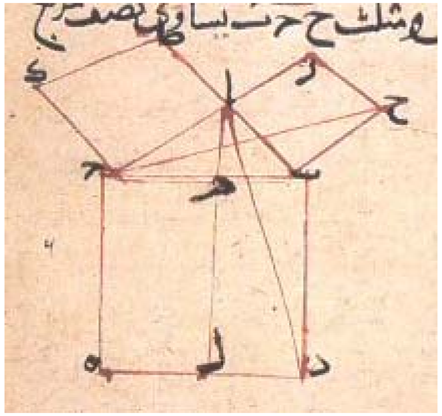
Mathematik hat Geschichte



Teil 4

Griechen

Pythagoras

Griechische Zahlschreibweise

Euklid

Archimedes

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Leuphana Universität www.mathematik-verstehen.de

Zahlen bei den Griechen 500-100vChr.

Die Zahlenschreibweise der Griechen um 500 v. u. Z.

Die Griechen symbolisierten seit etwa 500 v. u. Z. jede natürliche Zahl von 1 bis 9 durch die ersten neun Buchstaben des griechischen Alphabets. Durch die nächsten neun Buchstaben wurden die Zehner von 10 bis 90, die Hunderter von 100 bis 900 durch die letzten neun Buchstaben dargestellt. Sie sparten im Vergleich zu den Ägyptern und Römern viel Platz ein.

Alpha	α:	1	Iota	ι:	10	Rho	ϱ:	100
Beta	β:	2	Kappa	$\varkappa$:	20	Sigma	σ:	200
Gamma	γ:	3	Lambda	λ:	30	Tau	τ:	300
Delta	δ:	4	My	μ:	40	Ypsilon	υ:	400
Epsilon	ε:	5	Ny	ν:	50	Phi	φ:	500
Vau	Ϝ:	6	Xi	ξ:	60	Chi	χ:	600
Zeta	ζ:	7	Omikron	o:	70	Psi	ψ:	700
Eta	η:	8	Pi	π:	80	Omega	ω:	800
Theta	ϑ:	9	Koppa	ϙ:	90	Sampi	ϡ:	900

,α = 1 000 ,β = 2 000 usw.

Beispiele: 222: $\sigma\varkappa\beta$ *404:* $\upsilon\delta$ *440:* $\upsilon\mu$ *1111:* ,$\alpha\varrho\iota\alpha$ usw.

→ = nicht griechisch

Zahlen bei den Griechen 500-100vChr.

d) Buchstaben als Zahlen

Die Griechen benutzen Buchstaben als Zahlzeichen *(um 500 v. Chr.)*

Die Griechen hatten eigene Zahlzeichen, also Ziffern, für die Zahlen von 1 bis 9, und zwar verwendeten sie die ersten Buchstaben des Alphabets einschließlich des altertümlichen Buchstabens »Vau« für die Zahl 6:

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Diese Schreibweise ist unserer schon ziemlich ähnlich. Der nächste Schritt zum Stellenwertsystem wurde aber von den Griechen noch nicht getan. Für die Zahlen 10, 20, 30 usw. wurden nicht die gleichen Zahlzeichen mit einem Zusatzzeichen – also der Null – verwendet, sondern man führte neue Zeichen ein, nämlich die nächsten 9 Buchstaben des Alphabets, wieder um einen altertümlichen Buchstaben (Koppa für die Zahl 90) vermehrt:

ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Für die Zahlen 100, 200, 300 bis 900 schließlich kam der Rest des Alphabets und der Buchstabe Sampi (für 900) dran:

ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

* Veröffentlicht in: K. Vogel „Vorgriechische Mathematik. II, Paderborn 1959

Zahlen bei den Griechen 500-100vChr.

Erst für die Tausender benützte man wieder die gleichen Zeichen wie für die Einer, setzte aber zur Unterscheidung einen Strich vor den Buchstaben:

$$\begin{array}{cccc} ,\alpha, & ,\beta, & ,\gamma, & \ldots \\ 1000, & 2000, & 3000, & \ldots \end{array}$$

Noch größere Zahlen wurden in Zehntausender und einen Rest zerlegt. So stellte man z. B. die Zahl

320 581 bzw. $32 \cdot 10000 + 581$ als

$\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}\ \overline{\varphi\pi\alpha}$ dar, wobei $\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}$ 32 Zehntausender und $\overline{\varphi\pi\alpha}$ 581 bedeutet (der Strich über $\varphi\pi\alpha$ wurde zur besseren Unterscheidung der Zahlen von den Wörtern geschrieben).

Gerechnet hat man in der griechischen Zahlenschreibweise ähnlich wie in unserer. Als Beispiel dient eine Aufgabe von Eutokios von Askalon (um 500), bei der die Zahl 265 mit sich selbst multipliziert wird.

Pythagoras - 580-500vChr.

Pythagoras von Samos, Philosoph, geb. um 580 v.Chr. Samos, gest. um 500 v.Chr. Metapontum (Unteritalien).

Pythagoras - 580-500vChr.

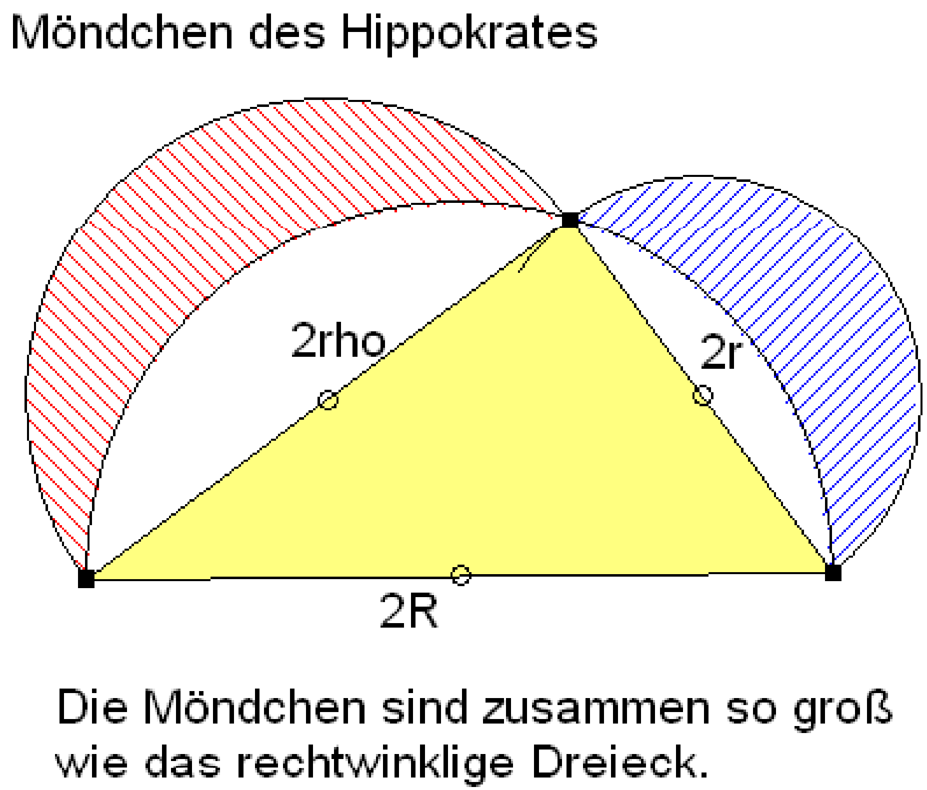
Pythagoras - 580-500vChr.

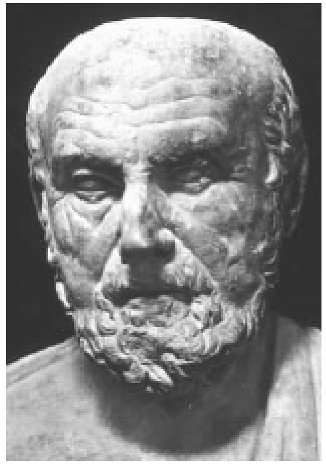
Aufgaben 22

Bild 12
Pythagoras als Musiker, Holzschnitt aus »Theorica Musicae« von F. Gafarius, Milano (Mailand) 1492. Die Pythagoreer beschäftigten sich mit der Akustik. Durch Experimente entwickelten sie das sogenannte Monocord, ein einsaitiges Instrument. Mit ihm konnten sie Töne erzeugen. Die Pythagoreer bevorzugten besonders das Spiel in Quinten und entwickelten ein sogenanntes pythagoreisches Quintensystem. Auf unserem Bild wird darauf hingewiesen.

7

Hippokrates 470-410 v.Chr.



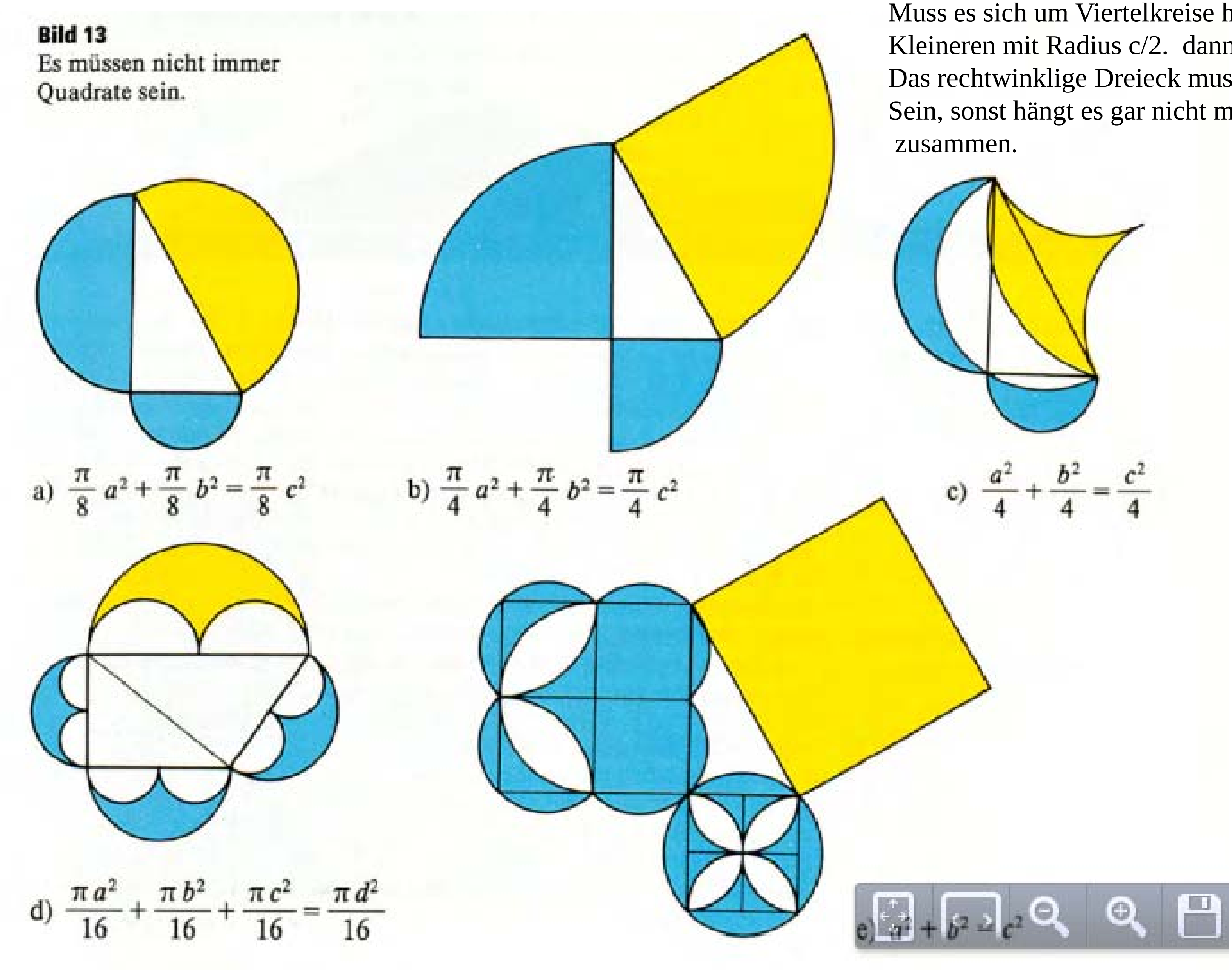


Hippokrates führte viele neue Arbeitsmethoden sein, so z. B. das Zurückführen von Problemen auf einfachere, bekannte.

Web

Kreisformen

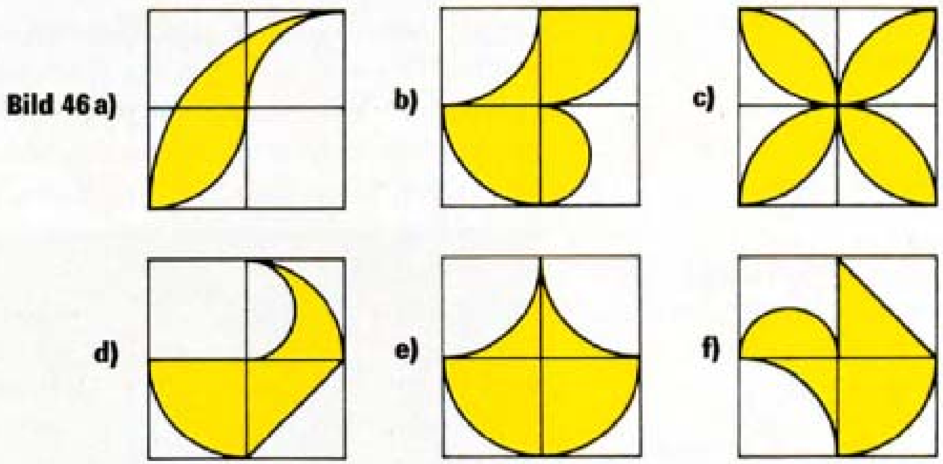
Diese Figur ist nur unter viel strengeren Vorgaben sinnvoll: bei den gelben Bögen Muss es sich um Viertelkreise handeln, die Kleineren mit Radius c/2. dann ist gelb=c^2/4 Das rechtwinklige Dreieck muss gleichschenklig Sein, sonst hängt es gar nicht mit der gelben Fläche zusammen.



Web

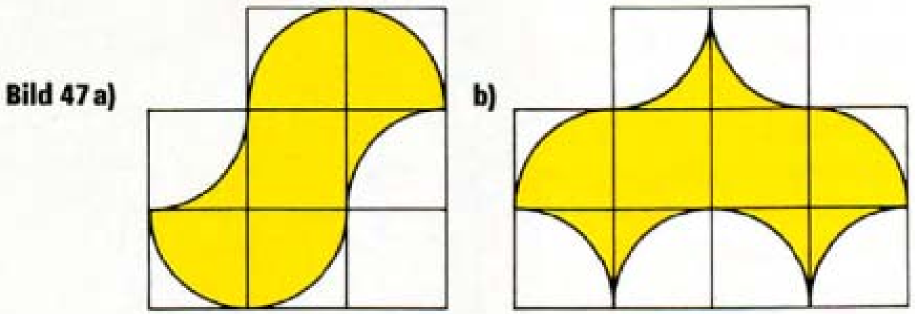
Kreisformen

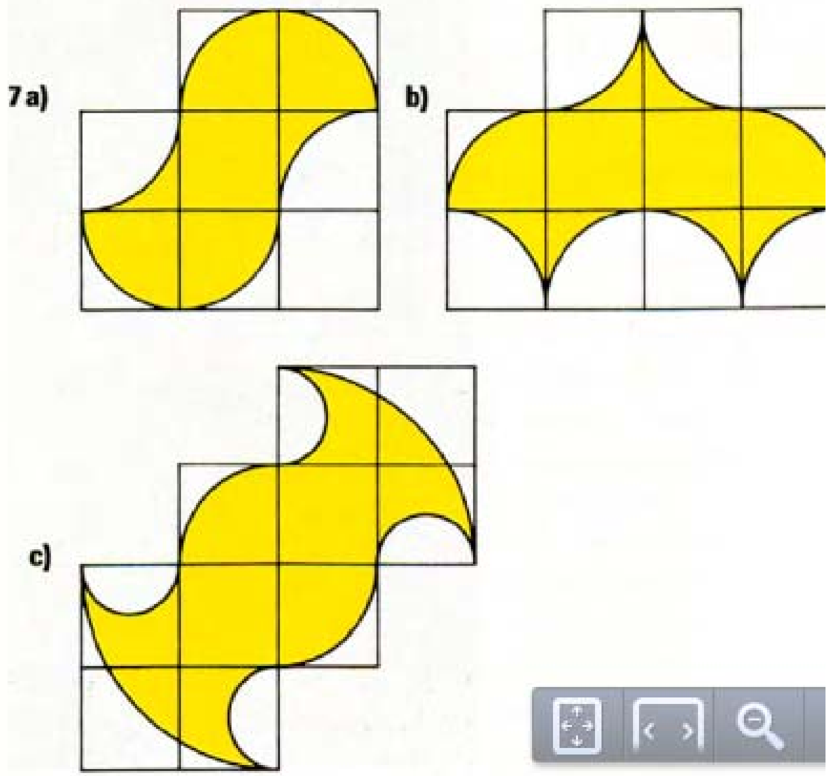
Die gelben Flächen sind durch die Seitenlänge a eines kleinen Quadrates auszudrücken.



9. Jedes der kleinen Quadrate der drei abgebildeten Figuren (s. Bilder 47 a) bis c)) hat die Seitenlänge $a = 1$ cm.

Es ist der Flächeninhalt jeder der drei gelben Flächen zu berechnen.

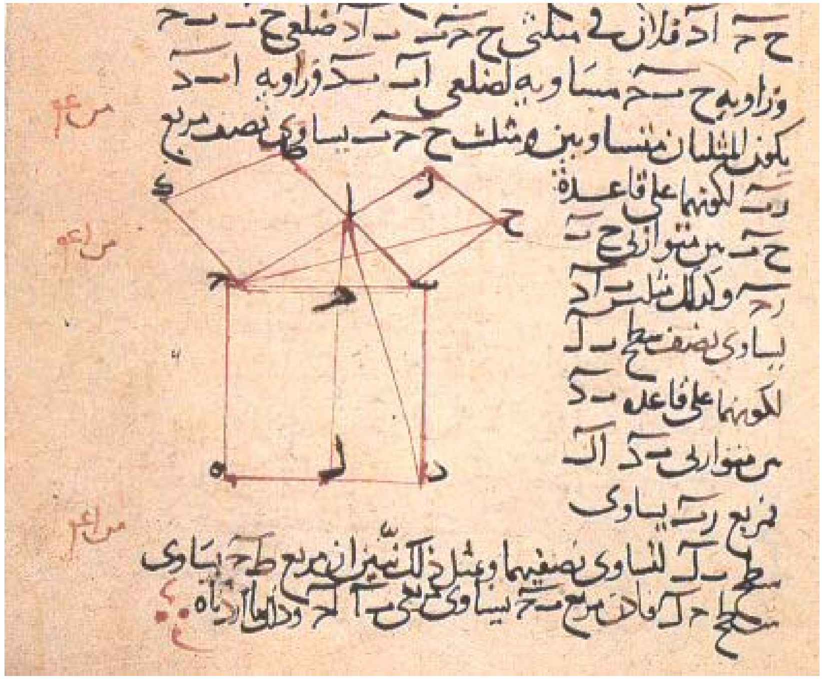




Web

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Euklid in Arabien



Euklid in der alten Welt

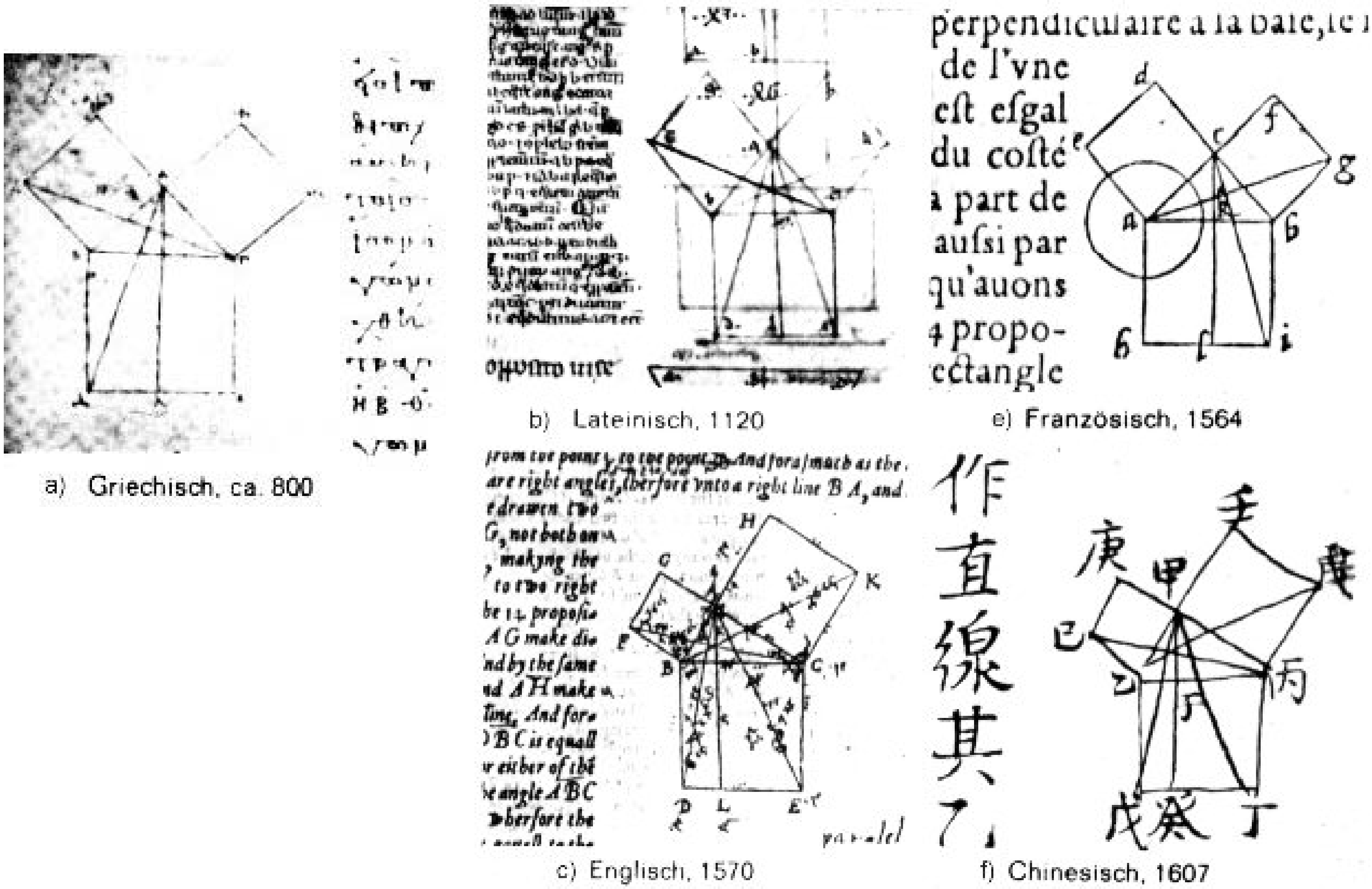
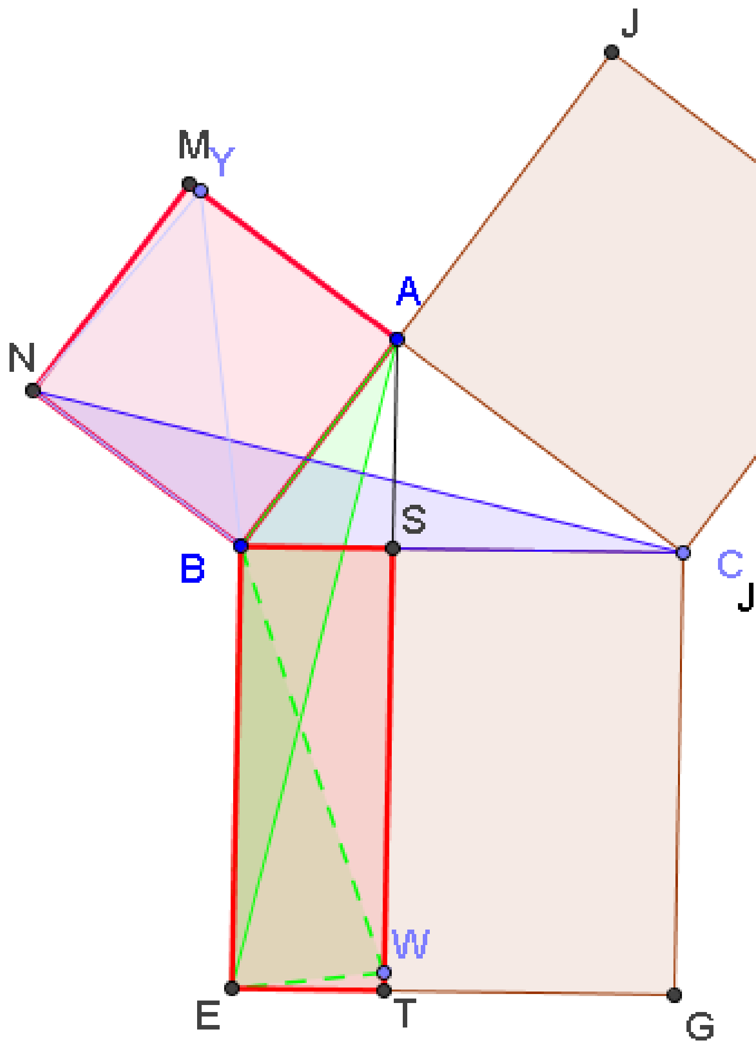


Abb. 2.3.4 Die gleiche Figur in verschiedenen Ausgaben der „Elemente“
[a) Ms.Vat.grec.204; b) Adelhard von Bath; c) Billingsley, London 1570;
d) sog. Pseudo-Tusi; e) Forcadel, Paris 1564; f) Ricci]

Euklids Beweis des Kathetensatzes



Kathetensatz des Euklid

Überlege:
Dreieck BCN kongruent Dreieck BEA
Ziehe Y auf M oder C.
Ziehe W auf A oder T.

Scherungen sind flächentreu
Jedes grüne Dr. ist flächengleich jedem blauen.

Also ist das Kathetenquadrat
flächengleich
dem Rechteck aus Hypothenuse
und Hypothenusenabschnitt.

Macht man dieses auch für die andes Seite,
folgt der Satz des Pythagoras

Interaktiv in GeoGebra | Web

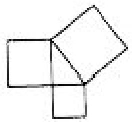
Euklid von Alexandria - 300vChr.

OSTWALDS KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Band 235

Reprint der Bände 235, 236, 240, 241 und 243

Die Elemente

Bücher I - XIII



von
Euklid

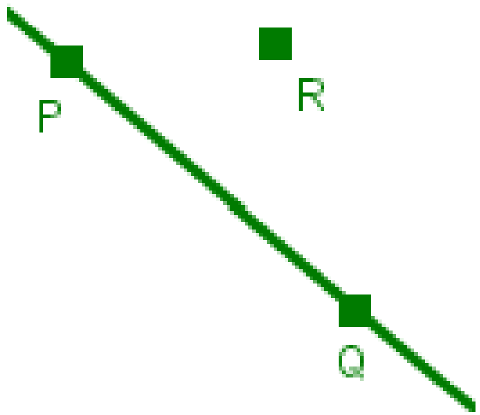
Verlag Harri Deutsch

aus dem Griechischen übersetzt
und herausgegeben von
Clemens Thaer
mit einemVorwort von
W. Trageser

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Definitionen:

1. *Was keine Teile hat, ist ein Punkt.*
2. *Eine Länge ohne Breite ist eine Linie.*
3. *Die Enden einer Linie sind Punkte.*
4. *Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.*
5. *Was nur Länge und Breite hat, ist eine Fläche.*



Text aus
Lexikon der
Mathematik
Spektrum

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Axiome:

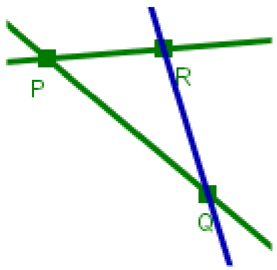
1. *Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind einander gleich.*
2. *Fügt man zu Gleichem Gleiches hinzu, so sind die Summen gleich.*
3. *Nimmt man von Gleichem Gleiches hinweg, sind die Reste gleich.*
4. *Was zur Deckung miteinander gebracht werden kann, ist einander gleich.*
5. *Das Ganze ist größer als sein Teil.*

Text aus
Lexikon der
Mathematik
Spektrum

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Postulate:

1. *Es soll gefordert werden, daß sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.*
2. *Ferner, daß sich eine begrenzte gerade Linie stetig in gerader Linie verlängern lasse.*
3. *Ferner, daß sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.*
4. *Ferner, daß alle rechten Winkel einander gleich seien.*



Web

Text aus Lexikon der Mathematik Spektrum

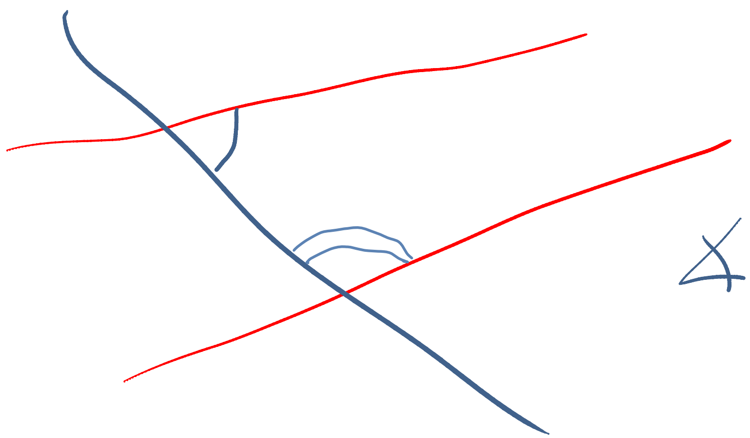
Euklid von Alexandria - 300vChr.

5. (Parallelenpostulat) *Endlich, wenn eine gerade Linie zwei gerade Linien trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden geraden Linien, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.*

Text aus Lexikon der Mathematik Spektrum

Euklid von Alexandria - 300vChr.

5. (Parallelenpostulat) *Endlich, wenn eine gerade Linie zwei gerade Linien trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden geraden Linien, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.*



$\measuredangle + \measuredangle < 180^\circ$

$\Rightarrow$ Schnitt rechts

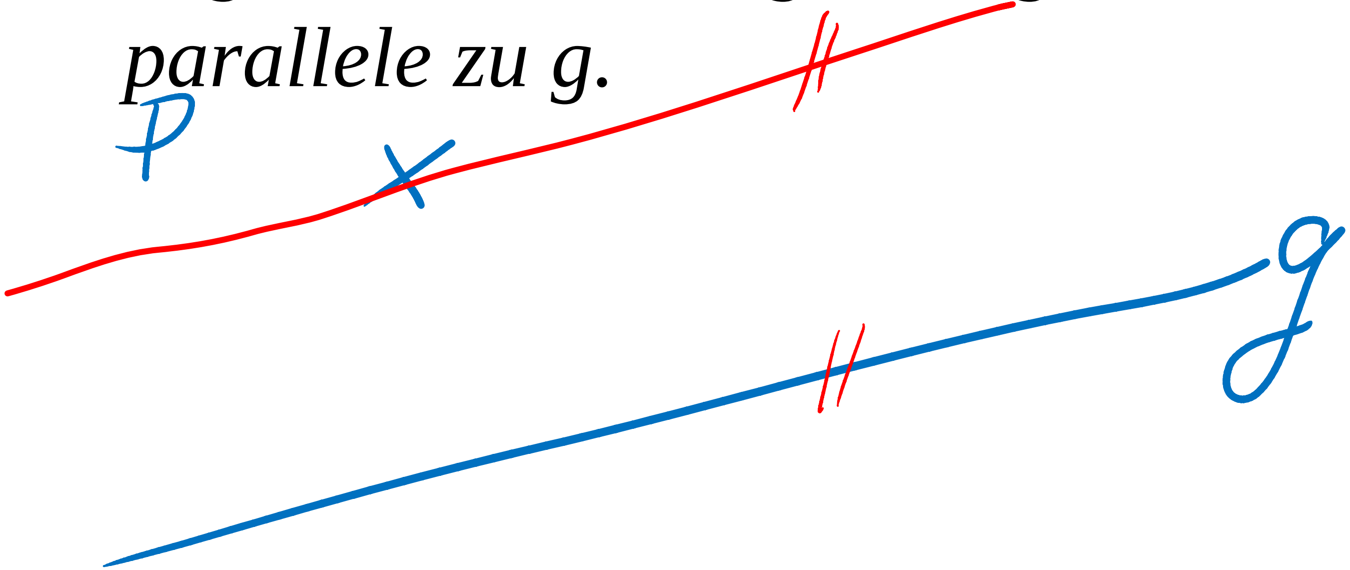
Text aus Lexikon der Mathematik Spektrum

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Def.: Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben. $\parallel$

5. (Parallelenpostulat) *Heutige Formulierung*

Zu einer Geraden g und einem außerhalb liegenden Punkt P gibt es genau eine parallele zu g.

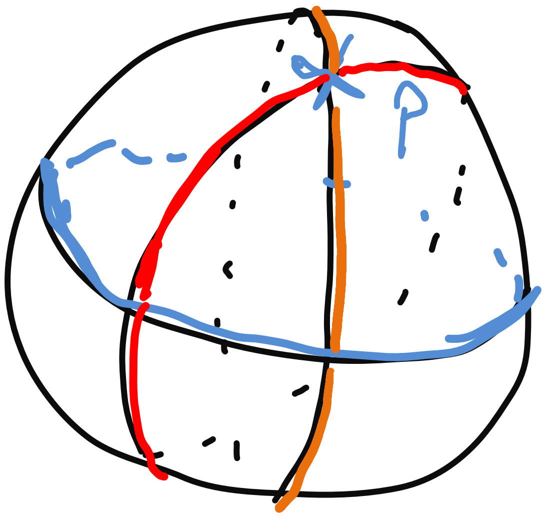


Euklid von Alexandria - 300vChr.

Def.: Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben.

Elliptische nicht-euklidische Geometrie

Zu einer Geraden g und einem außerhalb liegenden Punkt P gibt keine Parallele zu g.



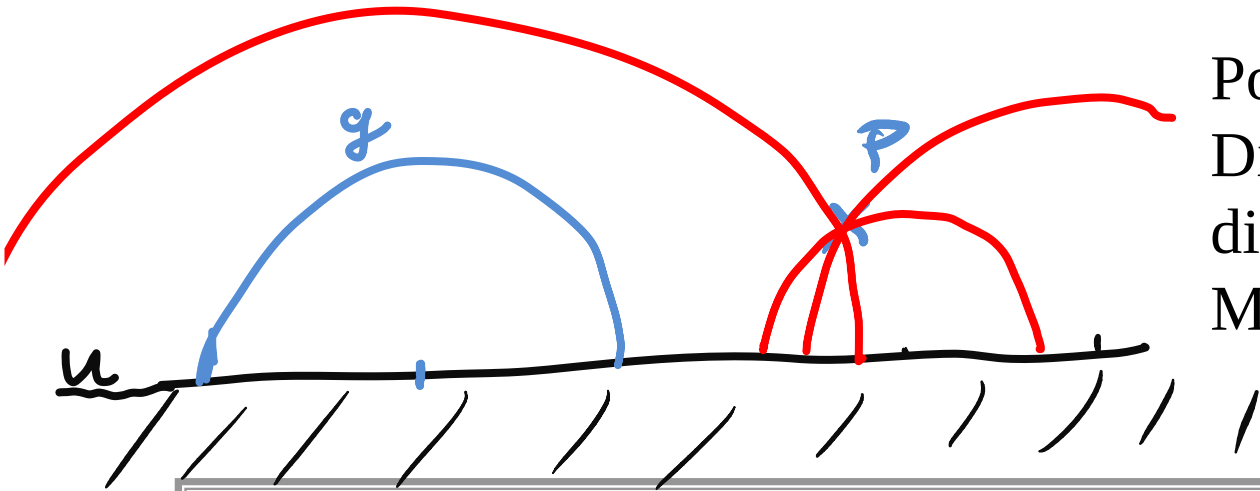
Kugelgeometrie:
Die „Geraden“ sind die Großkreise

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Def.: Zwei Geraden heißen *parallel in E*, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt in E haben. //

Hyperbolische nicht-euklidische Geometrie

Zu einer Geraden g und einem außerhalb liegenden Punkt P gibt viele Parallelen zu g.



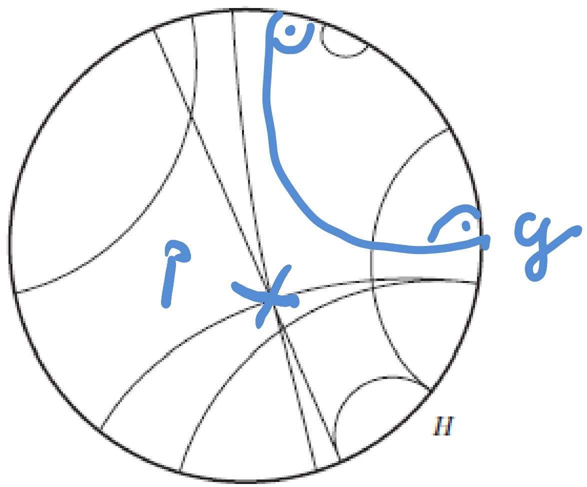
Poincaré-Modell
Die „Geraden“ sind die Halbkreise mit Mittelpunkt auf u.

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Def.: Zwei Geraden heißen *parallel in E*, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt in E haben.

Hyperbolische nicht-euklidische Geometrie

Zu einer Geraden g und einem außerhalb liegenden Punkt P gibt viele Parallelen zu g.



Hyperbolische Geraden in der Poincaré-Kreisscheibe

Poincaré-Modell
Die „Geraden“ sind die Halbkreise mit Mittelpunkt auf u.

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Diese Definitionen, Axiome und Postulate halten heutigen Anforderungen an logische Korrektheit nicht mehr stand. Zum einen erweist sich die Trennung nach Axiomen und Postulaten als nicht sinnvoll. Die Axiome erhalten nämlich nur dann eine Relevanz für die Geometrie, wenn konkrete geometrische Begriffe eingesetzt werden. Dann handelt es sich aber wiederum um geometrische Aussagen, also im Sinne Euklids um Postulate. In neueren Arbeiten wird daher nicht mehr zwischen Axiomen und Postulaten unterschieden, sondern nur von Axiomen gesprochen, worunter alle unbewiesenen Grundaussagen verstanden werden.

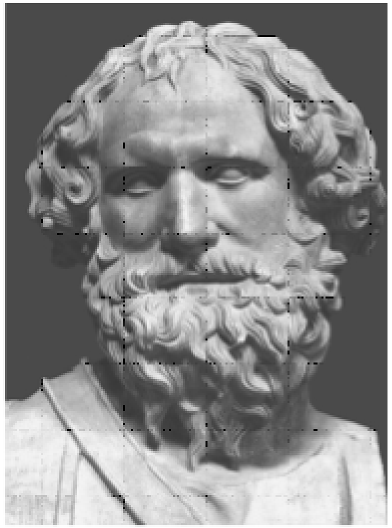
Text aus Lexikon der Mathematik Spektrum

Euklid von Alexandria - 300vChr.

Vor allem jedoch genügen die von Euklid gegebenen „Erklärungen“ nicht den logischen Ansprüchen an Definitionen. Vielmehr ist es unmöglich, alle auftretenden Objekte und Relationen zu definieren, da Definitionen nur auf Grundlage bereits bekannter Begriffe möglich sind. Einige grundlegende Begriffe (wie z. B. Punkt, Gerade usw.) müssen also als undefinierte Grundbegriffe an den Anfang gestellt werden. Ein logisch völlig korrekter axiomatischen Aufbau der Geometrie wurde von David Hilbert gegen Ende des 19. Jahrhunderts vorgestellt (®Axiome der Geometrie).

Text aus Lexikon der Mathematik Spektrum

Archimedes von Syrakus - 287-212 vChr.



Archimedes von Syrakus

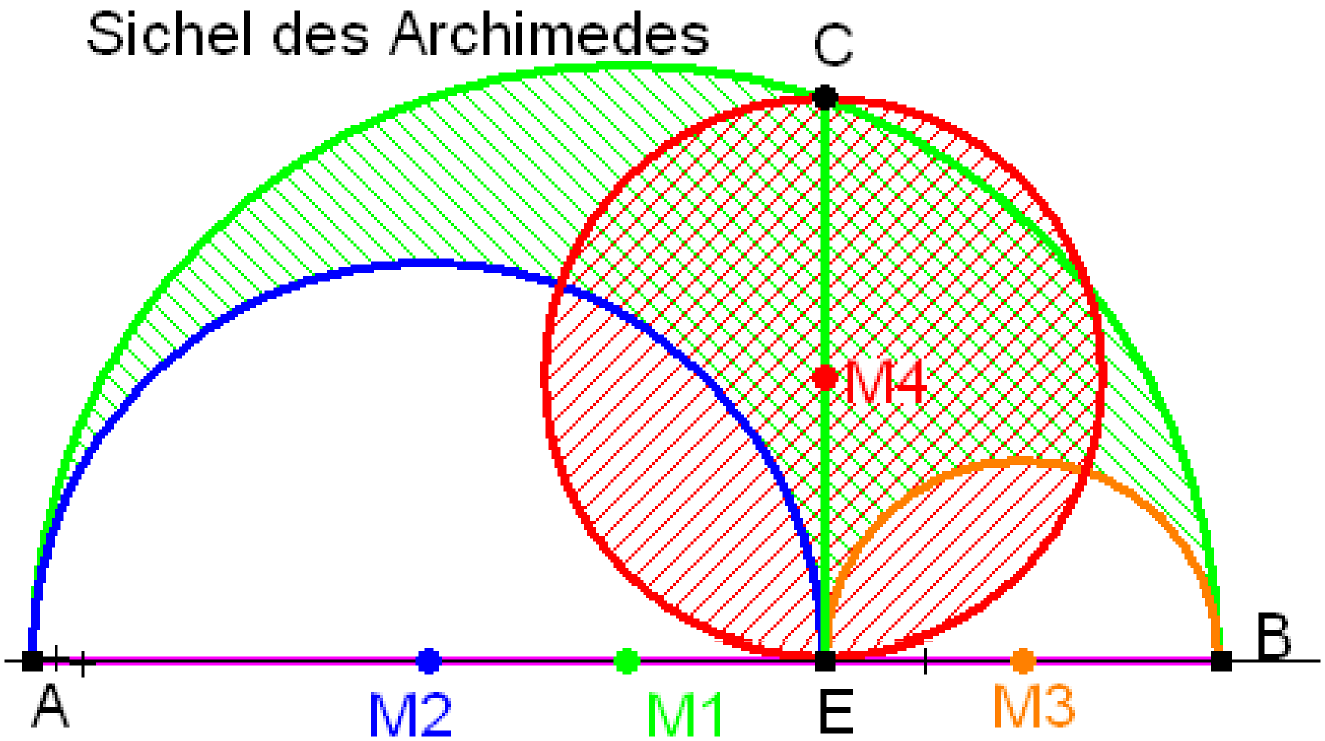
Die überragende wissenschaftliche Bedeutung des Archimedes ist durch die gesamte Wissenschaftsgeschichte seit der Antike niemals bestritten, oft sogar ins Phantastische überhöht worden und noch heute in Anekdoten lebendig.

Bereits im 5./6. Jh. wurden die ersten Ausgaben der Werke des Archimedes editiert. Die heutigen Textkenntnisse gehen verweisend auf Werkausgaben des 9./10. Jh. und auf lateinische und arabische Übersetzungen des Mittelalters zurück.

Einen Höhepunkt erlebte die Archimedes-Rezeption im 15./16. Jh. . Werke des Archimedes wurden jetzt ins Deutsche, Englische und Französische übersetzt. Sein Einfluss auf Kepler, Galilei und Torricelli ist unverkennbar.

Text aus Lexikon der Mathematik Spektrum

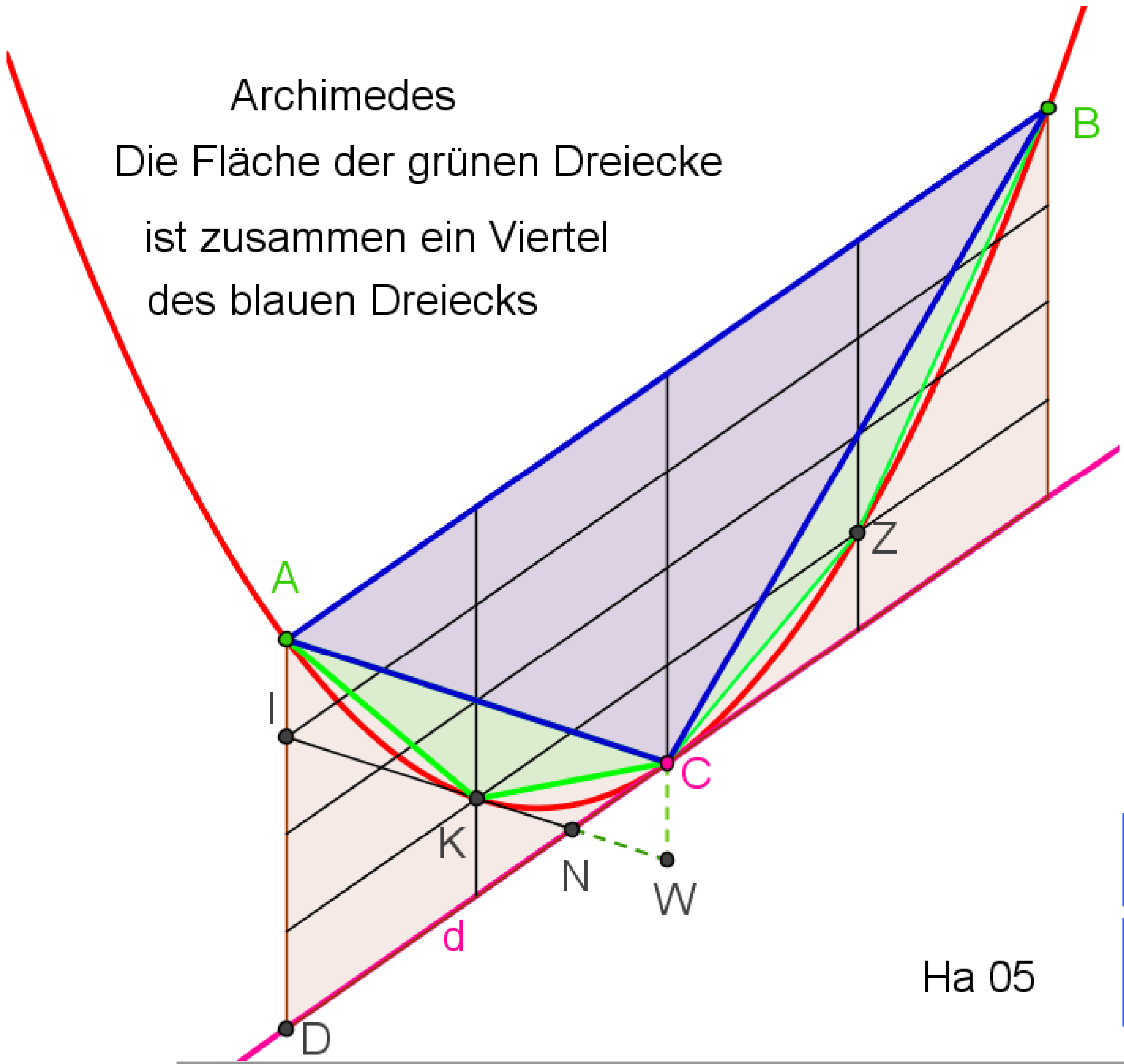
Archimedes von Syrakus 287-212 v.Chr.



Beh.: Die Fläche des roten Kreises ist
so groß wie die Fläche der Sichel (AEBC)

Interaktiv in Euklid-Dynageo | Web

Archimedes Quadratur der Parabel



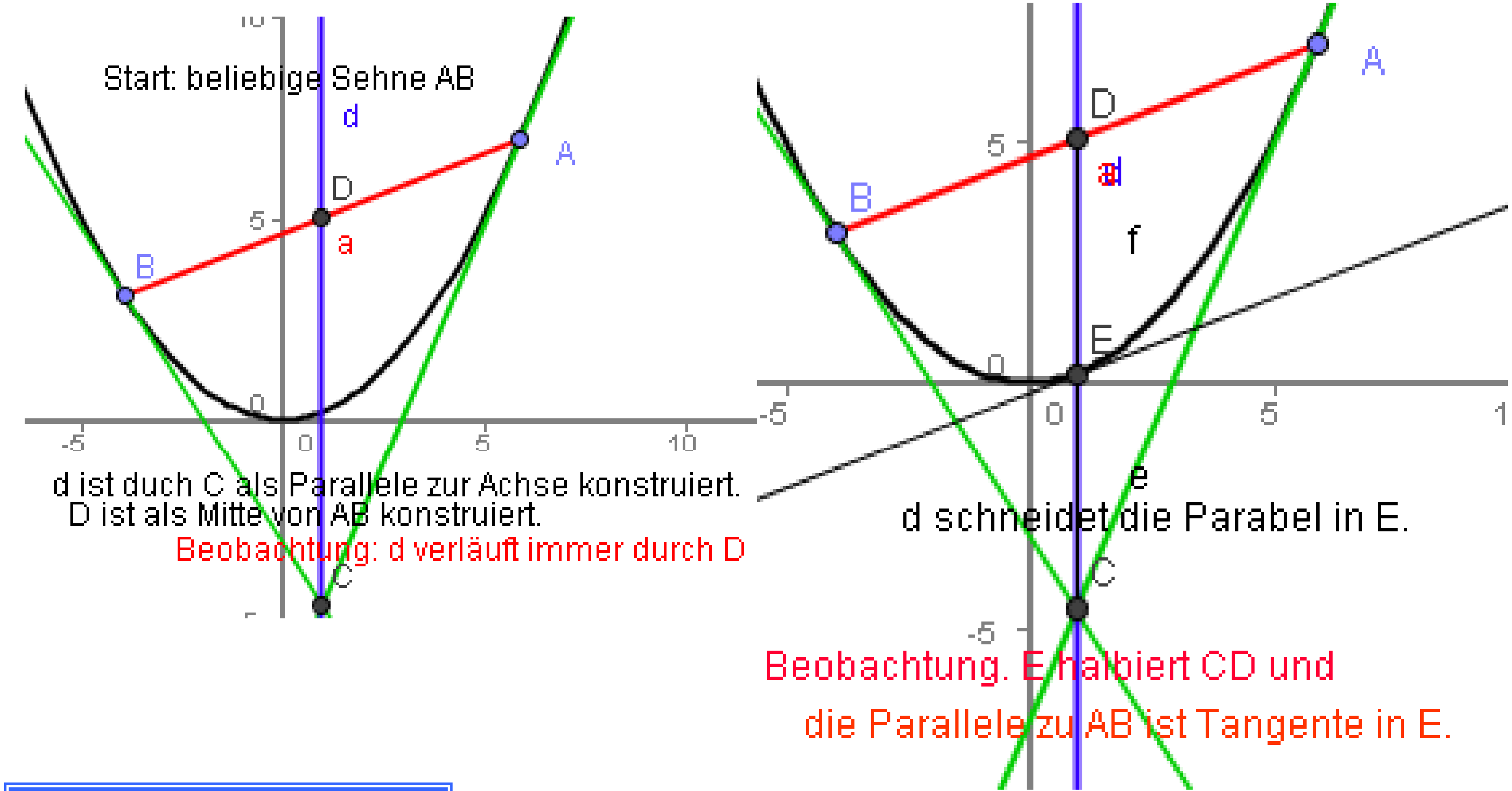
Hier macht Archimedes
Den entscheidenden Schritt:
Er beginnt die Reste bis zur
Parabel mit weiteren solchen
Dreiecken auszuschöpfen.

Web

GeoGebra archimedes-kasten.ggb

Parabeln im Bärenkasten

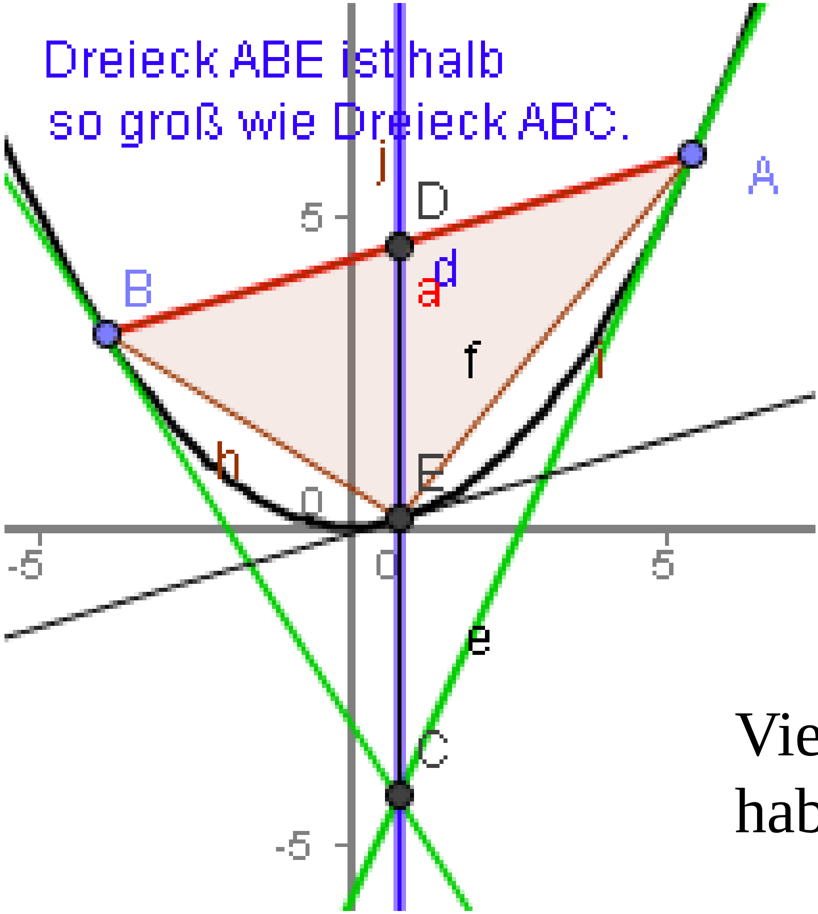
Archimedes Quadratur der Parabel

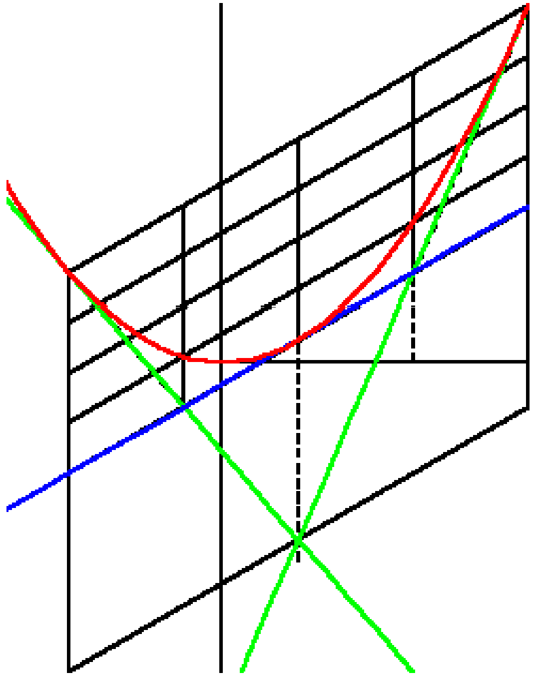


GeoGebra archi1.ggb

GeoGebra archi2.ggb | Web

Archimedes Quadratur der Parabel





Viele dieser Ergebnisse
haben hier schon lange ihren Platz.

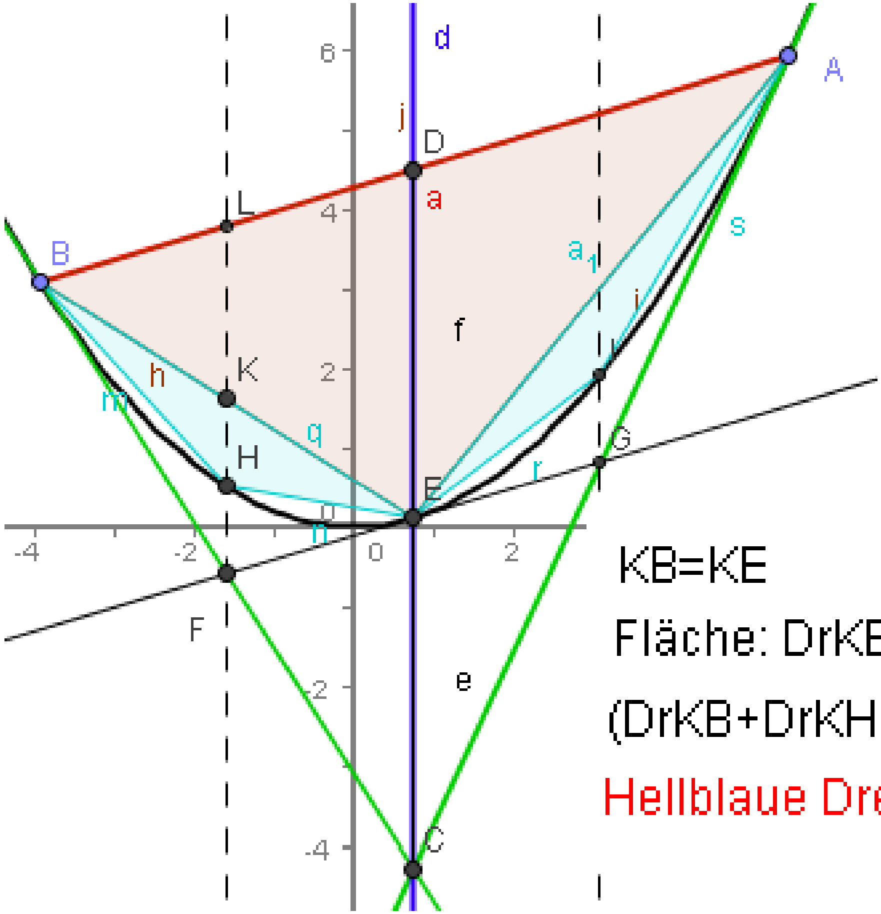
Polynome im Affenkasten

GeoGebra archi3.ggb

Web

Parabeln im Bärenkasten

Archimedes Quadratur der Parabel



Weiterer Beweis

KB=KE KL=KF HK=HF

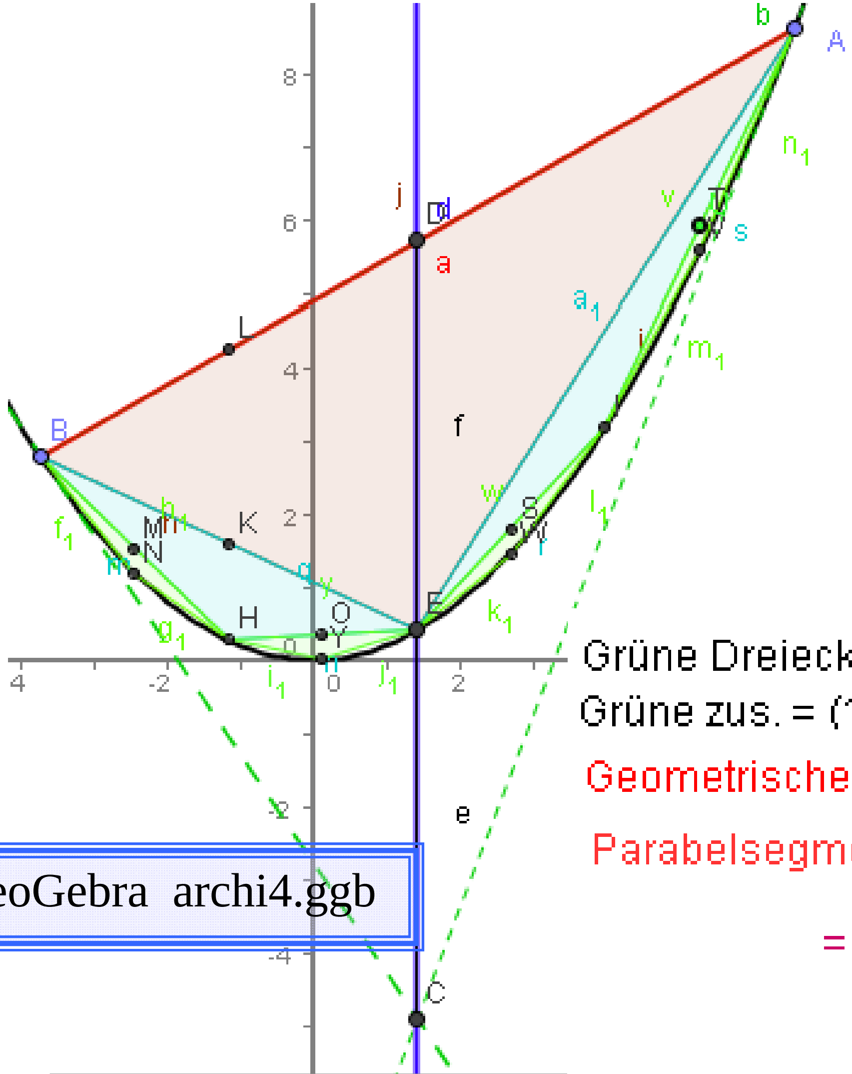
Fläche: DrKB=DrKHE

(DrKB+DrKHE)*4=Dr.BED

Hellblaue Dreiecke zusammen=1/4 vom lila Dreieck

GeoGebra archi4.ggb | Web

Archimedes Quadratur der Parabel



Nun übernehmen die hellblauen Dreiecke die Rolle, die bisher das lila Dreieck gespielt hat.

Zwei grüne Dreiecke haben also ¼ der Fläche von „ihrem“ hellblauen.

Grüne Dreiecke zusammen=1/4 den hellblauen zusammen

Grüne zus. = (1/4)^2 vom lila Dreieck

Geometrische Reihe aller:

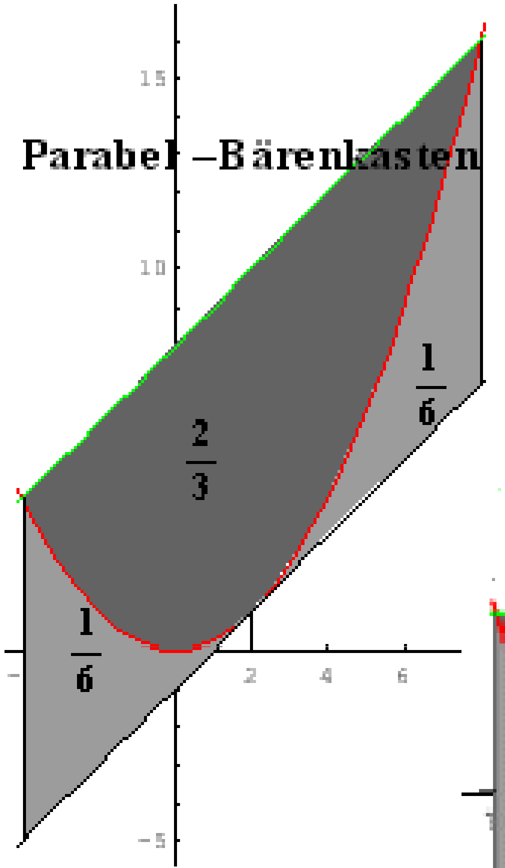
Parabelsegment-Fläche=lila Dr*(1+1/4+(1/4)^2+.....

$$= LilaDr^*\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = LilaDr^*\frac{4}{3}$$

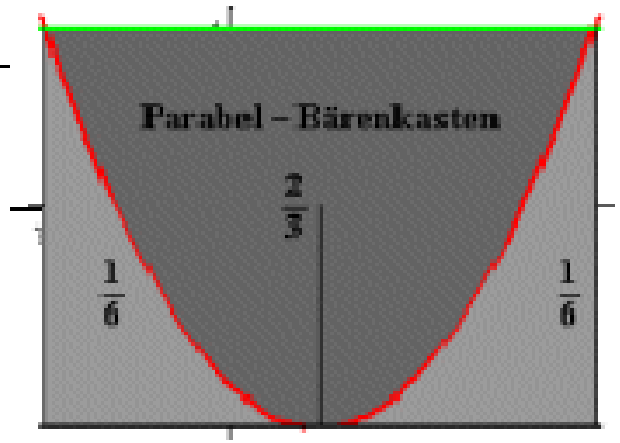
GeoGebra archi4.ggb

Web

Archimedes Quadratur der Parabel



Zwei lila Dreiecke haben Fläche dieses Parallelogramm-Kastens. Darum nimmt nun nach Archimedes die Parabel zwei Drittel dieses Kastens ein. Bleiben zwei flächengleiche Reste.



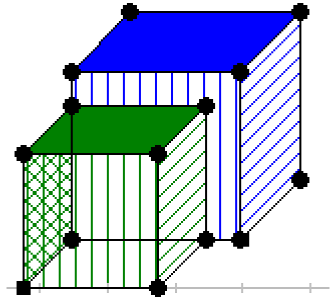
Das gilt für jede Parabelsehne und die zugehörige Tangente.

Heute zeigt man das leicht mit Integralrechnung.

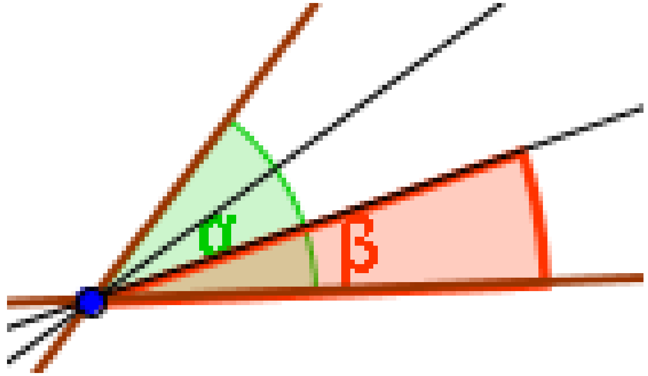
Scherungs-Beweise

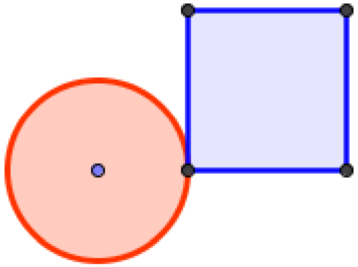
Web

Die großen unlösbaren Probleme der Antike



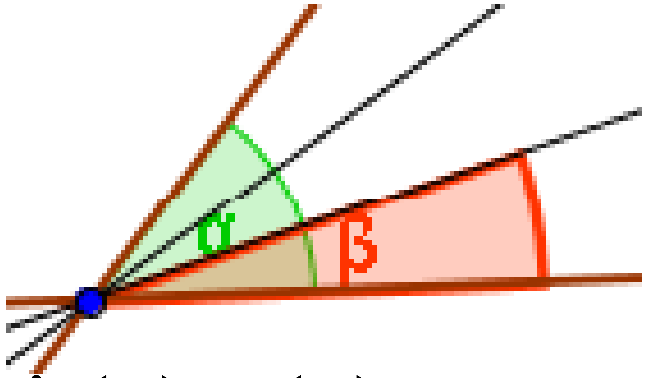
- Das Delische Problem
  - Die Verdoppelung des Würfels
  - Die Drittelung des Würfels
- Die Dreiteilung des Winkels
- Die Quadratur des Kreises





Web

Die großen unlösbaren Probleme der Antike



$$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha + 2\alpha) =$$

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha) =$$

$$\cos(\alpha)(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) - \sin(\alpha)2\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$

$$k(k^2 - (1 - k^2)) - 2(1 - k^2)k =$$

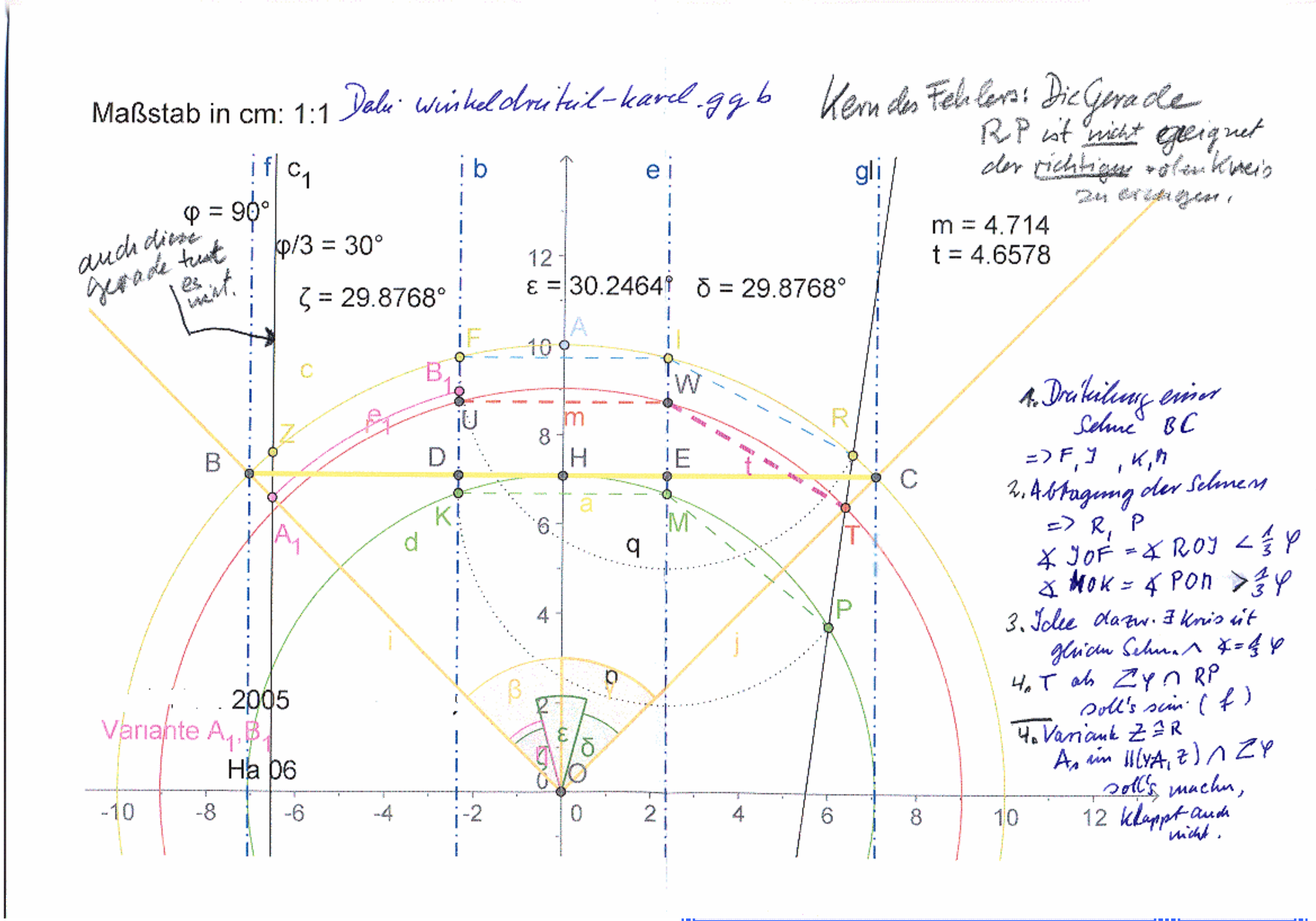
$$k^3 - k + k^3 - 2k + 2k^3 = 4k^3 - 3k$$

Web

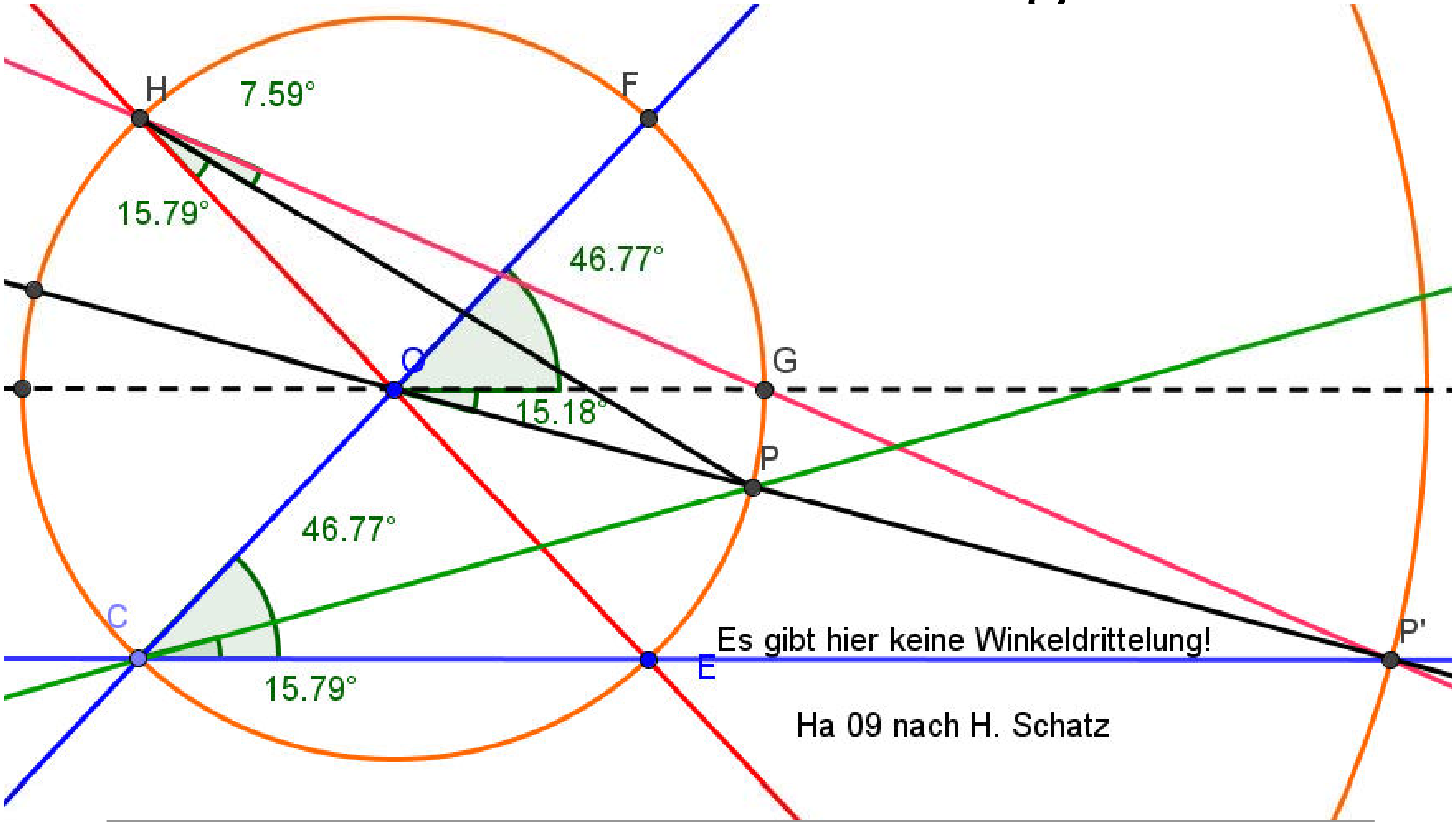
$$\cos(3\alpha) = a, \;\; \cos(\alpha) = k \Rightarrow 4k^3 - 3k - a = 0$$

Die Probleme führen auf Gleichungen 3. Grades, oder andere,
Die nicht mit Zirkel und Lineal lösbar sind.

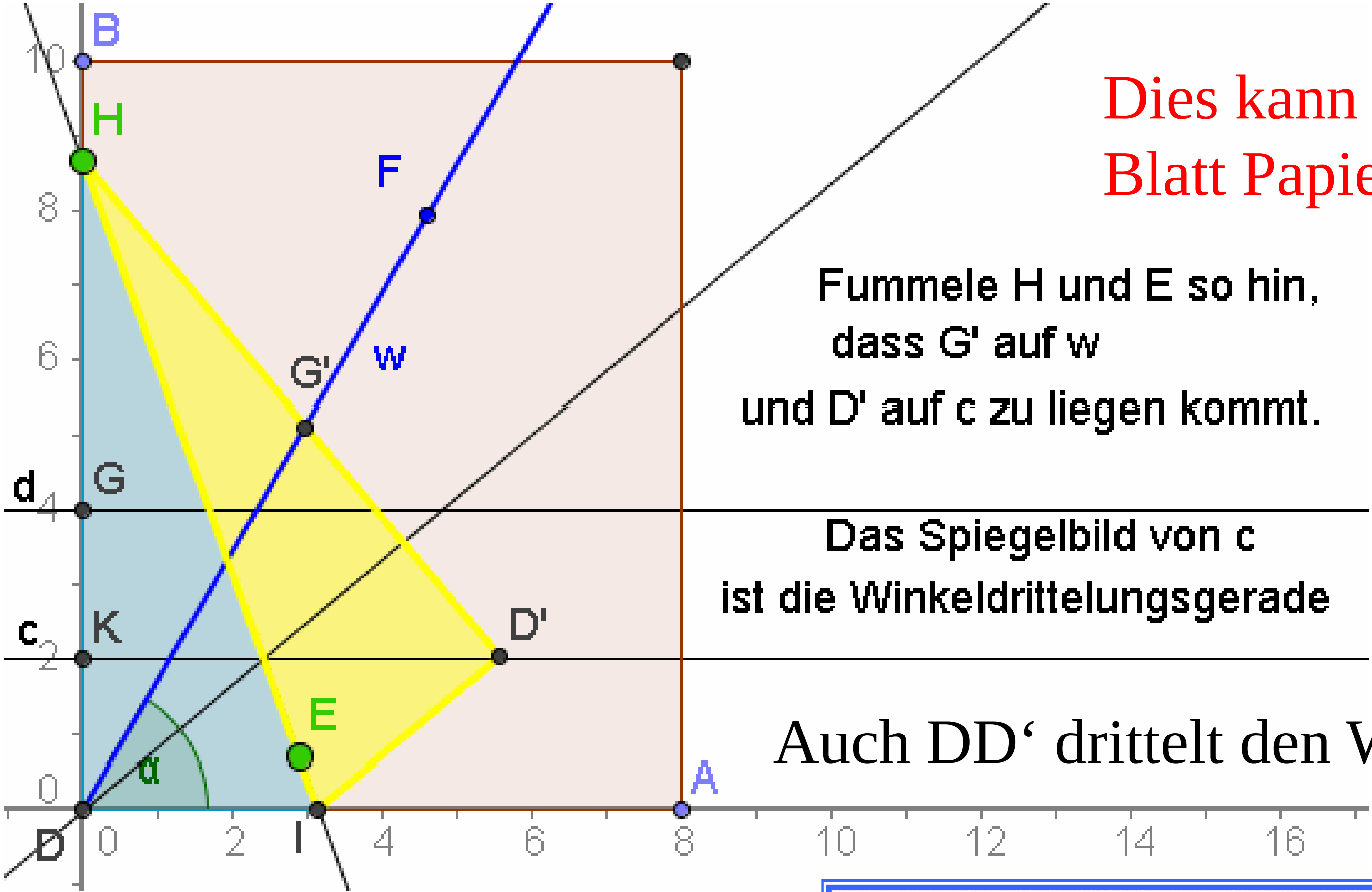
Unlösbar mit Zirkel und Lineal



Unlösbar mit Zirkel und Lineal die Winkeldrittelung



Unlösbar mit Zirkel und Lineal die Winkeldrittelung



Dies kann mit einem Blatt Papier falten.

Fummele H und E so hin, dass G' auf w und D' auf c zu liegen kommt.

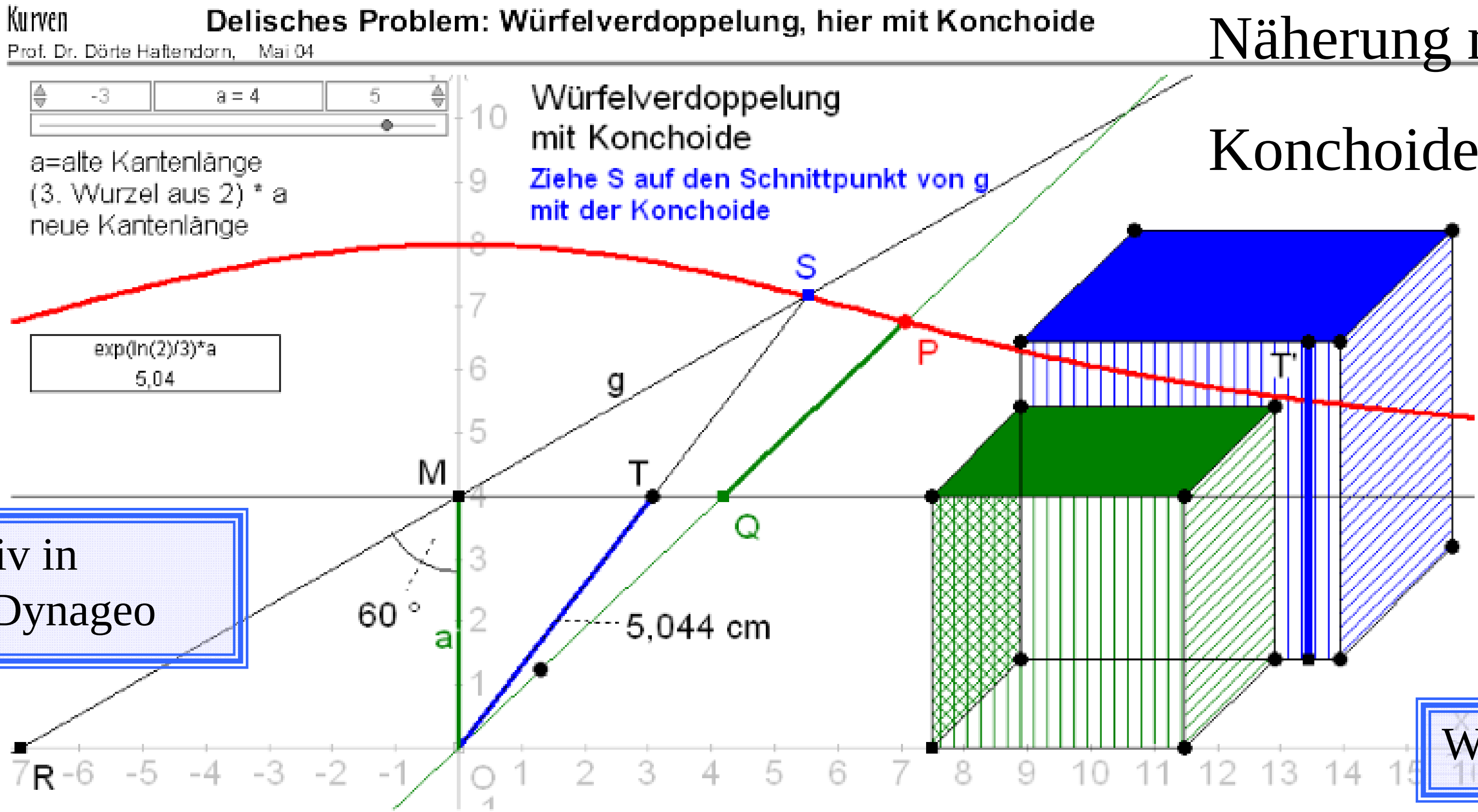
Das Spiegelbild von c ist die Winkeldrittelungsgerade

Auch DD‘ drittelt den Winkel

Interaktiv in GeoGebra | Web

Unlösbar mit Zirkel und Lineal: die Verdoppelung des Würfels

Näherung mit Konchoide



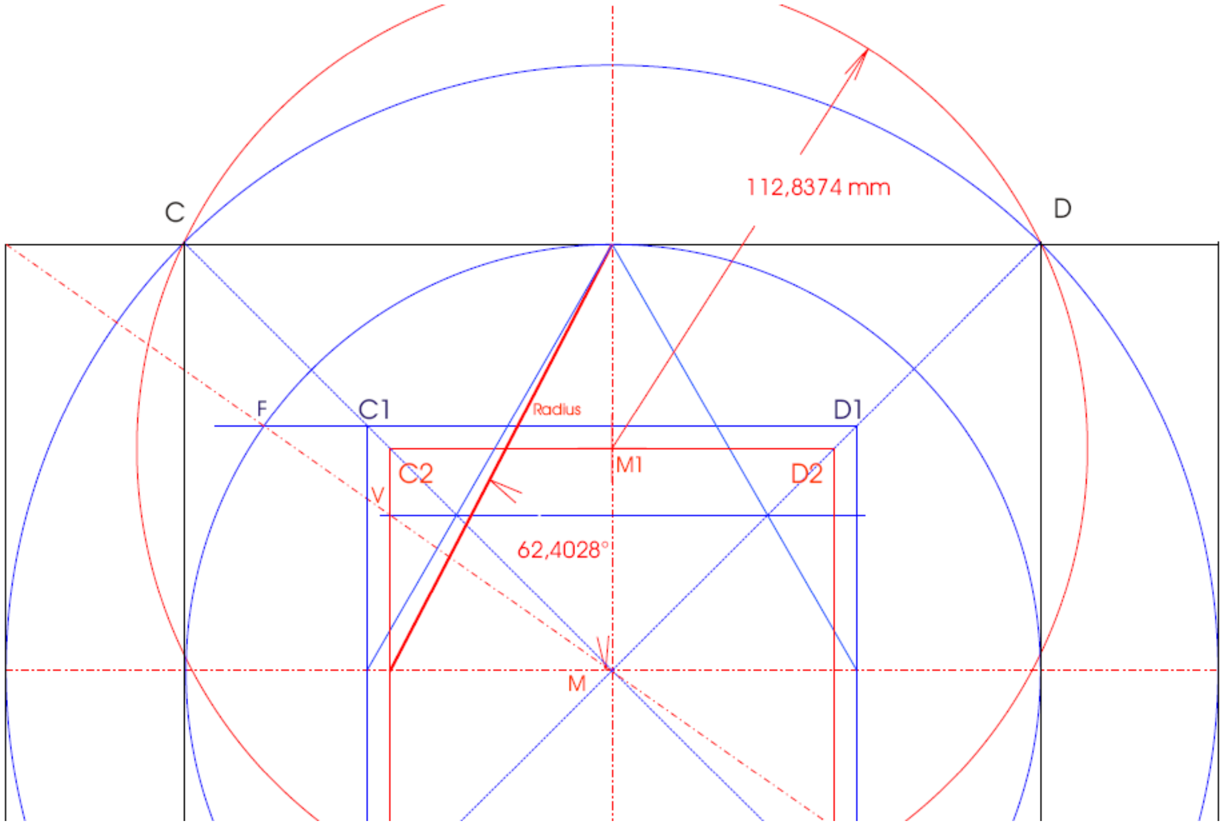
Interaktiv in Euklid-Dynageo

Web

$g:\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+a$ und $\overline{OT}=t=\frac{a}{\sin\varphi}$ und $r_S=t+a$ (Konchoide) und $x_S=r_S\cdot\cos\varphi,\ \ y_S=r_S\cdot\sin\varphi$, wird erfüllt von

$t=\sqrt[3]{2}\ a$ das heißt $t^3=2\ a^3$. Also ist t die Kantenlänge eine Würfels mit dem doppelten Volumen. Achtung!!!! S ist damit nicht konstruiert!!!!!!!!

Unlösbar mit Zirkel und Lineal: die Quadratur des Kreises



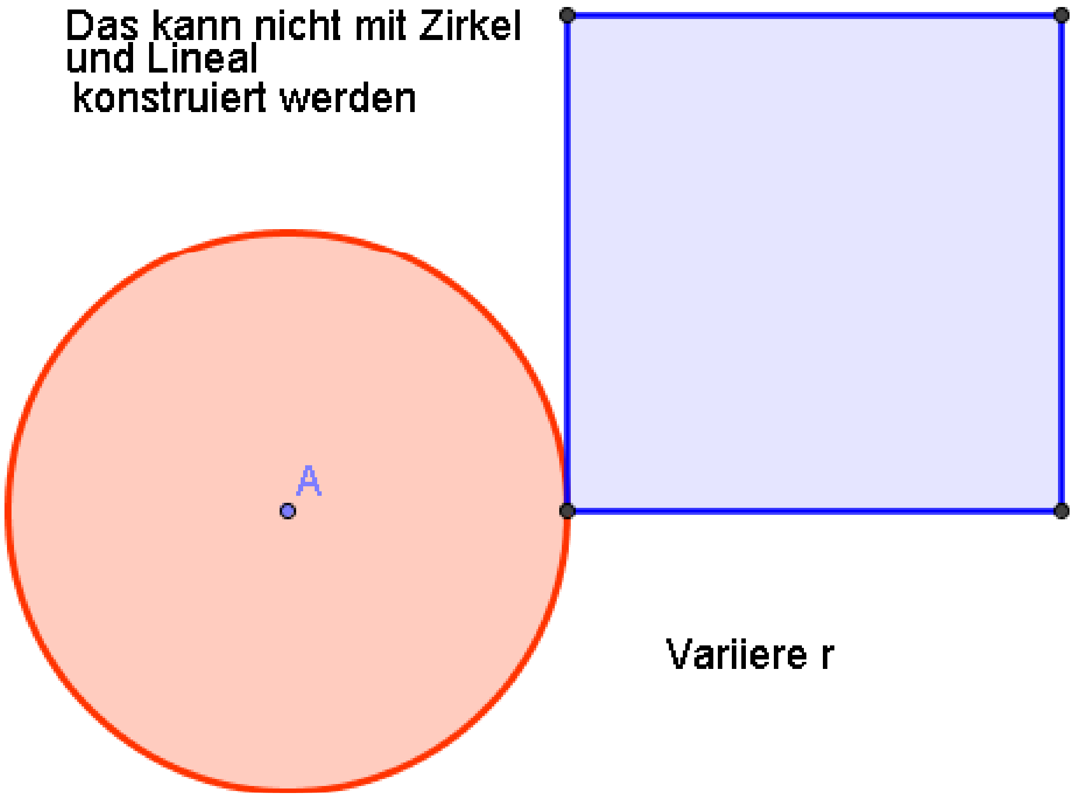
Unlösbar mit Zirkel und Lineal: die Quadratur des Kreises

Quadratur des Kreises

Kreis und Quadrat sind flächengleich.

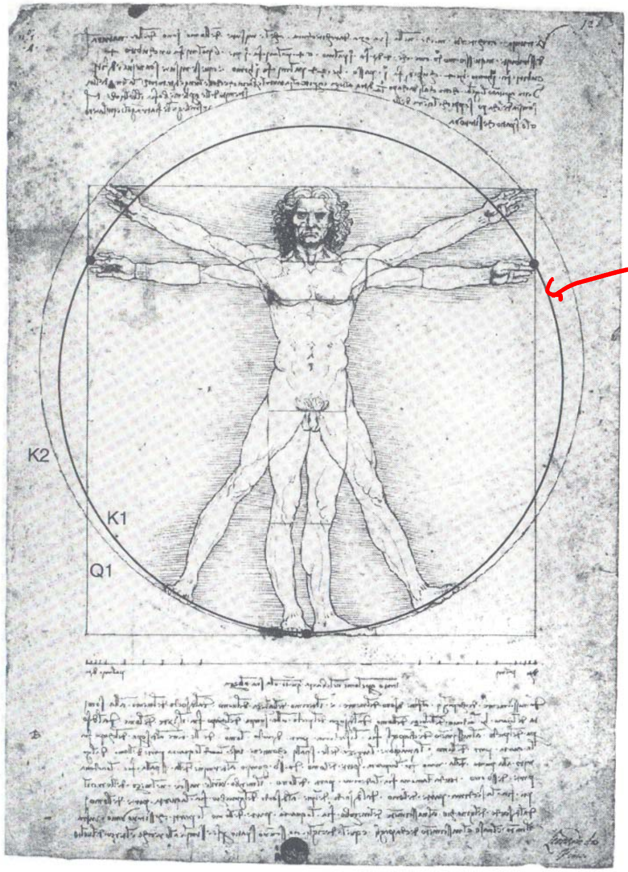
Das konnte man nur mit Ausrechnen schaffen,

Das kann nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden



Web

Unlösbar mit Zirkel und Lineal: die Quadratur des Kreises



Erster Schritt zum Regelwerk in Leonardos *Proportionsstudie*: Ergänzung des Kreises K_1 an den Mittelfingern der waagerechten Hände. Bezeichnungen des Quadrats Q_1 und des Kreises K_2.

K

$F(K) \approx F(Q)$