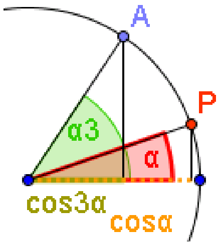
Quasi-Konstruktionen der Winkeldrittelung

Prof. Dr. Dieter Riebesehl, Universität Lüneburg, 8. Februar 2006
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg: Ergänzungen und Ausarbeitung für die Lehre

Unter einer Quasikonstruktion verstehen wir eine exakte Konstruktion mit dem erweiterten Werkzeug: Zirkel, Lineal und Parabellineal. Weiteres dazu auf der Extraseite Quasikonstronstruktionen.



Gegeben ist ein Winkel α_3, der mit Zirkel, Lineal und Parabelineal in drei gleiche Teile geteilt werden soll.

Allein mit Zirkel und Lineal gibt es keine Konstruktion!

Offenbar reicht es, wenn man aus der Strecke $\cos(\alpha_3)$ die Strecke $\cos(\alpha)$ konstruiert.

Dazu schreibt man mit Hilfe der Additionstheoreme $c := \cos(\alpha_3)$ in Termen von $k := \cos(\alpha)$.

$$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha + 2\alpha) =$$
$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha) =$$
$$\cos(\alpha)(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) - \sin(\alpha)2\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$
$$k(k^2 - (1-k^2)) - 2(1-k^2)k =$$
$$k^3 - k + k^3 - 2k + 2k^3 = 4k^3 - 3k$$

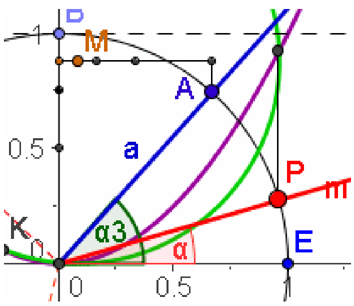
Es folgt:

$$4k^3 - 3k - c = 0$$

$$\boxed{k^3 - \frac{3}{4}k - \frac{c}{4} = 0}$$

An dieser Gleichung 3. Grades sieht man, dass die Konstruktion mit Zirkel und Lineal allein nicht klappen kann, denn tiefsinnige Sätze der Algebra zeigen, dass man damit nur Gleichungen lösen kann, die auf Quadratwurzeln und allenfalls geschachtelte Quadratwurzeln führen.

Auf der Seite „Quasi-Konstruktion für Gleichungen 3. Grades" werden Lösungen durch den Schnitt von Kreis und Normalparabel erzeugt. Im Vergleich mit der Standard-Cardano-Form der Gleichung 3. Grades $x^3 + px + q = 0$ muss mit $p = -\frac{3}{4};\ q = -\frac{c}{4}$ der Mittelpunkt $M = (a,b)$ des Konstruktionskreises bei $a = -\frac{q}{2} = \frac{c}{8};\ b = \frac{1}{2}(1 + (-p)) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}$ sein.



In der GeoGebra-Datei ist die Größe von α_3 frei wählbar. Es Ergibt sich A als Schnitt mit dem Einheitskreis. Ein Achtel der Abszisse von A und die Ordinate Sieben-Achtel werden zur Konstruktion von M durch dreimaliges Halbieren gewonnen. Der Kreis um M durch den Ursprung schneidet die Normalparabel in einem Punkt, dessen Abszisse $k = \cos(\alpha)$ die gesuchte Lösung ist. Mit ihr wird auf dem Einheitskreis der **Punkt P und damit der Drittel-Winkel erzeugt.**

Anmerkung: Das Schnitt-Werkzeug von GeoGebra und aller DGS bietet immer nur numerische Lösungen. Es geht aber darum, dass die hier vorgestellten „Quasi-Konstruktionen" mathematisch exakt sind.