Konstruierbarkeit

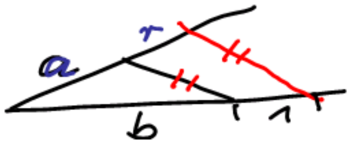
Bewersdorf, Algebra f. E
Vieweg 2002

Satz: Ausgehend von (0|0) und (1|0) kann ein Punkt genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn seine Koordinaten aus $\mathbb{QE}^2$ sind. $\mathbb{QE}$ seien die rationalen Zahlen und alle endlichen Schachtelungen aus Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen.

Beweis: "$\Leftarrow$" 1. Jeder Punkt mit ganzzahligen Koordinaten ist konstruierbar. (klar, 1 oft aneinander)

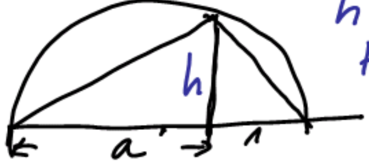
2. $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a/b$ ist konstruierbar

$r = \frac{r}{1} = \frac{a}{b}$ (Projektionsatz)



$\Rightarrow P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist konstruierbar

3. $\sqrt{a}$ ist konstruierbar



$h^2 = a \cdot 1 = a$
Höhensatz
$\Rightarrow h = \sqrt{a}$

$\Rightarrow P \in \mathbb{QE} \times \mathbb{QE} =: \mathbb{QE}^2$ ist konstruierbar.

"$\Rightarrow$" Def: Konstruktion mit Zirkel und Lineal $\Longleftrightarrow$ Neue Punkte entstehen ausschließlich aus Schnitten von Geraden und Kreisen (auch untereinander), wobei Geraden durch vorhandene Punkte definiert werden und Kreise um vorhandene Punkte geschlagen werden und Radien haben, die als Abstand vorhandener Punkte existieren.

z.z. durch Konstr. mit Z. u. L. können nur die Punkte aus QE^2 entstehen.

1. $(QE, +, \cdot)$ ist ein Körper, endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$

2. $y = mx + b$ $m, b \in QE$ ist eine durch Punkt aus QE^2 definierte Gerade
$y = nx + a$ $n, a \in QE$

Schnitt $mx + b = nx + a \Rightarrow (m-n)x = a - b$

$m = n \Rightarrow$ kein neuer Punkt

$m \neq n \Rightarrow x = \frac{a-b}{m-n} \in QE \Rightarrow y = m\frac{a-b}{m-n} + b \in QE$

$\Rightarrow$ Schnitt ist ein Punkt aus QE^2

3. Schnitt zweier Kreise oBdA $M_1 = (0|0)$, $M_2 = (a, 0)$
Radien $r, R \in QE$, $a, b \in QE$ $a \neq 0$

$$x^2 + y^2 = r^2 \wedge (x-a)^2 + y^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 \wedge x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = R^2$$

$$\Rightarrow r^2 - 2ax + a^2 = R^2$$

$$2ax = r^2 + a^2 - R^2$$

$$x = \underbrace{\frac{r^2 + a^2 - R^2}{2a}}_{A} \in QE \quad a \neq 0 \text{ s.o.}$$

$$\Rightarrow y^2 = r^2 - A^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - A^2} \in QE \text{ falls } r^2 \geq A^2 \quad \Rightarrow S \in QE^2$$

falls S existiert.

4. ebenso Schnitt von Gerade und Kreis.

$\Rightarrow$ durch Schnitte von Geraden und Kreisen entstehen nur Punkte, die wieder in einer endlichen Körpererweiterung QE von $\mathbb{Q}$ ihre Koordinaten haben.
(eben kam eine weitere Wurzel hinzu)

q.e.d.