Quasi-Konstruktionen der Gleichung 3. Grades

Prof. Dr. Dieter Riebesehl, Universität Lüneburg, 8. Februar 2006
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg: Ergänzungen und Ausarbeitung für die Lehre

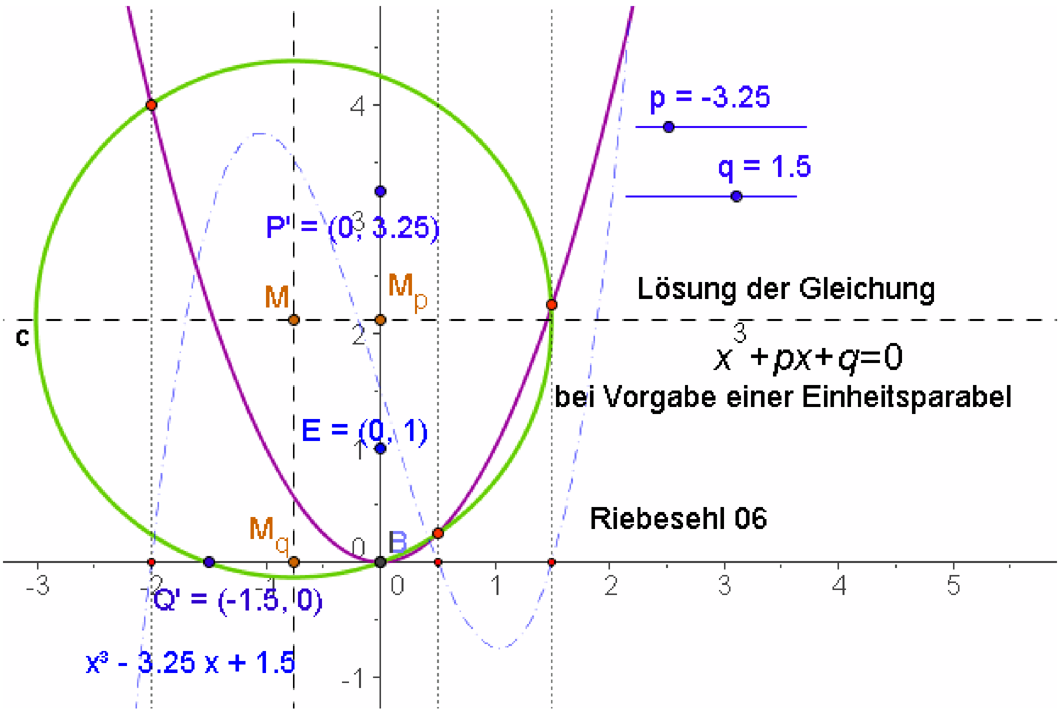
Unter einer Quasikonstruktion verstehen wir eine exakte Konstruktion mit dem erweiterten Werkzeug: Zirkel, Lineal und Parabellineal. Weiteres dazu auf der Extraseite Quasikonstronstruktionen.

Die zu lösende Gleichung 3. Grades sei in der Standardform gegeben.
$x^3 + px + q = 0$ Existert noch ein quadratischer Term muss er durch eine Transformation $z := x - t$ beseitigt werden (siehe Cardano-Seite und 7-Eck-Seite).
Die Idee ist, dass sich die Lösungen ergeben sollen als Schnittstellen der Normalparabel und eines Kreises durch den Ursprung. Erfüllt sein soll also:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 \;\wedge\; y = x^2 \;\Rightarrow\; x^3 + px + q = 0.$$

Einsetzen und Umformen ergibt $x \cdot \left(x^3 + (1-2b)x - 2a \right) = 0$.

Ersichtlich erhält man neben der trivialen Lösung x=0 die gewünschte kubische Gleichung, wenn man $1 - 2b = p \;\wedge\; -2a = q$, also $b = \frac{1+(-p)}{2} \;\wedge\; a = \frac{-q}{2}$ wählt. Der Kreis um $M = (a,b)$ durch den Ursprung schneidet also die Normalparabel an den Lösungsstellen x_1, x_2, x_3. Von diesen muss mindestens eine existieren.
In GeoGebra kann man Kreise und Parabeln konstruktiv zum Schnitt bringen. Daher handelt es sich um exakte Konstruktion mit zusätzlichem „Parabellineal".



Konstruktion:
Gegeben sind p und q. Spiegele P=(0,p) in P'=(0,-p) und Q=(q,0) in Q'=(-q,0). Konstruiere M_p als Mitte von P' und E=(0,1) und konstruiere M_q als Mitte von Q' und (0,0). Konstruiere M aus M_p und M_q mit Senkrechten. Schlage um M den Kreis durch den Ursprung. Zeichne die Normalparabel y=x^2 ein. (Achtung: y=x^2 wirklich eingeben, dann wird die Parabel als Kegelschnitt erkannt.) Nun erzeugt man mit dem Schnitt-Werkzeug die Schnittpunkte von Parabel und Kreis. Die Schnittstellen sind die gesuchten Lösungen.

Als Probe kann man die Funktion (gestrichelt) $f(x) = x^3 + px + q$ einzeichnen und mit dem Befehl Nullstellen[f] bestätigen sich die konstruktiv erzeugten Stellen.
Anmerkung: Mit dem letztgenannten Befehl erzeugt GeoGebra numerische Lösungen, auch das Schnitt-Werkzeug bietet immer nur numerische Lösungen. Es geht aber darum, dass die hier vorgestellten „Quasi-Konstruktionen" mathematisch exakt sind.