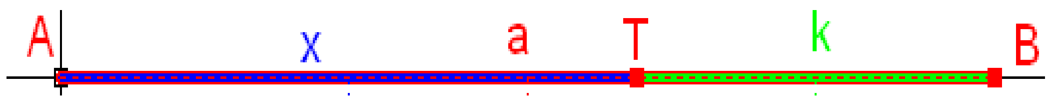
Geometrie: Goldener Schnitt

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, Jan 2005

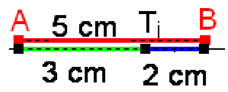


Man sagt:
T teilt AB im goldenen Schnitt, wenn sich der größere Teil AT zum Ganzen AB verhält wie der kleinere Teil TB zum größeren Teil AT.
Also x:a=k:x.
Man sagt auch T teilt AB im Verhältnis AT:TB=x:k=

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1,6183...=\Phi$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \Phi=\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\ \Phi=\varphi+1=1,618034\end{array}}$$

Φ ist also das Teilungs-Verhältnis im üblichen Sinne: T teilt AB im Verhältnis 3:2 im Bild rechts.



φ ist der Anteil von AT in AB

AT heißt “Major”, TB heißt “Minor”

Φ ist das Verhältnis Major : Minor.

Konstruktion: Gegeben ist a.
Gesucht ist der Teilungspunkt T.
Man richtet zuerst die Hälfte von a senkrecht auf.
Weiter wie gezeigt.

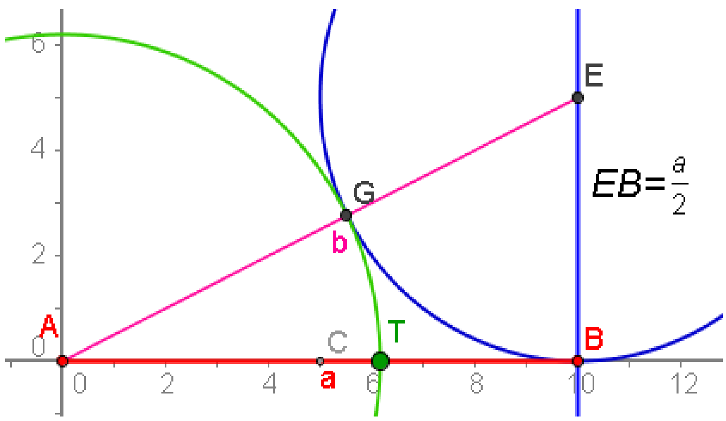
Berechnung:
O.B.d.A. sei a=1, dann ist k=1-x. Es folgt:

$$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x} \Leftrightarrow x^2=1-x \Leftrightarrow$$

$$x^2+x+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=1+\tfrac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0,618034$$

Konstruktion:



Beweis:

$$AE^2=a^2+\left(\tfrac{a}{2}\right)^2=\tfrac{5}{4}a^2$$

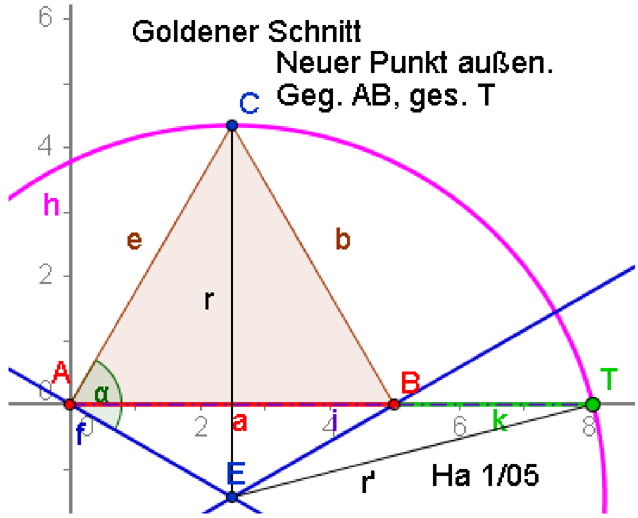
$$AT=AG=AE-\tfrac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

Beweis: Nach Konstruktion $a=e=b$ und rechte Winkel bei A und B. Daher gilt der Kathetensatz. $b^2=r\cdot h$ .Also

$a^2=b^2=r\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot a$ also $r=\frac{2}{\sqrt{3}}a=r'$,

$$(k+\tfrac{a}{2})^2=r'^2-EF^2=\tfrac{4}{3}a^2-\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2a^2$$

$$k=\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}-\tfrac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a\Rightarrow\frac{a}{k}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{a+k}{a}$$



B teilt nun AT im Goldenen Schnitt

Weitere Besonderheit:

$$\Phi^2=1+\Phi$$

$$\varphi^2=1-\varphi$$