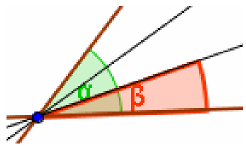
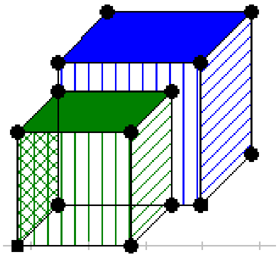
Quasi-Konstruktionen Zirkel, Lineal, Parabellineal

Prof. Dr. Dieter Riebesehl, Universität Lüneburg, 1. Februar 2006
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg: Ergänzungen und Ausarbeitung für die Lehre

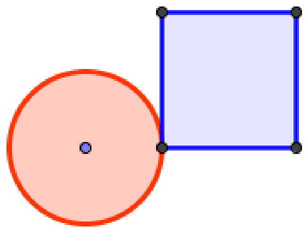


Mit „strengen Konstruktionen“, gemeint ist „mit Zirkel und Lineal“, kann man einen allgemeinen Winkel nicht dritteln, den Würfel nicht verdoppeln, 7-Eck, 9-Eck und viele andere nicht konstruieren und den nicht Kreis quadrieren. Es handelt sich um die klassischen unlösbaren Probleme der Antike. Dass sie aber wirklich unlösbar sind, lässt sich mit algebraischen Methoden beweisen und das gelang erst ab dem 19. Jh. Der Kern der Beweise liegt darin, dass sich mit Zirkel und Lineal allenfalls Probleme lösen lassen, die auf Quardratwurzeln oder endliche Schachtelungen von Quadratwurzeln führen.
Bei der Kreisquadrierung muss π erscheinen und π lässt sich als transzendente Zahl sicher nicht konstrieren (Beweis von Lindemann 1882)



Die ersten drei Probleme führen auf Gleichungen 3. Grades, deren Lösungen sind dritte Wurzeln und damit nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

$$x^3 + px + q = 0$$



Hier wird nun vorgestellt, wie man durch Hinzunahme eines Parabellineals –also einer Schablone für den Graph der Normalparabel- Quasi-Konstruktionen zur Lösung der allgemeinen Gleichung 3. Grades durchführen kann. Die Parabelschablone ist dabei am Computer realisiert durch die Normalparabel als Kegelschnitt, die sich in GeoGebra mit anderen Kegelschnitten, hier Kreis und Gerade zum Schnitt bringen lässt.
Die so gewonnenen Lösungspunkte lassen sich beliebig weiter verwenden und sie sind mathematisch exakt wie bei den üblichen Zirkel-Lineal-Konstruktionen auch. Daher sprechen wir von einer Quasi-Konstruktion. Sie unterscheidet sich fundamental von Konstrunktion mit „Einpassung“ und von Näherungslösungen.

Als Folge der Lösung von Gleichungen 3. Grades mit Zirkel, Lineal und Parabellineal lassen sich auch für Winkeldrittelung, Würfelvedoppelung, 7-Eck und 9-Eck Quasi-Konstruktionen finden, die wir auch hier vorstellen. Dass sich dieses dann auf 14-Eck 28-Eck....sowie 18-Eck, 36-Eck.... fortpflanzt ist klar. Durch die Winkeldrittelung als Quasi-Konstruktion kann man dann aber auch alle Dreierpotenzen der bisherigen konstruierbaren n-Ecke quasi-konstruieren. Während es für n<300 nur 34 streng-konstruierbare n-Ecke gibt, sind es dazu nun noch 41 zusätzliche quasi-konstruierbare n-Ecke, die mit diesen Erkenntinissen entstehen. Es bleibt zu forschen, ob es noch weitere quasi-konstruierbare n-Ecke gibt.