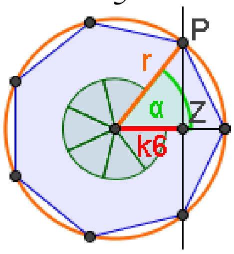
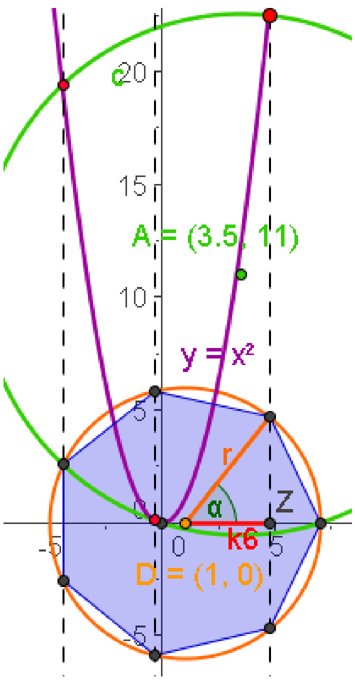
Quasi-Konstruktion des 7-Ecks

Prof. Dr. Dieter Riebesehl, Universität Lüneburg, 14. Februar 2006
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg: Ergänzungen und Ausarbeitung für die Lehre

Unter einer Quasikonstruktion verstehen wir eine exakte Konstruktion mit dem erweiterten Werkzeug: Zirkel, Lineal und Parabellineal. Weiteres dazu auf der Extraseite Quasikonstronstruktionen.



Der Innenwinkel des 7-Ecks ist $\alpha = \frac{2\pi}{7}$. Also ist $7\alpha = 2\pi$ und damit auch $\cos(7\alpha) = \cos(2\pi) = 1 \quad Gl\boxed{1}$
Mit mehrfacher Anwendung der Additionstheoreme kann man $\cos(7\alpha)$ in Termen von $k := \cos(\alpha)$ schreiben. Dann ergibt sich aus $Gl\boxed{1}$ mit CAS und expand(...) oder von Hand -wie auf der Seite Winkeldritten gezeigt- nach Abspaltung des Linearfaktors $(k-1)$ (Befehl factor(...)) also: $(k-1)(8k^3+4k^2-4k-1)^2 = 0 \quad Gl\boxed{2}$. Für das Problem ist die rechte Klammer interessant, umgeschrieben bleibt:
$k^3 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{8} = 0 \quad Gl\boxed{3}$. Auf der Seite „Cardano-Gleichungen" wird beschrieben, dass man nun mit der Substitution $k = z' - \frac{1}{6}$ eine Gleichung für z' in Cardano-Standard-Form erhält. Will man aber hier das Auftauchen von Brüchen vermeiden setzt man besser $k = \frac{z}{6} - \frac{1}{6} = \frac{z-1}{6}$ also $6k = z - 1 \quad Gl\boxed{4}$ und das ist, wie die Zeichnung zeigt, geometrisch leicht an einem Kreis mit dem Radius $r = 6$ deutbar. Verwendung von $Gl\boxed{4}$ in $Gl\boxed{3}$ ergibt: $z^3 - 21z - 7 = 0 \quad Gl\boxed{5}$. Dieses ist eine griffige Cardano-Standard-Form einer Gleichung 3. Grades, die nun mit einer Quasi-Konstruktion gelöst werden kann. Man sieht hieran auch, dass es eine Konstruktion des 7-Ecks allein mit Zirkel und Lineal nicht geben kann.



Erzeugung des passenden Kreises und Beschreibung:
Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ergibt sich aus:
$1 - 2b = -21 \wedge -2a = -7 \;\; also \;\; b = 11 \wedge a = 3.5$
Siehe Seite zur Quasi-Konstruktion für Gleichungen 3. Grades.
Der Kreis mit dem Mittelpunkt $A = (a,b) = (3.5, 11)$ schneidet also die Normalparabel an den Stellen z, die $Gl\boxed{5}$ erfüllen. Wegen $Gl\boxed{4}$ kann man die um 1 verminderten Werte als Katheten k6 in einem Kreis um D=(1,0) mit dem Radius $r = 6$ deuten.
In diesem Kreis ist dadurch das regelmäßige 7-Eck mit Zirkel, Lineal und Parabelllineal konstruiert.
Weiteres http://haftendorn.uni-lueneburg.de im Bereich Höhere Geometrie.