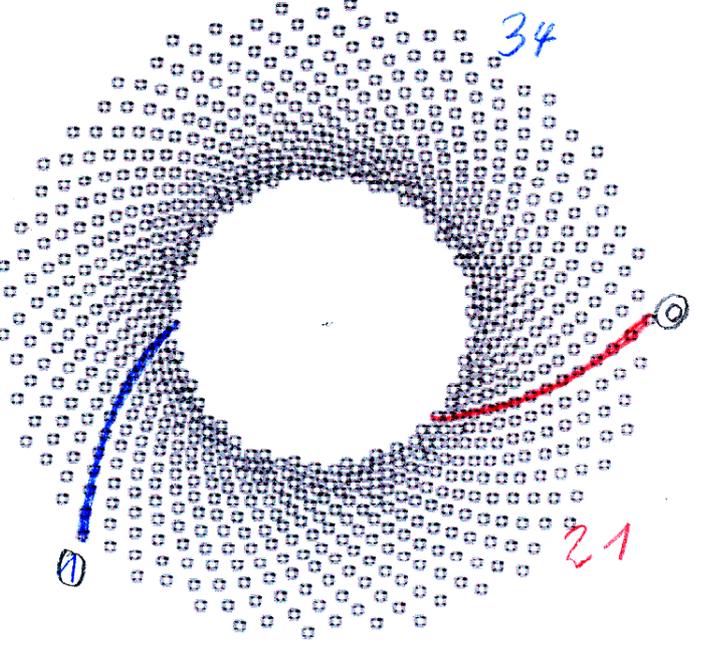
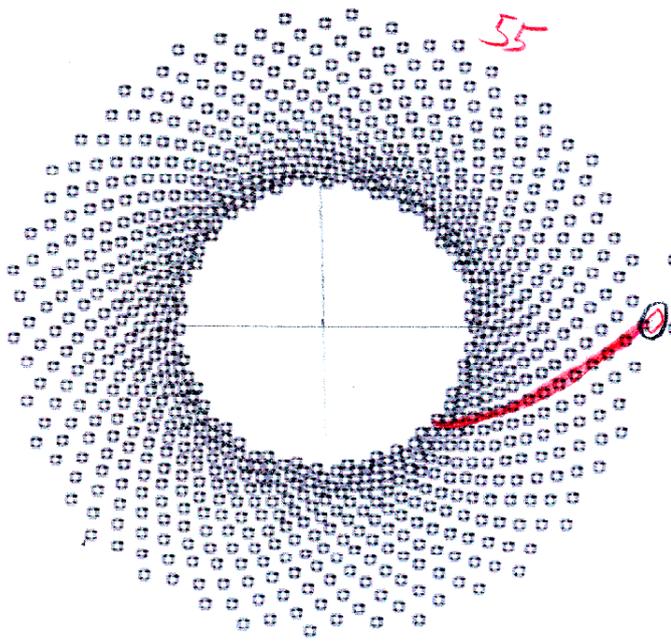
Start ist bei 1.

Erst nach 55 Schritten und 21 Runden kommt der Punkt knapp unter 1 zustande.

Von dort geht ein Spiralarm zur Mitte. Der nächst tiefere Spiralarm beginnt nach 21 Schritten. Die Fibonacci-Zahlen 55, 34, 21, 13, 8 lassen sich bei den Spiralarmnummern finden. Überhaupt sind die Fibonacci-Zahlen im Goldenen Schnitt und vielen Phänomenen zu finden.







Hallo Dörte,

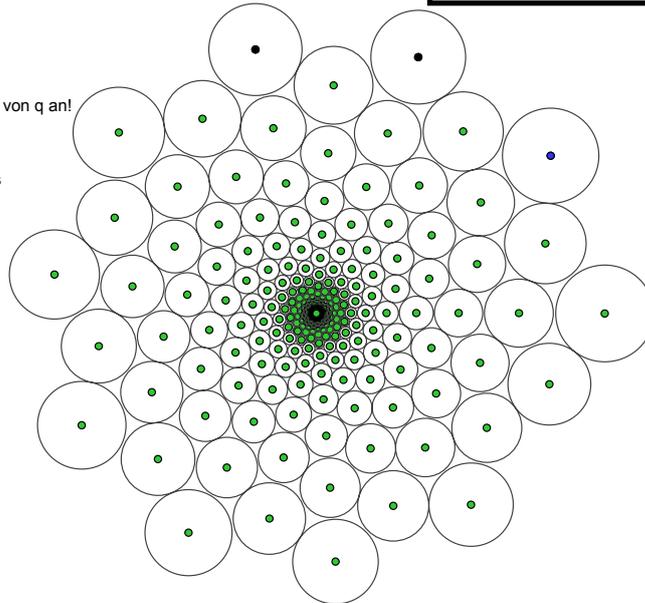
Prof. Dr. Dieter Riebesehl, 13. Jan. 08

ein bisschen Spielerei mit Sonnenblumen.

Es gibt durchaus nicht nur dann schöne Spiralen, wenn der Winkel etwas mit dem goldenen Schnitt zu tun hat. Z.B. hat das folgende Bild schöne Spiralen, und zwar 11 Spiralen im Uhrzeigersinn und 10 dagegen:

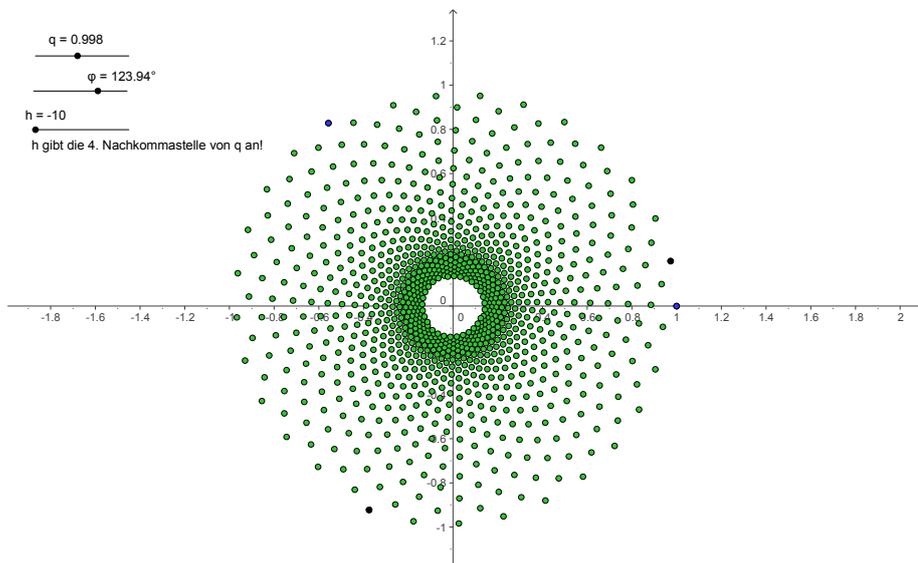
Siehe dazu auch "Mathematik sehen und Verstehen" Seite 111- 116, besonders Seite 116.
Interaktive Datei hierzu auf der Website zum Buch.
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de

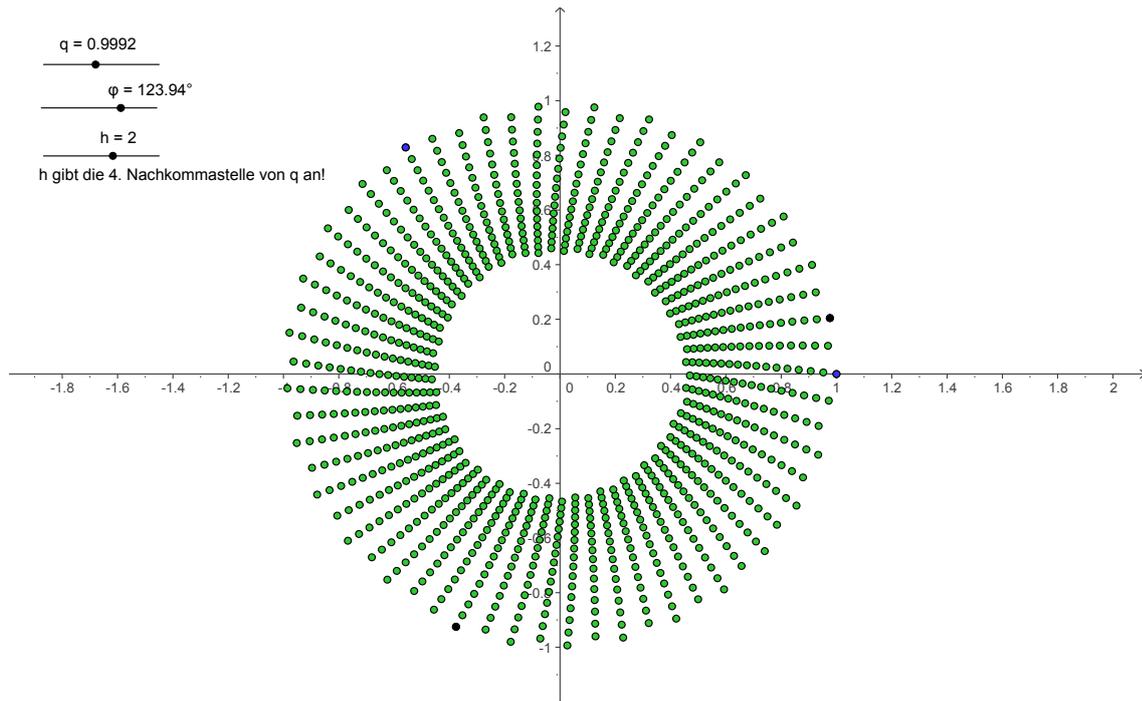
$q = 0.9833$
 $\varphi = 34.29^\circ$
 $h = 3$
 h gibt die 4. Nachkommastelle von q an!
 $r = 0.17$
 r = Radius des ersten Kreises



Der Winkel φ ist hier (so genau sich das einstellen ließ) $2/21$ von 360° . Das bewirkt, das $11\varphi = 1/11 \cdot 360^\circ$ ist und also zwischen dem 1. und 2. Punkt genau in der Mitte näher zum Zentrum landet. Wählt man den Streckungsfaktor passend, dann entstehen diese prima Spiralen, die aber auch überhaupt nicht zum goldenen Schnitt passen.

Die nächsten beiden Bilder zeigen, wie sehr das Aufscheinen von Spiralen am richtigen q hängt:





Der Wert von q ist im ersten Bild 0.998, und im zweiten 0.9992. Der Winkel ist $\varphi = 123.94^\circ$ und hat auch nichts mit dem goldenen Schnitt zu tun.

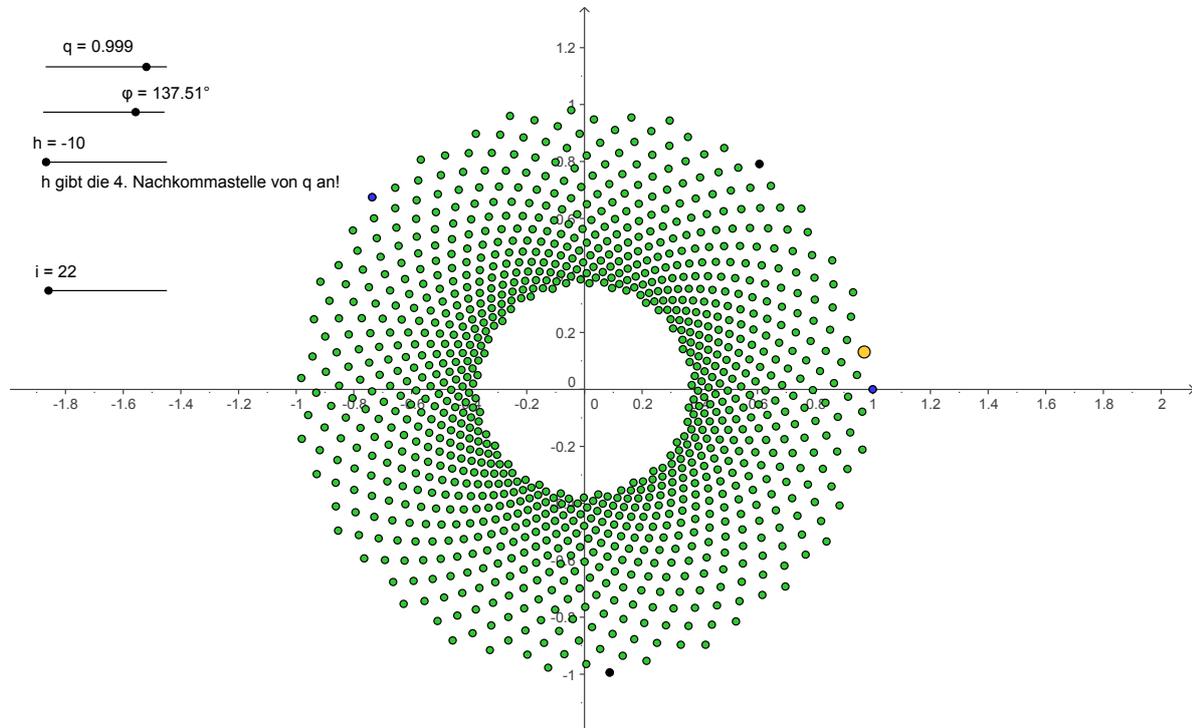
Als Spielwiese schicke ich zwei Geogebra-Dateien mit, in beiden kann man φ kontinuierlich in Schritten von 0.01° verändern, q kann mit Schrittweite 0.001, und unter zuhelfenahme von h sogar 0.0001 verändern. In der ersten kann man noch den Punkt mit der Nummer i durch eine orange Farbe hervorheben. Die zweite malt noch Kreise um die Punkte, deren Größe man tunlichst anpasst, damit bei kleinen Anzahlen von Spiralen diese auch schön deutlich werden.

Läßt man φ laufen, so entstehen und vergehen Spiralen bei allen erdenklichen Winkeln, keineswegs haben die Anzahlen immer Verwandtschaft mit den Fibonaccizahlen. Übrigens: in der Graphik sind immer Punkt 1 und 2 blau und Punkt 3 und 4 schwarz eingefärbt, damit man sehen kann, wo es los geht. Oben geht es also im dritten Quadranten oben los, und Punkt 4 ist ganz nahe an Punkt 1. Man hätte auch genauso gut mit Punkt 4 starten können, der zum Winkel $4\varphi - 360^\circ = 7.664^\circ$ gehört, sofern man dann q durch q^4 ersetzt. Die so entstehenden Punkte sind alle auch im obigen Bild enthalten, aber nur jeder 3. Punkt ist noch vorhanden.

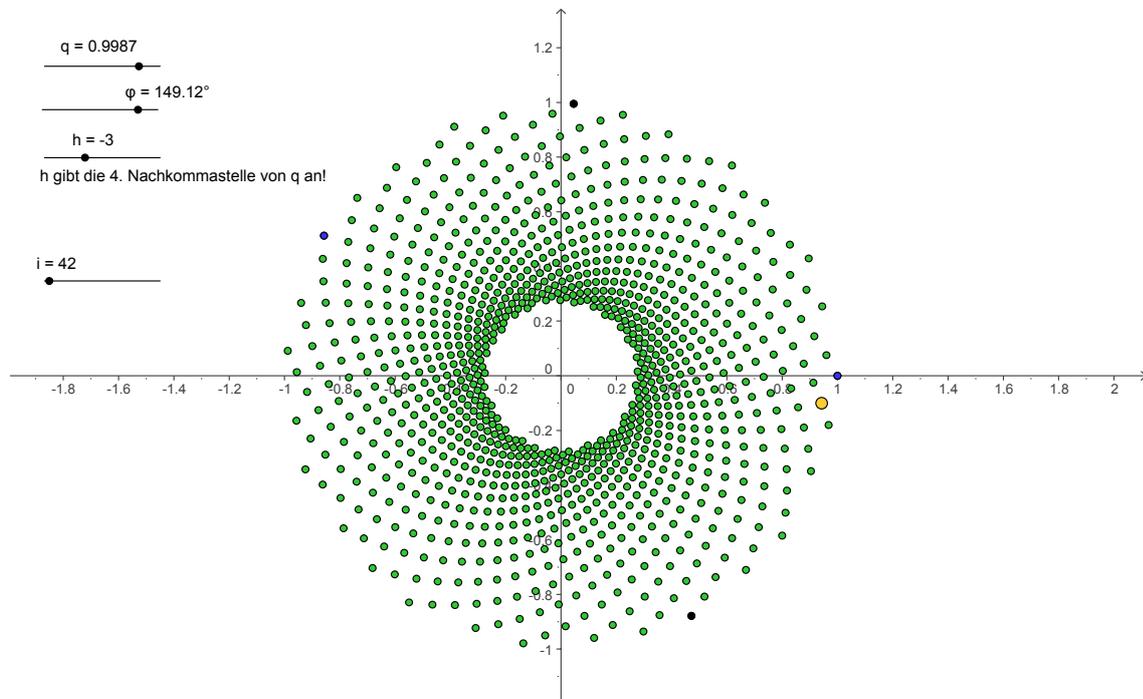
Auch beim goldenen Schnitt für φ kann man diese Idee einsetzen. Punkt 22 liegt am nächsten an Punkt 1 (gegen den Uhrzeigersinn), deshalb kann man statt φ ebenso gut mit 21φ modulo $360^\circ = 7.663^\circ$ beginnen und $q = 0.999^{21} = 0.9792$ wählen. Man erhält wieder alte Punkte, aber nur jeder 21. Punkt wird gezeichnet: man erhält eine Spirale, die anderen 20 entstehen durch Drehen mit $\varphi, 2\varphi, \dots$ etc.

Die Sonderrolle des Winkels φ vom goldenen Schnitt ist also gar nicht so klar. Man bekommt immer dann Spiralen, wenn der Winkel φ gerade zwischen zwei einfachen Bruchteilen von 360° liegt - $123.94^\circ/360^\circ = 2.638$, also ziemlich genau in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen - und wenn man q passend wählt, so dass die Spiralen erscheinen. Die Skalierung mit q entspricht der Verwendung von geeigneten Vielfachen von φ . Wenn es Vielfache von φ gibt, die sehr nahe an einer ganzen Zahl liegen, dann gibt es keine Spiralen, sondern nur Radien, die nach innen weisen. φ ist dann gut durch eine rationale Zahl approximierbar. Aber man kann mit q passend skalieren, und es gibt doch Spiralen.

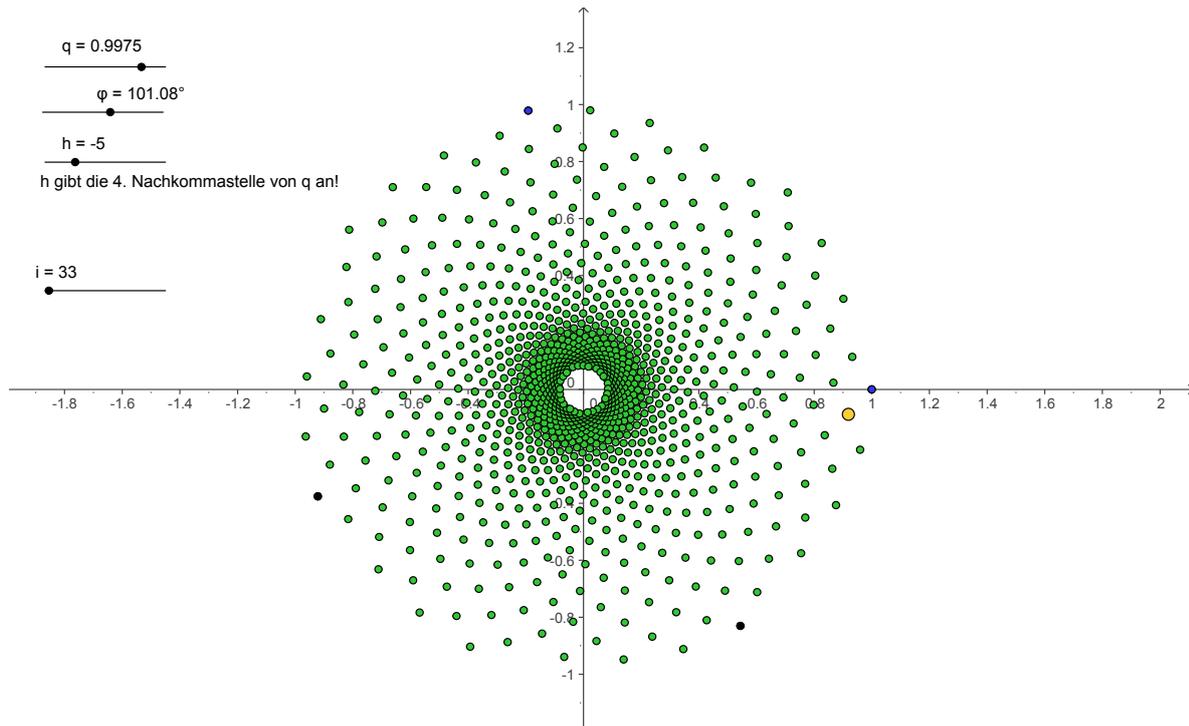
Die Sonderrolle des goldenen Schnitts liegt also darin, dass der Winkel dazu besonders schlecht durch rationale Zahlen approximierbar ist. Deshalb spielt q keine Rolle beim Entdecken von Spiralen. Ist φ der Winkel zum goldenen Schnitt, dann ergeben sich für alle q in einem großen Bereich Spiralen.



Es gibt aber noch andere irrationale Zahlen, die schlecht approximierbar sind – obwohl der goldene Schnitt die schlechtest approximierbare ist -, z.B. $\varphi = (\sqrt{2}-1) \times 360^\circ = 149.12^\circ$:



Man erhält 41 und 29 Spiralen. Oder $(\sqrt{17}-3)/4 \times 360^\circ = 101.18^\circ$:



Diesmal 32 und 25 Spiralen. Ich habe diese Beispiele gesucht, indem ich mir Kettenbrüche angesehen habe, in denen nur kleine Zahlen vorkommen. Je kleiner, desto schlechter approximierbar. Es ist

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

und $\frac{1 + \sqrt{17}}{4} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$

Die benutzten Winkel ergeben sich, wenn man modulo 1 (oder 360°) rechnet. Übrigens: $41/29 = 1.4138 \approx \sqrt{2}$, $32/25 = 1.28$, $(1 + \sqrt{17})/4 = 1.280776$. Drum!

Viel Spaß beim Rumspielen

Dieter