Quasi-Konstruktionen der Würfel-Verdoppelung

Prof. Dr. Dieter Riebesehl, Universität Lüneburg, 8. Februar 2006
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg: Ergänzungen und Ausarbeitung für die Lehre

Unter einer Quasikonstruktion verstehen wir eine exakte Konstruktion mit dem erweiterten Werkzeug: Zirkel, Lineal und Parabellineal. Weiteres dazu auf der Extraseite Quasikonstronstruktionen.

In der Antike fagten die Delier das Orakel von Delphi wie Sie die Pest abwehren könnten. Ihnen wurde die Aufgabe gestellt, den würfelförmigen Altar des Tempels zu verdoppeln. Seitdem gibt es das „Delische Problem“: Konstruiere mit Methoden der Geometrie die Kantenlänge eines Würfels mit dem Volumen 2. Es gelang den Deliern nicht und seit dem 19. Jh. weiss man, dass es allein mit Zirkel und Lineal nicht gehen kann.
Sie auch „unlösbare Probleme der Antike“.
Hier wird nun eine „Quasi-Konstruktion“ mit zusätzlichem Einsatz eine Parabellineals vorgestellt. Die gesuchte Kantenlänge ist die Lösung der Gleichung $x^3 = 2$, also ist eine Gleichung 3. Grades zu lösen. Das ist auf der Seite „Quasi-Konstruktion für Gleichungen 3. Grades allgemein hergeleitet und könnte hier verwendet werden.
Damit man an diese Stelle auch beginnen kann, wird mit demselben Grundgedanken neu hergeleitet:

Die Idee ist, dass sich die Lösungen ergeben sollen als Schnittstellen der Normalparabel und eines Kreises durch den Ursprung. Erfüllt sein soll also

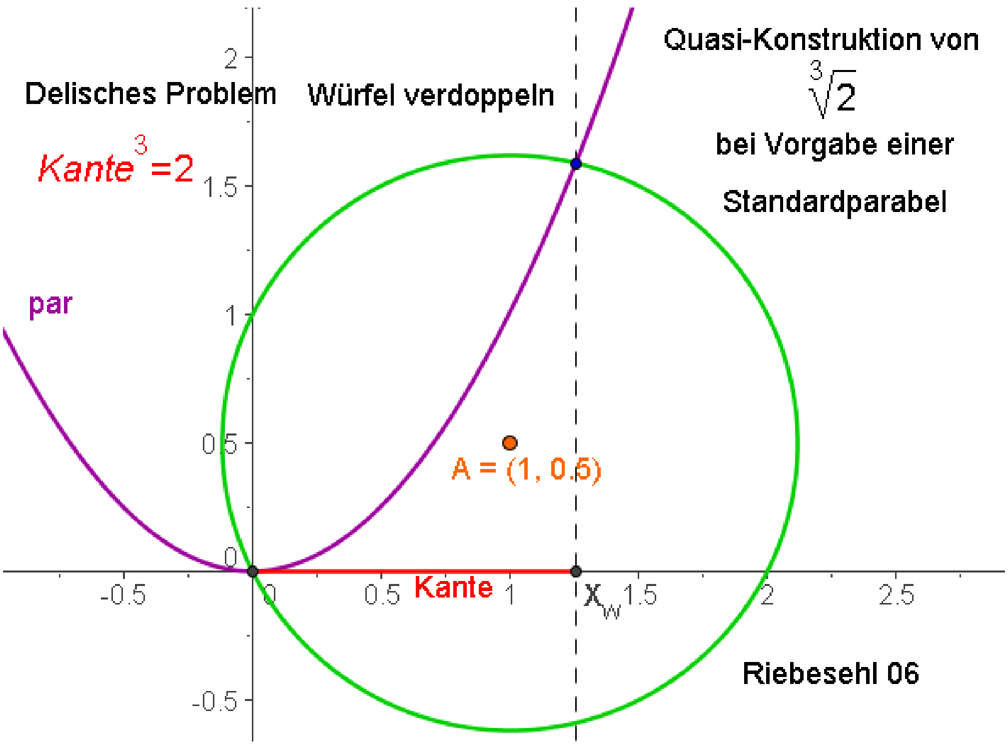
$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 + b^2 \ \wedge y = x^2 \Rightarrow x^3 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2a\,x + x^4 - 2b\,x^2 = 0 \Rightarrow x^3 - 2 = 0$$

$$x\left(x^3 + (1-2b)x - 2a\right) \Rightarrow x^3 - 2 = 0$$

Das wird gelöst von

$$1-2b = 0 \wedge -2a = -2 \quad also \quad b = \frac{1}{2} \wedge a = 1$$



Beschreibung: Zeichne die Normal-Parabel und den Kreis um A=(1,0.5) und bringe sie zum Schnitt. (0,0) ist trivial, der andere hat als Abszisse die gesuchte Kantenlänge.