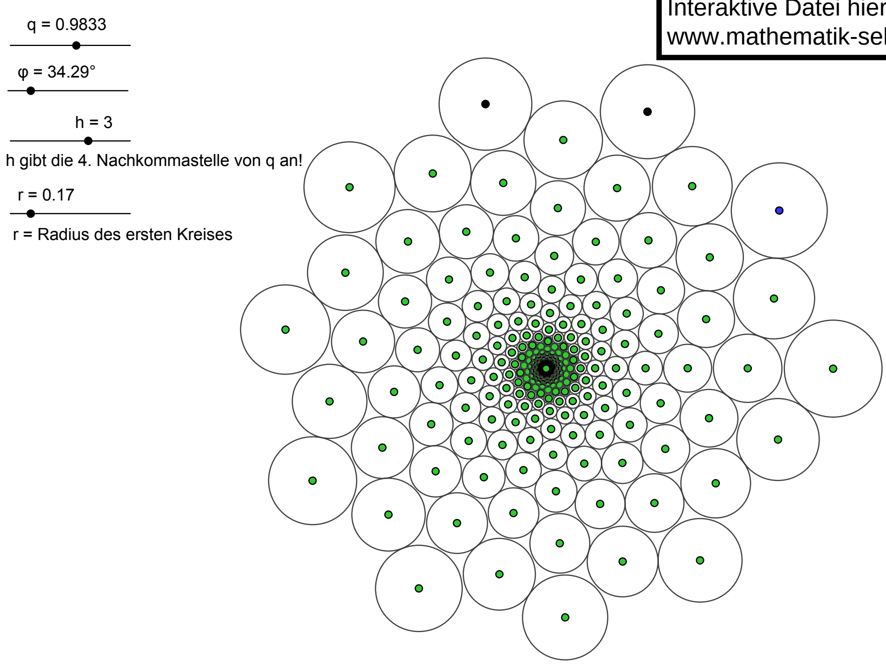
Prof. Dr. Dieter Riebesehl, Dipl. Math. Leuphana Universität lüneburg

Hallo Dörte, Prof. Dr. Dieter Riebesehl, 13. Jan. 08

ein bisschen Spielerei mit Sonnenblumen.

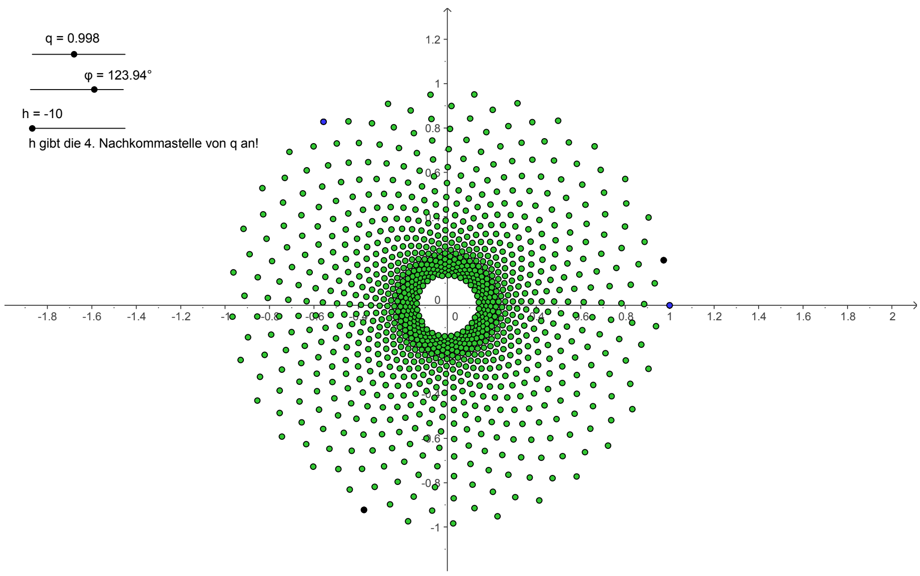
Es gibt durchaus nicht nur dann schöne Spiralen, wenn der Winkel etwas mit dem goldenen Schnitt zu tun hat. Z.B. hat das folgende Bild schöne Spiralen, und zwar 11 Spiralen im Uhrzeigersinn und 10 dagegen:

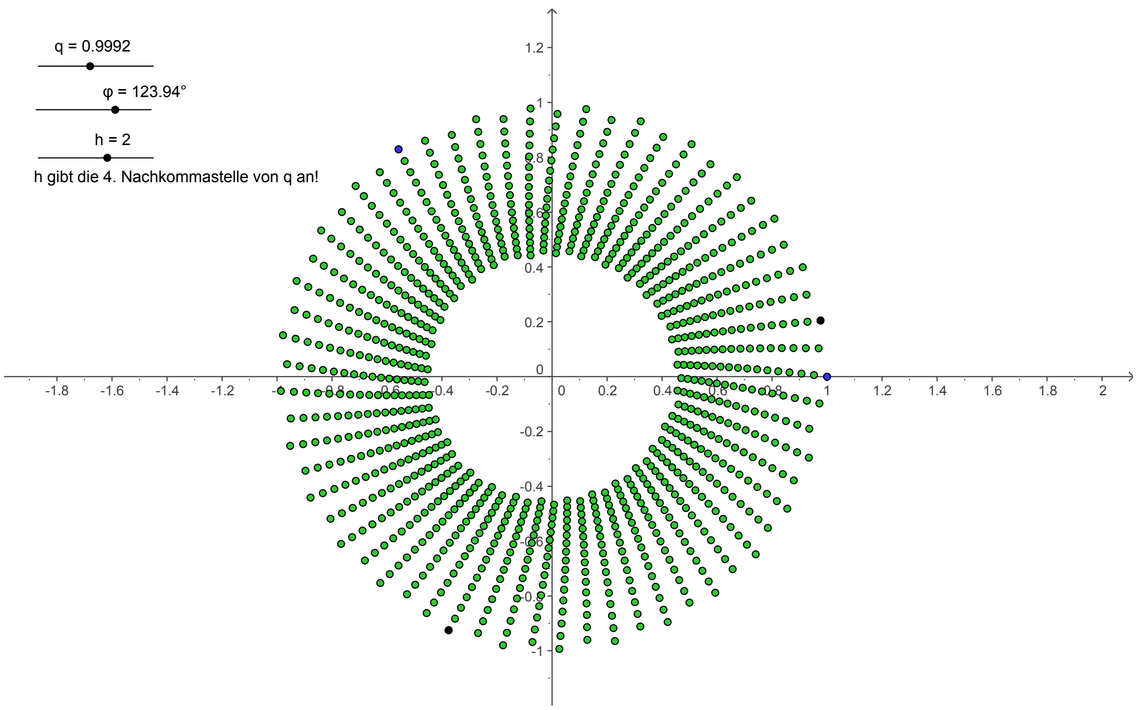
Siehe dazu auch "Mathematik sehen und Verstehen"
Seite 111- 116, besonders Seite 116.
Interaktive Datei hierzu auf der Website zum Buch.
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de



Der Winkel φ ist hier (so genau sich das einstellen ließ) 2/21 von 360°. Das bewirkt, das 11φ = 1/11 360° ist und also zwischen dem 1. und 2. Punkt genau in der Mitte näher zum Zentrum landet. Wählt man den Streckungsfaktor passend, dann entstehen diese prima Spiralen, die aber auch überhaupt nicht zum goldenen Schnitt passen.

Die nächsten beiden Bilder zeigen, wie sehr das Aufscheinen von Spiralen am richtigen q hängt:





Der Wert von q ist im ersten Bild 0.998, und im zweiten 0.9992. Der Winkel ist $\varphi = 123.94°$ und hat auch nichts mit dem goldenen Schnitt zu tun.

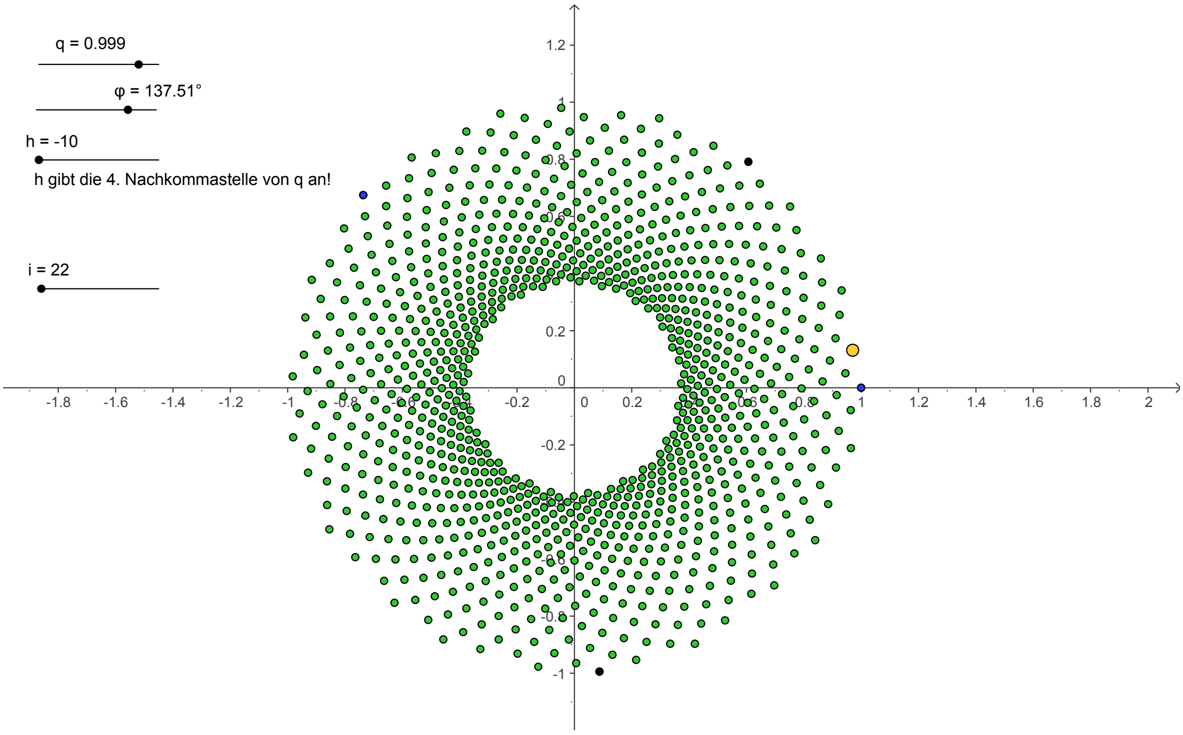
Als Spielwiese schicke ich zwei Geogebra-Dateien mit, in beiden kann man φ kontinuierlich in Schritten von 0.01° verändern, q kann mit Schrittweite 0.001, und unter zuhilfenahme von h sogar 0.0001 verändern. In der ersten kann man noch den Punkt mit der Nummer i durch eine orange Farbe hervorheben. Die zweite malt noch Kreise um die Punkte, deren Größe man tunlichst anpasst, damit bei kleinen Anzahlen von Spiralen diese auch schön deutlich werden.

Läßt man φ laufen, so entstehen und vergehen Spiralen bei allen erdenklichen Winkeln, keineswegs haben die Anzahlen immer Verwandtschaft mit den Fibonaccizahlen. Übrigens: in der Graphik sind immer Punkt 1 und 2 blau und Punkt 3 und 4 schwarz eingefärbt, damit man sehen kann, wo es los geht. Oben geht es also im dritten Quadranten oben los, und Punkt 4 ist ganz nahe an Punkt 1. Man hätte auch genauso gut mit Punkt 4 starten können, der zum Winkel $4\varphi-360° = 7.664°$ gehört, sofern man dann q durch q^4 ersetzt. Die so entstehenden Punkte sind alle auch im obigen Bild enthalten, aber nur jeder 3. Punkt ist noch vorhanden.

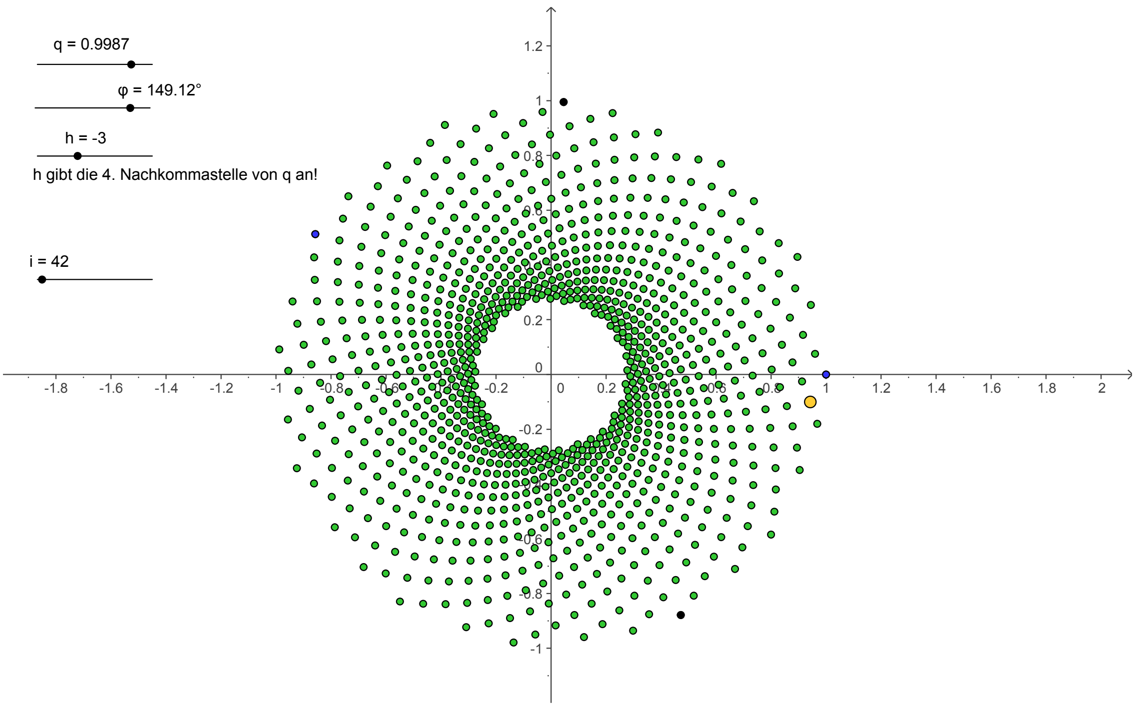
Auch beim goldenen Schnitt für φ kann man diese Idee einsetzen. Punkt 22 liegt am nächsten an Punkt 1 (gegen den Uhrzeigersinn), deshalb kann man statt φ ebenso gut mit 21φ modulo 360° = 7.663° beginnen und $q = 0.999^{21} = 0.9792$ wählen. Man erhält wieder alte Punkte, aber nur jeder 21. Punkt wird gezeichnet: man erhält eine Spirale, die anderen 20 entstehen durch Drehen mit φ, 2φ, ... etc.

Die Sonderrolle des Winkels φ vom goldenen Schnitt ist also gar nicht so klar. Man bekommt immer dann Spiralen, wenn der Winkel φ gerade zwischen zwei einfachen Bruchteilen von 360° liegt - 123.94°/360° = 2.638, also ziemlich genau in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen - und wenn man q passend wählt, so dass die Spiralen erscheinen. Die Skalierung mit q entspricht der Verwendung von geeigneten Vielfachen von φ. Wenn es Vielfache von φ gibt, die sehr nahe an einer ganzen Zahl liegen, dann gibt es keine Spiralen, sondern nur Radien, die nach innen weisen. φ ist dann gut durch eine rationale Zahl approximierbar. Aber man kann mit q passend skalieren, und es gibt doch Spiralen.

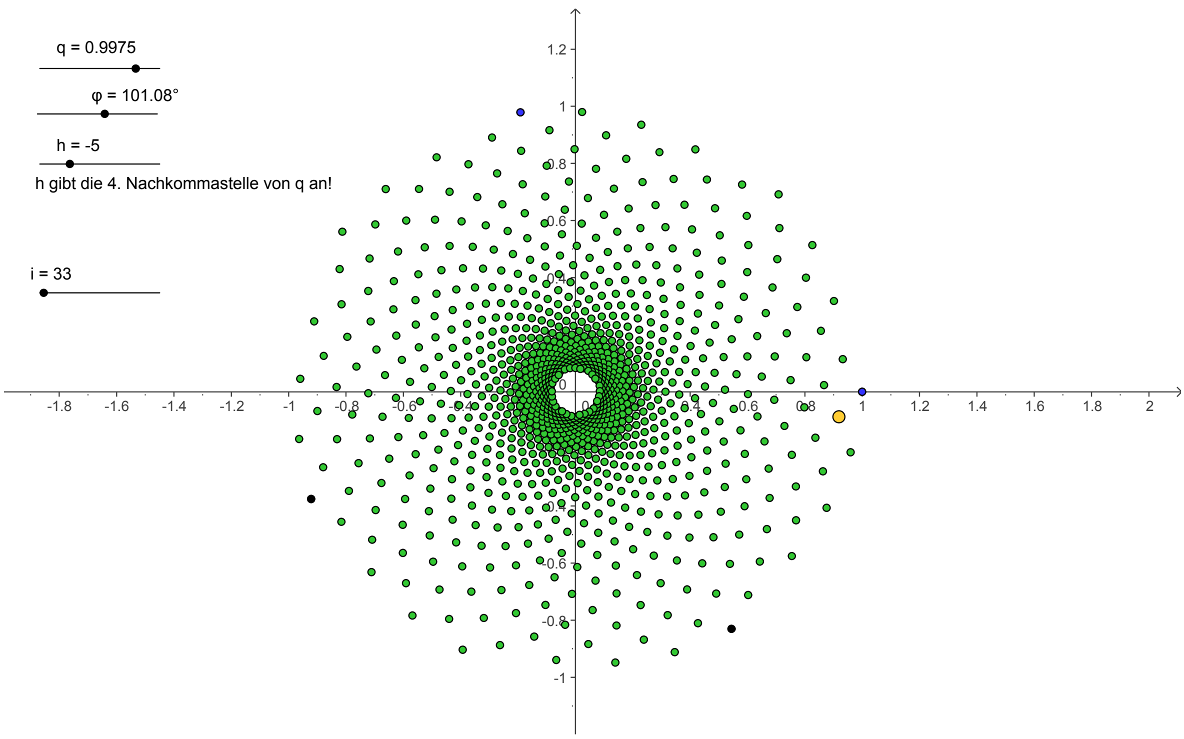
Die Sonderrolle des goldenen Schnitts liegt also darin, dass der Winkel dazu besonders schlecht durch rationale Zahlen approximierbar ist. Deshalb spielt q keine Rolle beim Entdecken von Spiralen. Ist φ der Winkel zum goldenen Schnitt, dann ergeben sich für alle q in einem großen Bereich Spiralen.



Es gibt aber noch andere irrationale Zahlen, die schlecht approximierbar sind – obwohl der goldene Schnitt die schlechtest approximierbare ist -, z.B. φ = (√2-1)x360° = 149.12°:



Man erhält 41 und 29 Spiralen. Oder (√17-3)/4 x360° = 101.18°:



Diesmal 32 und 25 Spiralen. Ich habe diese Beispiele gesucht, indem ich mir Kettenbrüche angesehen habe, in denen nur kleine Zahlen vorkommen. Je kleiner, desto schlechter approximierbar. Es ist

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

und $$\frac{1+\sqrt{17}}{4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Die benutzten Winkel ergeben sich, wenn man modulo 1 (oder 360°) rechnet.
Übrigens: $41/29 = 1.4138 \approx \sqrt{2}$, $32/25 = 1.28$, $(1+\sqrt{17})/4 = 1.280776$. Drum!

Viel Spaß beim Rumspielen

Dieter