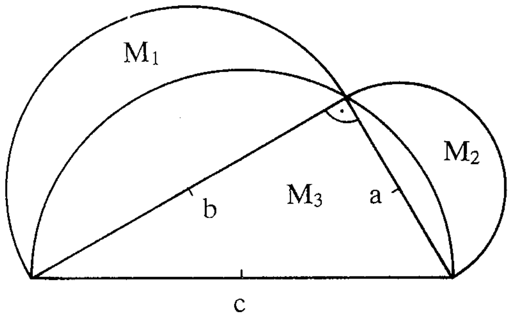
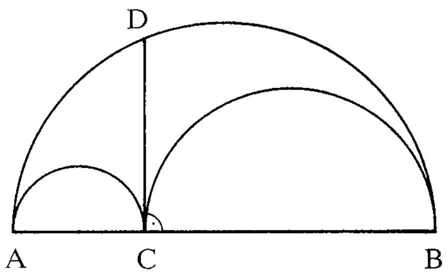


ates zeigt, daß die Summe der Möndchen M_1 und M_2 über den Katheten eines rechtwinkligen ks ABC diesem Dreieck flächengleich ist – S. 36.



Möndchen von **Archimedes** – S. 52

ISBN 3-332-00524-3

4000 JAHRE MATHEMATIK IN AUFGABEN

Johannes Lehmann

So rechneten Griechen und Römer

Urania

Titelbilder:
Akropolis zu Athen. Autor: Prof. Dr. Manfred Oppermann, Halle (Saale)
Schulszene, Relief von Neumagen bei Trier, nach 150 u. Z. (Ausschnitt)
Mit freundlicher Genehmigung des Landesmuseums Trier

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Lehmann, Johannes:
4000 Jahre Mathematik in Aufgaben / Johannes Lehmann. –
Leipzig ; Jena ; Berlin : Urania-Verl.
ISBN 3-332-00522-7
NE: Lehmann, Johannes: Viertausend Jahre Mathematik

Bd. 2. So rechneten Griechen und Römer. – 1. Aufl. – 1994
ISBN 3-332-00524-3

ISBN 3-332-00522-7

1. Auflage 1994

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin, 1994
Zeichnungen: Harald Stier, Leipzig
Buchgestaltung: Dietmar Senf, Helmut Tracksdorf, Leipzig
Satz und Druck: INTERDRUCK Leipzig GmbH
Printed in Germany

Inhalt

Zum Geleit

Staunen – wundern – mitmachen!

Als Schüler einer Oberrealschule in Leipzig lernte ich im Mathematikunterricht ein Lehrbuch kennen und schätzen, das ich noch heute besitze und hüte. Es war der »Lietzmann« (1. Auflage 1912), ein ausgereiftes, altbewährtes Buch für die Hand des Schülers. Das Lehrbuch beschäftigt sich unter anderem mit Aufgaben aus der Physik, der Astronomie, mit Bewegungsaufgaben, Prozent- und Zinsrechnungen, Scherzen und Rätseln. Letztere weckten immer wieder von neuem mein besonderes Interesse. Bis heute hat sich die Vorliebe für diese heitere Art der Mathematik erhalten. Dies zeigen zudem meine neun Bücher zur Unterhaltungsmathematik. So betrachtete ich es auch als Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift »alpha« als einen Schwerpunkt, unterhaltsame Aufgaben oder Beiträge zu schaffen. Die Leser zeigten sich dankbar dafür.

In »meinem Lietzmann« gab es zudem durch alle Schuljahre fortschreitende Kapitel zum Thema »Aufgaben aus alter Zeit«. Dieses Gebiet hat mich besonders gefesselt und eigentlich mein ganzes Leben nicht mehr losgelassen.

Als ich am 13. Dezember 1945 als »Neulehrer« wieder in eine Schulstube trat, hatte ich den »Lietzmann« erneut unter dem Arm, denn neue Lehrbücher gab es noch nicht. Natürlich erinnerte ich mich an die »Rätsel und Scherze«, an die »Aufgaben aus alter Zeit«. Das Lösen historischer Aufgaben sowie die Geschichte der Mathematik fügte ich in meiner 40jährigen Lehrpraxis im Unterricht und als Leiter von Arbeitsgemeinschaften ein. Die Schüler begegneten meinem »Hobby« mit sichtbarem Wohlwollen. Da mein Vorrat an Aufgaben sehr bald nicht mehr reichte, begab ich mich auf ständige Suche nach mathematischen Aufgaben aus der Geschichte der Menschheit. Geradezu wahre Fundgruben boten drei Einrichtungen Leipzigs für mich: die Universitätsbibliothek, die Comenius-Bücherei und die Deutsche Bücherei. Im Ägyptischen Museum der Universität legte man mir ein Buch mit allen Aufgaben aus dem »Papyrus Rhind« vor. Auch im nahen und weiteren Umfeld fand ich viele Beispiele. So wuchs mein Fundus historischer Aufgaben, die ihren Platz fanden neben solchen Sammlungen wie »Ungleichungen«, »Gute Grundkenntnisse gefragt«, »Symmetrie«, »2 × 2 plus Spaß dabei«.

Auch im Rahmen der Lehrerweiterbildung, in Seminaren mit Studenten, bei Vorträgen als Gast der »Urania« fanden meine Ausführungen Resonanz. Sehr häufig wurde ich angesprochen, meine Sammlungen zu veröffentlichen. Der Urania-Verlag ebnete mir den Weg, eine Dokumentation historischer Aufgaben zu erstellen. Mein Ziel war es auch dabei, Verständnis für die Größe vergangener Kulturen zu fördern. 15 Jahre lang sammelte und ordnete ich. Den Ereignissen des Jahres 1989 ist es geschuldet, daß sich mir neue Quellen u. a. durch die Universitäten in Basel, München, Neapel, Paris, London und Cambridge erschlossen.

Aus über 1 000 Aufgaben ernster und heiterer Natur, geringen und anspruchsvollen Niveaus, wählte ich rund 600 aus für Schüler, Lehrer, Studenten, für Hobbymathematiker, die es sind oder werden möchten – also für Unterricht und Freizeit gleichermaßen. Das Buch soll in erster Linie Freude am Denken und das Bewußtsein vermitteln, daß unser heutiger Erkenntnisstand nicht denkbar wäre ohne herausragende geistige Leistungen von Wissenschaftlern vergangener Generationen.

Mein Dank gilt all denen aus nah und fern, die mich bei der Arbeit am Buch unterstützten. Besonders seien meine langjährigen Freunde H. Begander, A. Körner, Th. Scholl, R. Thiele und natürlich der Verlagslektor K. Haase genannt, die mir stets mit tätiger Hilfe Beistand leisteten.

Nun ist es an Ihnen, werter Leser, historische Aufgaben zu lösen. Vielleicht sind sie Ansporn, selbst einmal auf die Suche zu gehen nach »Aufgaben aus alter Zeit«.

Leipzig, im Januar 1994

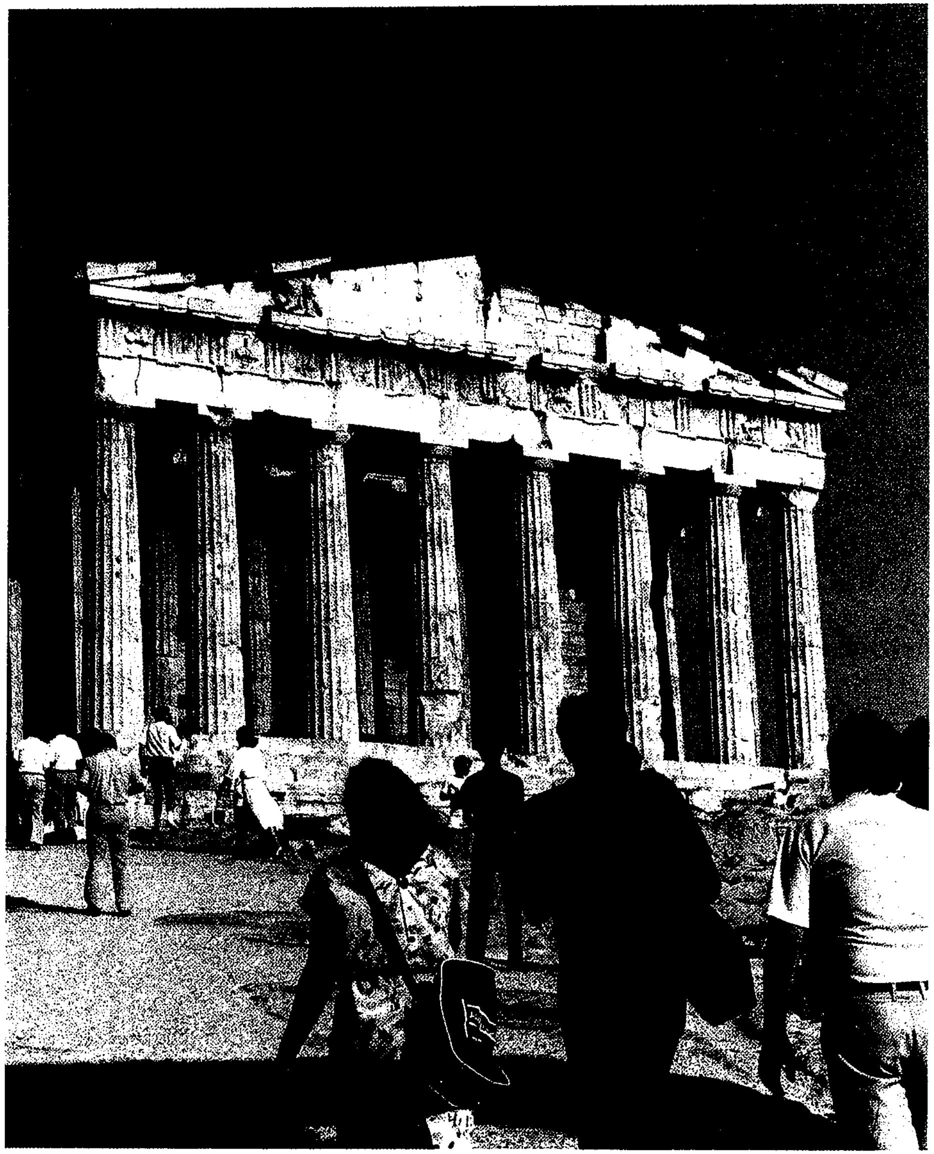


Bild 1
Die Akropolis in Athen

So rechneten Griechen und Römer

Dr. R. Thiele und K. Haase

Die Griechen gelten als Begründer der Wissenschaft. Ihre Ideen sind noch heute lebendig, wie Ihnen die nachfolgenden Fremdwörter griechischen Ursprungs verdeutlichen: Aristokratie, Demokratie, Tyrannei, Philosophie, Physik, Technik, Akustik, Polyphonie, Hemisphäre, Monade, Mathematik.

Ein anderes Beispiel: In der Geometrie werden noch heute wie in der Antike griechische Buchstaben zur Bezeichnung mathematischer Objekte benutzt.

Welches sind die Lieblingsbücher der Europäer in den vergangenen 2000 Jahren gewesen, was meinen Sie? Auf dem Spitzenplatz liegt natürlich die Bibel, dann folgt »Die Elemente« des Euklid von Alexandria (um 365 bis etwa 300 v. u. Z.), so wird jedenfalls behauptet. Euklids klassische Darstellung der Geometrie hat über 60 Generationen als Schulbuch gedient, in England noch im 19. Jahrhundert, und dies, obwohl es sein Verfasser gar nicht als Lehrbuch gedacht hatte.

Ein Gutteil der europäischen Denkungsart, so darf man also getrost unterstellen, ist von Euklids »Elementen« geprägt worden. Die bekannten Sätze des Thales von Milet (etwa 624 bis etwa 547 v. u. Z.) oder des Pythagoras von Samos (etwa 580 bis etwa 500 v. u. Z.) wurden von Euklid exakt bewiesen, dabei ist seine Beweismethode bis heute mustergültig: An die Spitze einer mathematischen Theorie (bei Euklid: Geometrie) werden unbewiesene, aber offensichtlich gültige Sätze nebst unerklärte Grundbegriffe gestellt, aus denen allein mit Hilfe der Logik alle anderen Sätze der Theorie abgeleitet werden. Da die an die Spitze gestellten Sätze Axiome genannt werden, heißt dieses mathematische System axiomatisch.

Einige der mathematischen Probleme, auf die die Griechen gekommen waren, erwiesen sich auch für die nachfolgenden Mathematikergenerationen als harte Nüsse: Jahrhunderte blieben sie ungelöst! Dazu zählen auch die drei berühmtesten mathematischen Probleme der Antike: die Verdopplung des Würfels, die Dreiteilung eines beliebigen Winkels und die Quadratur des Kreises allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal. Die Unmöglichkeit, diese Probleme mit den angegebenen Hilfsmitteln zu lösen, wurde erst in neuerer Zeit bewiesen.

Die scharfsinnigen Analysen griechischer Mathematiker und Philosophen zum Bewegungs- und Unendlichkeitsbegriff beeindrucken noch heute, wie etwa die Paradoxie des Zenon aus Elea (etwa 490 bis etwa 430 v. u. Z.), die als »Achilles und die Schildkröte« bekannt wurde. Darin gibt der schnellste Läufer der Antike, Achilles, in einem Wettlauf dem langsamsten Tier Griechenlands großzügig einen Vorsprung und muß sich vom Philosophen Zenon in einem Gedankenversuch nachweisen lassen, daß er unter diesen Umständen den Wettkampf nur verlieren könne. Denn wenn Achilles dort sei, wo die Schildkröte beim Start war, ist diese bereits ein Stück weitergekrochen. Habe dann Achilles genau jene Stelle erreicht, so sei die Schildkröte inzwischen abermals ein Stück weitergekrochen, und so weiter und so fort. Achilles könne also die Schildkröte nie einholen.

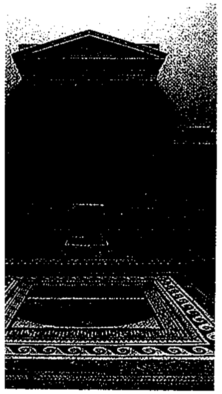
Archimedes von Syrakus (etwa 287 bis etwa 212 v. u. Z.), einer der ganz großen Mathematiker, berechnete unter anderem Flächen- und Rauminhalte. Anfangs war er wohl nicht in der Lage, seine diesbezüglichen Vermutungen über Kugel, Kegel und Zylinder zu beweisen. Und so soll er vor dem erlauchten Kollegium der Akademie von Alexandria seine Mutmaßungen kurzerhand durch Auswiegen besagter Körper gestützt haben. Diese Art Experimentalphysik bekam ihm freilich schlecht, er wurde aus der Akademie hinausgeworfen. Sagt die Überlieferung! Aber die ist nicht sicher.

Fest steht dagegen, daß Archimedes über die Volumina besagter Körper richtig vermutet hatte und dies auch später streng bewiesen hat. Übrigens ist er dabei auf eine Methode verfallen, die erst 2 000 Jahre später, als sie von Newton und Leibniz aufgegriffen wurde, vollreife Früchte tragen sollte: die Infinitesimalrechnung.

Eine andere berühmte Arbeit von Archimedes handelt von der mutmaßlichen Anzahl der Sandkörner, die im Weltall Platz finden könnten. Die Rechnung war alles andere als einfach, da das höchste griechische Zahlzeichen die Myriade ($10^4 = 10\,000$) war und das Ergebnis des Archimedes bei 10^{63} lag. Archimedes baute sich für die Rechnung also ein eigenes Zahlensystem auf.

Welche Schwierigkeiten sich dabei vor ihm auftürmten, zeigt ein Blick auf die damaligen Gepflogenheiten. Die Bibel beschränkte sich beispielsweise bei großen Zahlenangaben auf die in der jeweiligen Sprache vorhandenen Rangschwellen und machte für darüber hinausgehende Zahlenwerte unbestimmte Angaben. In der Übersetzung aus dem Lateinischen liest sich die Zahlenangabe aus der Offenbarung 5,11 als »und ihre Zahl war vieltausendmal tausend«, während unsere Redeweise von den »Myriaden von Myriaden« auf den griechischen Text dieser Stelle zurückgeht – der griechische Schwellenwert war Myrioi (10 000), während der römische Schwellenwert nur 1 000 war (milia milium).

!
ꞁlick in das Pergamon-
um zu Berlin
ꞁeundlicher Genehmigung
ꞁaatlichen Museen zu
ꞁ



Wie rechneten die Griechen? Mit dem Archimedischen System? Nein, denn solche exorbitanten Zahlen interessieren in griechischen Alltagsrechnungen nicht. Es gab zwei Möglichkeiten des Rechnens, da die Griechen zwei verschiedene Zahlschriften hatten. Eine alte Zahlschrift, deren Ziffern ionisch oder herodianisch genannt werden, faßt fünf Zeichen (1 als Strich, 10 als Delta von Deka, 100 als Eta von Hekaton, 1 000 als Chi von Chilioi und 10 000 als My von Myrioi) ähnlich wie die uns bekanntere römische Zahlschrift in einer Bündelung von je 10 Einheiten zusammen. Eine Zwischenbündelung zu je 5 Einheiten wird zur besseren Übersichtlichkeit eingeschoben (mit einem Zeichen Pi von Penta 5).

!
Δ
μ χ η δ ι
IIII = Π
Seite 17

Später kamen die Buchstabenziffern auf. In der Reihenfolge des griechischen Alphabets erhielten die Buchstaben Zahlenwerte; die ersten neun Buchstaben die Zahlenwerte 1 bis 9, die nächsten neun Buchstaben die Zahlenwerte 10 bis 90 (Zehner) und die letzte Neunergruppe die Hunderter von 100 bis 900. Da das griechische Alphabet nur 24 Buchstaben hat, wurden drei Anleihen im semitischen Alphabet gemacht (digamma = ϛ, koppa = 90 und sampi = 900).

Die Doppelfunktion der Buchstaben hat später Anlaß zu vielerlei mystischen Überlegungen gegeben. Eine Folge griechischer Buchstaben läßt sich sowohl als Wort als auch als Zahl lesen. Das Wort Amen (αμηv) kann zum Beispiel als die Zahl 99 gedeutet werden und umgekehrt. Dieser Codier- und Decodiermechanismus bildete die Grundlage für eine sogenannte Buchstabenrechnung, die weit verbreitet war und die beispielsweise den bedeutenden Mathematiker Stifel der Lutherzeit verführt hatte, aus der Bibel den Weltuntergang zu berechnen. Vermutlich sind die Spottverse Jenenser Studenten »Stifel muß sterben, ist ja noch so jung« hierauf gemünzt.

Das griechische 1×1 der Buchstabenziffern war nicht gerade übersichtlich. Aber man konnte mit ihm schriftlich rechnen, so daß die, die es begriffen hatten, dabei blieben. Das waren unter anderen die Byzantiner, die griechische Gelehrsamkeit über die Antike hinaus bewahrten. Erst im 15. Jahrhundert beginnen die arabischen Ziffern langsam die griechischen Buchstabenziffern in Byzanz zu verdrängen.

Seit dem Ende des dritten vorchristlichen Jahrhunderts breitete sich das Römische Reich zu einem Weltreich aus, das schließlich auch Griechenland und seine Kolonien umfaßte. Die Römer waren keine Mathematiker, sie haben der griechischen Mathematik nichts hinzugefügt. Im Gegenteil, die Vermessung des Imperium Romanum unter Augustus oder die Kalenderreform des Julius Caesar (Julianischer Kalender) war nicht ohne die Hilfe hellenistischer Mathematiker aus dem einverleibten Alexandria möglich gewesen. Die römischen Zahlen sind wie die alten griechischen Zahlen in Zehnerstufen gebündelt (1 als Strich, X als durchgestrichener Strich für das erste Bündel, C für centum = 100; das M für mille = 1 000 ist eine spätere Schreibweise), wobei das Schriftbild durch eine eingeschobene Fünferbündelung (mit den Zeichen V, L und D 5 für ~~4~~, 50 und 500) übersichtlicher gemacht wird. Der halbe Wert von 10 bzw. X ist 5, und er wurde konsequent durch das halbe Zahlzeichen von X dargestellt: 5 = V. Hierauf spielt die alte Redewendung an, jemandem (in einer Rechnung) ein X für ein U (was im lateinischen Alphabet gleich dem V ist) vorzumachen, mit anderen Worten, die Rechnung zu seinen eigenen Gunsten zu manipulieren.

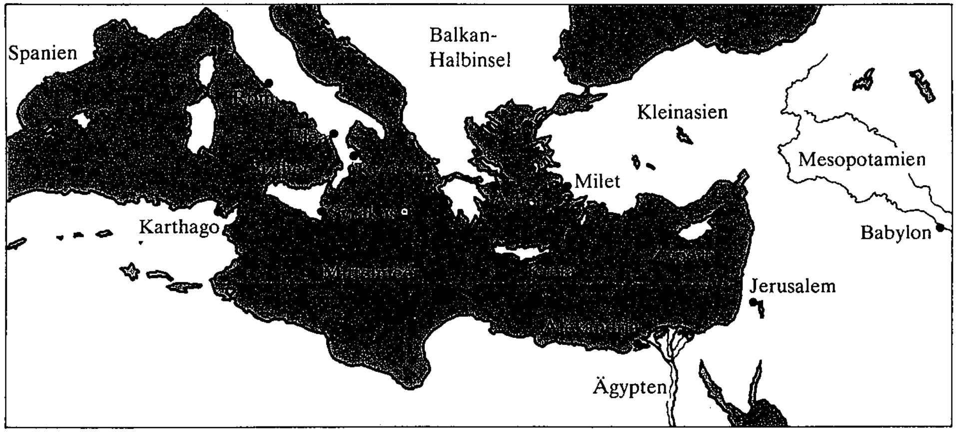
...rmünze des (letzten) ...chen Kaisers Justinian ...565)

Das römische Zahlsystem ist auf das Zusammenzählen und Abziehen zugeschnitten, denn es ist nicht viel mehr als ein Zählsystem. Deshalb waren Multiplikation und Division für die Römer schwierige Rechenoperationen, die am Rechenbrett, dem Abakus, vorgenommen wurden. Bereits bei den Griechen waren Rechenbretter in Gebrauch gewesen, und auch in Europa war es bis zu den Zeiten von Adam Ries üblich, Rechensteine auf den Linien der Rechenbretter hin und her zu schieben. Die gleichartigen Rechensteine bekamen auf den verschiedenen Linien unterschiedliche Werte: Der Abakus verwirklichte ein Positionssystem, das weder die Griechen noch die Römer in ihrer Zahlschrift benutzten und es auch nicht aus der Rechenpraxis am Abakus in ihre Zahlschreibweise übernahmen. (In Asien und in Rußland werden noch immer Rechenbretter benutzt!)

Rechensteine waren also über Jahrhunderte ein wichtiger Bestandteil des Alltags, und das hat natürlich in der Sprache Spuren hinterlassen. Der Rechenstein wird lateinisch »calculus« genannt, und diese Wurzel findet sich in den Wörtern Kalkulieren, Kalkül, Kalkulator usw. Noch heute bezeichnet man im Englischen die elementare Differential- und Integralrechnung als Calculus. Polybius wußte schon 200 vor Christi Geburt, daß die Höflinge wie Rechensteine sind. Eine offenbar die Zeiten überdauernde Erkenntnis, denn Friedrich II. von Preußen wiederholt sie 2 000 Jahre später für seinen Hofstaat abermals (natürlich auf französisch: Les courtisans sont de jetons). Luther, der deutsch sprach und schrieb, bemerkte über das Verrechnen am Abakus in seiner Teufelsbezogenheit: Der Teufel ist zornig und wirft das Hundert ins Tausend und richtet mancherlei Gewirre an. Wir benutzen Luthers Bild, von der Linie für 100 auf die Linie für 1 000 zu kommen, um Abschweifen zu charakterisieren, indem wir sagen »vom Hundertsten ins Tausendste kommen«.

Das ist für uns ein Zeichen, uns nicht weiter zu verplaudern, sondern Sie aufzufordern, sich selbst im Rechnen wie Griechen und Römer zu üben.

Bild 4
Karte vom Klassischen Griechenland



Allgemeine Geschichte	Philosophen und Historiker	Mathematiker und Astronomen
610 v. u. Z.	Milesische Schule:	585 v. u. Z.
Anfang des neu-	Thales	Thales
babylonischen Reiches		
540 v. u. Z.	Anaximandros	550 v. u. Z.
Anfang des persischen	Anaximenes	Pythagoras
Reiches		Anaximandros[2]
500 v. u. Z.	Herakleitos	500 v. u. Z. Hippasos
Ionischer Aufstand		500 bis 350 v. u. Z.
		Pythagoreer
480 v. u. Z.	Eleaten	Anaxagoras[2]
Perserkriege	450 v. u. Z. Anaxagoras	Oinopides
450 v. u. Z.	Herodotos[1]	430 v. u. Z.
Perikles	Atomisten	Hippokrates
		Demokritos
420 v. u. Z.	Thukydides[1]	Theodoros
Peloponnesischer		
Krieg	Sokrates	390 v. u. Z.
	gest. 399 v. u. Z.	Archytas
	Platon	Theaitetos
370 v. u. Z.		370 v. u. Z.
Epaminondas		Eudoxos, Kallippos[2]
	Herakleides von Pontos	Hiketas[2]
		350 v. u. Z. Menaichmos
	Aristoteles	Deinostratos
	Eudemos[1]	Autolykos[2]
333 v. u. Z.		300 v. u. Z. Eukleides
Alexander der Große		280 v. u. Z. Aristarchos[2]
Hellenismus	Stoiker	250 v. u. Z. Archimedes
		240 v. u. Z.
		Eratosthenes, Nikomedes
		210 v. u. Z. Apollonios
		150 v. u. Z. Hipparchos[2]
60 v. u. Z.		60 Heron
Julius Caesar		
1 n. Chr. Augustus	Neopythagoreer	100 Menelaos
		150 Ptolemaios[2]
	Neoplatoniker:	250 Diophantos
	Proklos	320 Pappos
400 Völkerwanderung		

[1] Geschichtsschreiber; [2] Astronom

Aus: B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft. Birkhäuser Verlag Basel/Stuttgart 1956

Die Aufgaben

Die Griechen
zollten der Geometrie höchste Bewunderung,
daher machte bei ihnen keine Wissenschaft
größere Fortschritte als die Mathematik.
Wir (die Römer) aber
haben als Gewinn für diese Kunst
ihre Nützlichkeit für das Messen und Zählen
abgesteckt.

Cicero (106–43 v. u. Z.)

Bild 5
Attisch geometrische Grabamphora mit Totenklage (Mitte 8. Jh. v.u.Z.) und typisch griechischen Ornamenten (Postkarte)

Thales von Milet

Thales (um 624–547 v. u. Z.) rechnete man zu den »Sieben Wei-sen«. Er gehörte also zu den griechischen Denkern und Staatsmän-nern seiner Zeit, die sich durch praktische Lebensweisheit und staatsmännische Klugheit auszeichneten. Er wurde in der bedeu-tenden Handelsstadt Milet geboren und war aristokratischer Her-kunft. Durch Reisen, u.a. nach Babylonien und Ägypten, erweiterte er sein Wissen und brachte von dort auch mathematische Kennt-nisse und Methoden mit. Besonders interessiert war er an geometri-schen Problemen. Mit seiner Denkweise drang er über die empiri-sche Geometrie der Ägypter und Babylonier hinaus zu mathemati-schen Beweisen und allgemeinen Theoremen vor. Aus Berichten wissen wir, daß Thales die Höhe ägyptischer Pyramiden durch Mes-sung ihrer Schatten bestimmt hat.

Stets fragte er nicht nur, wie es gemacht wird, sondern auch nach dem Warum. Herodot spricht von Thales' Entdeckungen in der Astronomie. Thales sagte eine Sonnenfinsternis – jene vom 28. Ma[i] 585 v. u. Z. – voraus, stellte fest, daß die Dauer eines Jahre[s] 365 Tage beträgt und ermittelte den Sonnendurchmesser als de[n] 720. Teil der Sonnenbahn.

Auf dem Grabstein des »Vaters der Geometrie« las man folgende Inschrift: »Klein ist das Grabmal des Thales, gewiß, doch erwäge des großen Denkers Weltruhm, der weit wie der Himmel sich dehnt.«

Thales werden folgende, uns aus unserer Schulzeit bekannten geometrischen Sätze zugeschrieben:

(1) Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte.
(2) Dreiecke im Halbkreis haben rechte Winkel an der Spitze.
(3) Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich.
(4) Die gegenüberliegenden Winkel sich schneidender Geraden sind gleich.
(5) Stimmen zwei Dreiecke in zwei entsprechenden Winkeln und einer Seite überein, so stimmen sie in jeder Beziehung überein.
(6) Ein Kreis wird durch den Durchmesser in zwei gleich große Hälften geteilt.

1

Gegeben ist eine Strecke a. Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $A = 3a^2$ ist!

2

In einem Halbkreis mit einem Radius r ist über dem Durchmesser $\overline{AB} = 2r$ ein Dreieck ABC gezeichnet, dessen Eckpunkt C auf dem Kreisbogen AB liegt.

Welche Gerade durch C teilt das Dreieck ABC in zwei flächengleiche Teildreiecke?

3

Aus Plutarchs Text »Niloxenos spricht mit Thales über den König Amasis«: »Obschon er dich auch um anderer Dinge willen bewundert, so schätzt er doch über alles die Messung der Pyramiden, daß du nämlich ohne alle Mühe und ohne eines Instruments zu bedürfen, indem du nur den Stock in den Erdpunkt des Schattens steckst, den die Pyramide wirft, aus den durch die Berührung des Sonnenstrahls entstehenden zwei Dreiecken zeigest, daß der eine Schatten zum andern das nämliche Verhältnis hat wie die Pyramide zum Stock.«

Erklären Sie die angewandte Methode!

Die Zahlenschreibweise der Griechen um 500 v. u. Z.

Die Griechen symbolisierten seit etwa 500 v. u. Z. jede natürlich Zahl von 1 bis 9 durch die ersten neun Buchstaben des griech: schen Alphabets. Durch die nächsten neun Buchstaben wurden di Zehner von 10 bis 90, die Hunderter von 100 bis 900 durch die letz ten neun Buchstaben dargestellt. Sie sparten im Vergleich zu de Ägyptern und Römern viel Platz ein.

3 semitische Buchstaben Vau digamma

Alpha	α:	1	Iota	ι:	10	Rho	ϱ:	100
Beta	β:	2	Kappa	$\varkappa$:	20	Sigma	σ:	200
Gamma	γ:	3	Lambda	λ:	30	Tau	τ:	300
Delta	δ:	4	My	μ:	40	Ypsilon	υ:	400
Epsilon	ε:	5	Ny	ν:	50	Phi	φ:	500
Vau	Ϝ:	6	Xi	ξ:	60	Chi	χ:	600
Zeta	ζ:	7	Omikron	o:	70	Psi	ψ:	700
Eta	η:	8	Pi	π:	80	Omega	ω:	800
Theta	ϑ:	9	Koppa	ϙ:	90	Sampi	ϡ:	900

$,\alpha = 1000$ $,\beta = 2000$ usw.

Beispiele: 222: $\sigma\varkappa\beta$ 404: $\upsilon\delta$ 440: $\upsilon\mu$ 1111: $,\alpha\varrho\iota\alpha$ usw.

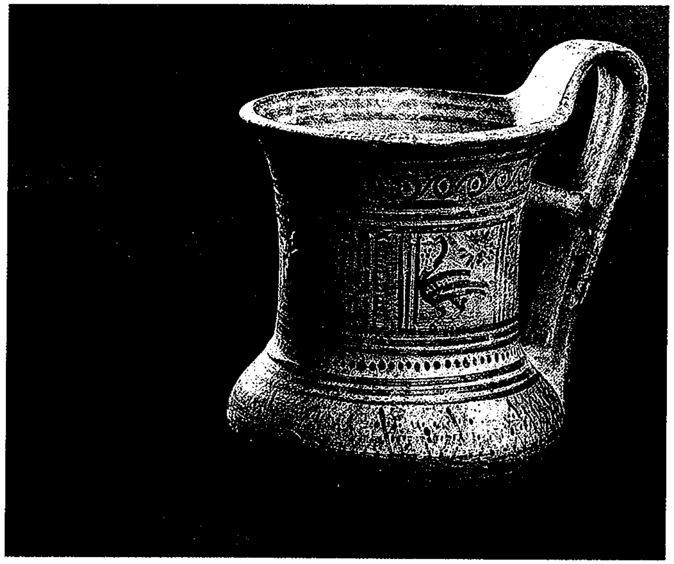


Bild 6
Zwei griechische Becher (6. Jh. v. u. Z.) – Zeichen hoher antiker Kunst im Mittelmeerraum
Mit freundlicher Genehmigung des Antikenmuseums der Universität Leipzig

Pythagoras und die Pythagoreer

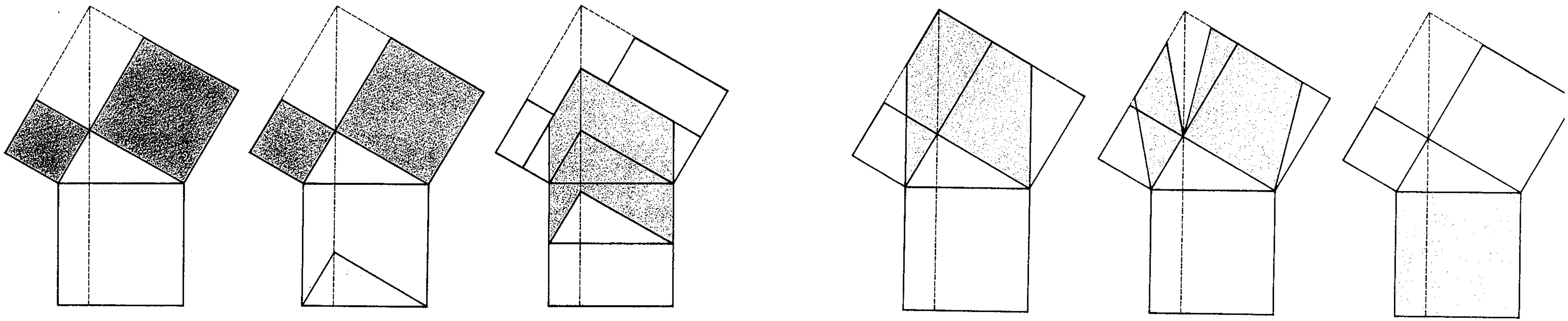
Von fast mystischer Größe tritt uns die Person des Pythagoras in der Überlieferung entgegen. Der Grund liegt in dem Wirken des Geheimbundes, dem »Bund der Pythagoreer«, jener Gruppe von Menschen, die sich um Pythagoras geschart hatte.

Pythagoras wurde um 580 v. u. Z. als Sohn eines wohlhabenden Kaufmanns auf der Insel Samos geboren. Als Mitarbeiter des väterlichen Handelshauses hatte er Ägypten, Italien, Kleinasien, vielleicht sogar Persien und Babylonien bereist. Damals waren die Griechen das bedeutendste Handelsvolk des östlichen Mittelmeeres. Pythagoras ließ sich nach umfangreichen Reisen in Kroton (Süditalien) nieder und versammelte junge Menschen um sich. Wir dürfen annehmen, daß von ihm und seinen Schülern neue Gedanken ausgingen, insbesondere die der Loslösung der mathematischen Lehre von den praktischen Aufgaben und die der Erhebung der Mathematik zu wissenschaftlicher Allgemeinheit.

Pythagoras hat den nach ihm benannten Satz nicht gefunden, er soll aber der erste gewesen sein, der einen vollgültigen Beweis dafür erbrachte. Schon die Babylonier haben sich mit diesem Lehrsatz beschäftigt.

Die Zahlenlehre ist die Grundlage der Philosophie der Pythagoreer. Die Einteilung der Zahlen in gerade und ungerade, die Beschäftigung mit Quadratzahlen, etwa daß a^2 und a^3 Flächen bzw.

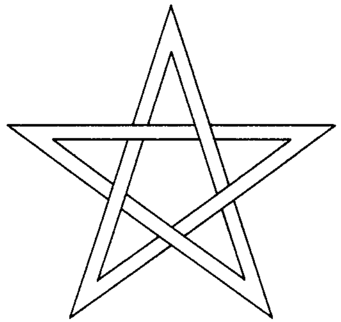
Bild 7
Satz des Pythagoras – Beweis ohne Worte



Körper sind, waren Gegenstand der Forschung des Pythagoras ur seiner Schüler.

Eine der bedeutendsten Entdeckungen war die der stetigen Pr portion $a:b = b:(a-b)$. Welche Bedeutung Pythagoras und seir Schüler dem beimaßen, zeigt die Legende über Tieropfer und d Umstand, daß das auf stetiger Teilung beruhende regelmäßi Fünfeck in der Form des Sternfünfecks zum Zeichen des Bund

Bild 8
Das Pentagramm, Ordenszeichen der Pythagoreer



gemacht wurde. All diese Ideen gipfelten in dem Satz, daß das W sen der Welt die Zahl sei. Wenn auch zahlreiche neue Erkenn nisse dieser Zeit zu mystischen Spielereien wurden, so waren s doch immer wieder Anlaß zum Studium mathematischer Problen und brachten damit die Wissenschaft ein Stück weiter. Da sich d

Pythagoreer später auch in die Politik einmischten, wurde der Bund um 470 v. u. Z. von den Machthabern in Süditalien aufgelöst. Einige seiner Mitglieder endeten auf dem Scheiterhaufen.

Aus der Vielzahl mathematischer Ideen dieser Denkschule wollen wir im folgenden einige mathematische Aufgaben vorstellen.

Der Satz des Pythagoras aus dem Buch des Euklid:

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Das heißt zu Deutsch: In den rechtwinkligen Dreiecken ist das Quadrat über der dem rechten Winkel unterspannten Seite gleich den Quadraten über den den rechten Winkel einschließenden Seiten.

Bei an-Nairimi (um 900 u. Z.) – ins Lateinische übersetzt von Gerhard von Cremona (Anf. 12. Jh.) – findet sich die Formulierung: »Omnis trianguli orthogonii quadratum factum ex latere subtenso angulo recto equale est coniunctioni duorum quadratorum, qui fiunt ex duobus lateribus, qui continent angulum rectum.«

In der Übersetzung: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das über der dem rechten Winkel unterspannten Seite gebildete Quadrat gleich der Summe der beiden Quadrate, die aus den beiden Seiten, die den rechten Winkel enthalten, gebildet werden.

Bild 9
Münze mit dem Bildnis des Pythagoras. Bronzemünze des Trajanus Decius (um 250 v. u. Z.) aus Samos (links). Auf der Münzrückseite ist Pythagoras dargestellt.
Mit freundlicher Genehmigung der Staatlichen Museen zu Berlin, Münzkabinett
Foto: Ingrid Hänse, Leipzig

Wenden wir uns einigen Zerlegungsbeweisen zu:

4

a) Zeichnen Sie auf Karton, eventuell in größerem Format, die Bild 10 dargelegte Figur, schneiden Sie die 7 Teile der beiden I thetenquadrate aus, und legen Sie diese so, daß das Hypotenus quadrat vollständig bedeckt ist! (Zerlegung nach Gutheil, na 1900)

Bild 10

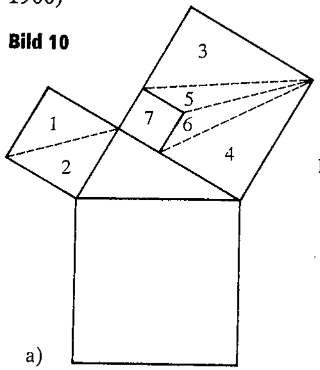
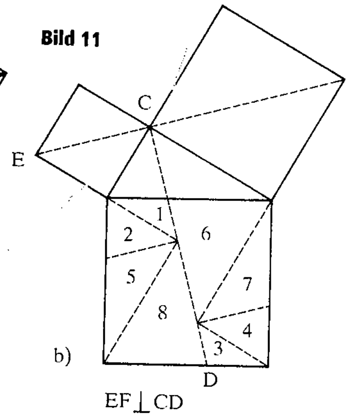


Bild 11



b) Zeichnen Sie auf Karton die in Bild 11 dargelegte Figur, schn den Sie die 8 Teile des Hypotenusenquadrats aus, und legen Sie s so auf die beiden Kathetenquadrate, daß sie vollständig überdec werden! (Zerlegung nach Epstein, um 1900)

5

Eine Strecke der Länge a ist dann stetig geteilt, wenn gi $a:v = b:(a-b)$.

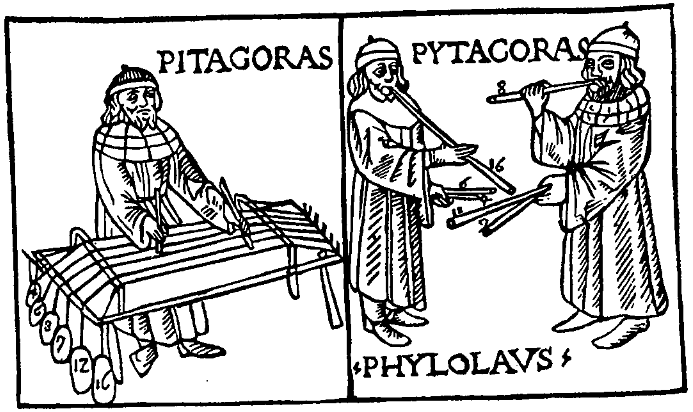
Untersuchen Sie, ob es im Bereich der natürlichen Zahlen von bis 100 Maßzahlen gibt, so daß a und b und auch $(a-b)$ jewei ganze Zahlen sind!

6

Das Bild 8 zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen Eck punkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels dieser Spitzen!

Bild 12
Pythagoras als Musiker, Holzschnitt aus »Theorica Musicae« von F. Gafarius, Milano (Mailand) 1492. Die Pythagoreer beschäftigten sich mit der Akustik. Durch Experimente entwickelten sie das sogenannte Monocord, ein einsaitiges Instrument. Mit ihm konnten sie Töne erzeugen. Die Pythagoreer bevorzugten besonders das Spiel in Quinten und entwickelten ein sogenanntes pythagoreisches Quintensystem. Auf unserem Bild wird darauf hingewiesen.



7

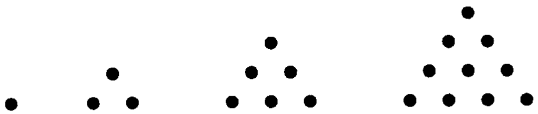
Die Pythagoreer fanden folgende Eigenschaften der Quadratzahlen:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \text{ usw.}$$

Es ist zu prüfen, ob die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 99 eine Quadratzahl ergibt.

8

Bereits die Pythagoreer kannten die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks. Daß sie dieser Konstruktion große Bedeutung beimaßen, geht daraus hervor, daß sie dem Sternfünfeck, das aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks besteht, dem sogenannten Pentagramm, mancherlei mystische Bedeutung zuschrieben.



1 $\quad 1 + 2 = 3 \quad 1 + 2 + 3 = 6 \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ usw.

Konstruieren Sie ein Fünfeck nach dem Satz: Die Seite des reg mäßigen Zehnecks ist der größere Abschnitt des nach dem Gol nen Schnitt geteilten Umkreisradius!

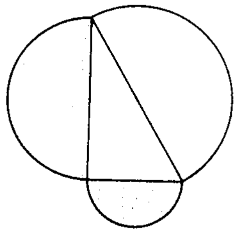
Als Hinweis: $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

9

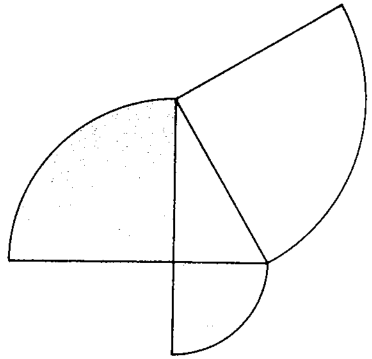
Der aus der Schillerschen Ballade bekannte Polykrates von Samos soll dem Pythagoras die folgende Aufgabe gestellt haben:

»Gepriesener Pythagoras, helikonischer Sproß der Musen, bea worte meine Frage: ›Wie viele in deinem Haus sind mit wiss

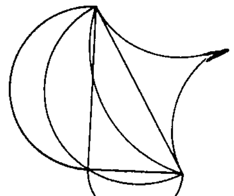
Bild 13
Es müssen nicht immer Quadrate sein.



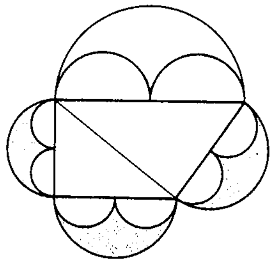
a) $\frac{\pi}{8} a^2 + \frac{\pi}{8} b^2 = \frac{\pi}{8} c^2$



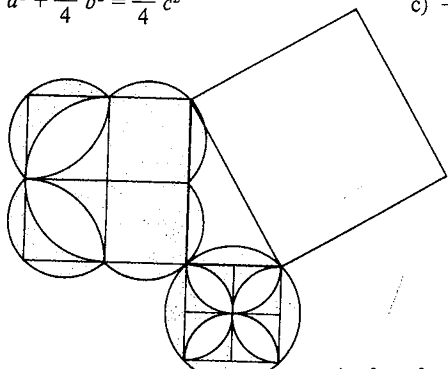
b) $\frac{\pi}{4} a^2 + \frac{\pi}{4} b^2 = \frac{\pi}{4} c^2$



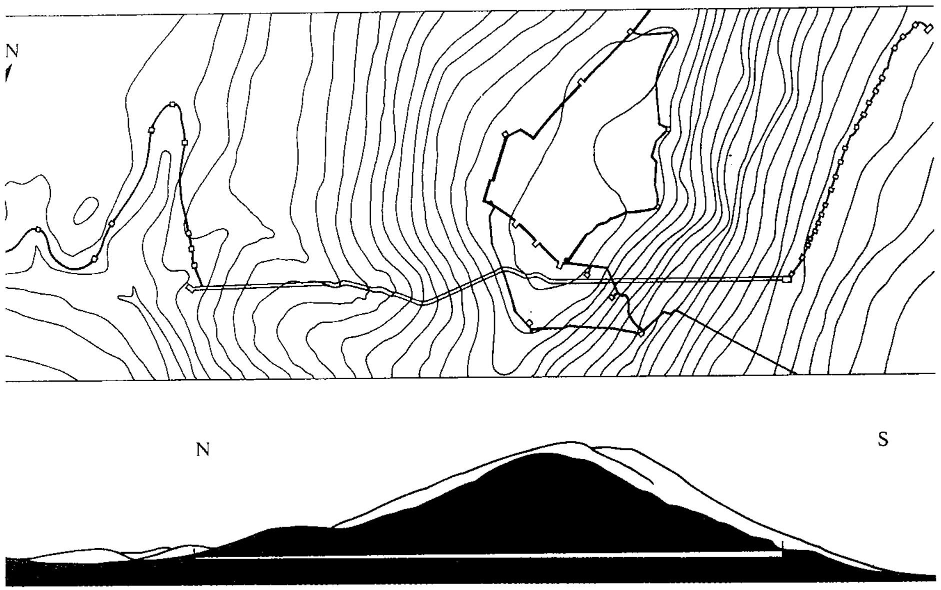
c) $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$



d) $\frac{\pi a^2}{16} + \frac{\pi b^2}{16} + \frac{\pi c^2}{16} = \frac{\pi d^2}{16}$



e) $a^2 + b^2 = c^2$



14
Lageplan der Wasserlei-
, darunter der Schnitt
h den Stadtmauerberg
Samos

Ein Meisterwerk althellenistischer Ingenieurkunst – der unterirdische Aquädukt von Samos. Der griechische Geschichtsschreiber Herodot (490–nach 430) schreibt: »... Erstens haben sie durch einen 150 Klafter (222,00 m) hohen Berg einen Tunnel gebohrt, der am Fuße des Berges beginnt und nach beiden Seiten Mündungen hat. Dieser Tunnel ist 7 Stadien (1 056 m) lang und 8 Fuß (2,385 m) breit und hoch. Unter diesem Tunnel ist in seiner ganzen Länge nach noch ein zweiter, 20 Ellen (8,88 m) tiefer und 3 Fuß (Überlieferungsfehler, es muß heißen 2 Fuß, 0,592 m) breiter Tunnel gegraben. Durch diesen letzteren wird aus einer Quelle das Wasser in Röhren in die Stadt geleitet.«
Berühmt war diese nicht hoch genug einzuschätzende Ingenieurleistung schon im Altertum. In unserer Zeit reizte es viele Forscher und Reisende, den Tunnel aufzuspüren, der schließlich 1881 gefunden und daraufhin genau vermessen wurde. 1959 wurde er erneut mit modernen Meßinstrumenten untersucht. In jedem Falle bestätigten sich die Angaben und Zahlenwerte des Herodot. Eine Meisterleistung! Die Archäologen haben festgestellt, daß der Tunnel von den beiden Mündungen aus gegraben wurde. Nach zehn Jahren trafen die Arbeiter von beiden Seiten zusammen mit einem Fehler von nicht ganz 10 m in waagerechter und 3 m in senkrechter Richtung. Der Tunnel ist mit Gefälle gebaut, so daß das Wasser leicht abfließen konnte. Als Meßgerät beim Bau wurde ein Diopter (siehe Bild 15) verwendet.

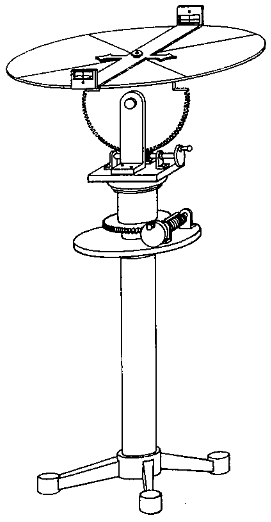
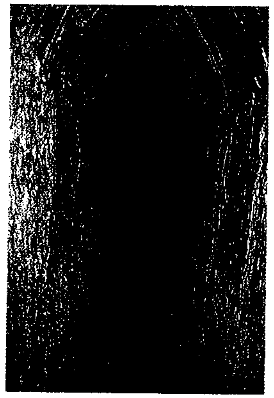


Bild 15
Diopter

Bild 16
Ein Blick in den unterirdischen Aquädukt
Foto: H. Kienast, Athen



schaftlichen Dingen beschäftigt?‹« Pythagoras antwortete: »Ich werde es dir erzählen, Polykrates. Die Hälfte von ihnen befaßt sich mit schöner Literatur; ein Viertel widmet sich dem Studium der unsterblichen Natur; ein Siebentel ist eifrig bedacht auf Ruhe und den ewigen Ruf ihrer Herzen. Außerdem gibt es noch drei Frauen, und über dem Rest ist Theano. Dies ist die Anzahl von Interpreten der Musen, die um mich herum versammelt sind.«

Wie viele Musen sind es? (Theano wird nicht mitgezählt)?

Diese und ähnliche Aufgaben, in den verschiedensten Varianten, waren bei Schülerwettbewerben an öffentlichen und privaten Schulen Griechenlands sehr beliebt.

10

Die Summen der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen ganzen Zahl n lassen eine Folge von ganzen Zahlen entstehen, die als Dreieckszahlen bezeichnet werden. Denn jede dieser ganzen Zahlen kann als eine Anzahl von Punkten dargestellt werden, die in Form eines Dreiecks angeordnet sind.

Diese Dreieckszahlen 1; 3; 6; 10;... haben verschiedene Eigenschaften. Hier sollen Sie eine solche Eigenschaft selbst untersuchen.

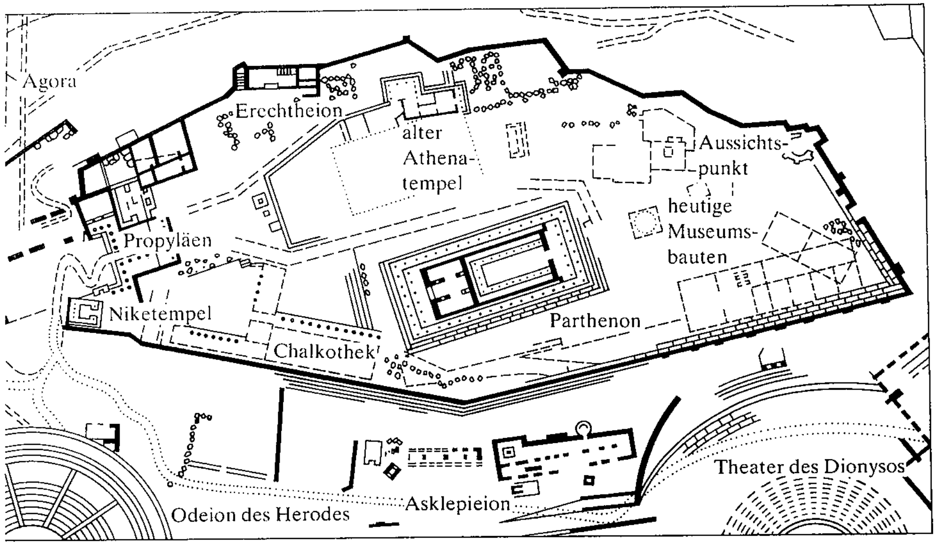
Was können Sie über die Differenzen der Quadrate zweier beliebiger aufeinanderfolgender Dreieckszahlen sagen?

Formulieren Sie Ihr Ergebnis. Versuchen Sie, es zu beweisen!

Athener Skizzen

Athen (Stadt der Athena), die Hauptstadt Attikas, lag inmitten einer großen, von Gebirgen umgebenen Ebene, fünf Kilometer von der Ägäis und acht Kilometer von ihrem Haupthafen Piräus entfernt, mit dem sie seit 465 v. u. Z. durch Mauern verbunden war. Den Mittelpunkt der Stadt mit ca. 100 000 Einwohnern (um 430 v. u. Z.) bildete der 156 m hohe, nur von Westen her zugängliche Kalksteinfels der Akropolis, einst stark befestigter Königssitz.

Mit der Schließung der Universität und dem Abbau vieler Kunstwerke zur Ausschmückung der neuen Hauptstadt Konstantinopel sowie der Umwandlung der Tempel in Kirchen im 3. Jh. u. Z. begann ihr Niedergang.



17
Akropolis von Athen
len wichtigsten Bauten

11

Die Stadt Athen hatte (ohne ihren Hafen Piräus) zur Zeit des Themistokles (um 527 bis um 459 v. u. Z.) einen solchen Umfang, daß man den Umkreis bei einer Geschwindigkeit von 25 Stadien pro Stunde in zwei Stunden zurücklegen konnte.

Berechnen Sie den Umfang der Stadt (in km) und die Geschwindigkeit in km/h (1 Stadion = 185 m)!

12

Ein Wort zum Städtebau im klassischen Griechenland. Die Städte im klassischen Griechenland hatten, bedingt durch ihre Entstehung, recht unterschiedliche Grundrisse. Große und volkreiche Städte wie Athen, Korinth, Megara, Eretria, Argos und Sparta waren aus kleinen Streusiedlungen entstanden und hatten in der Blütezeit des 5. Jh. v. u. Z. eine altertümliche Struktur mit verwinkelten, oft dem Gelände angepaßten Gassen und Straßen. Andere Städte, die infolge von Zerstörungen durch Kriege oder Naturereignisse (z. B. Überschwemmungen wie im Falle der Stadt Priene) wieder oder neu aufgebaut wurden, zeigen in ihrer Struktur eine strenge Systematik, die deutlich den Einfluß der pythagoreischen

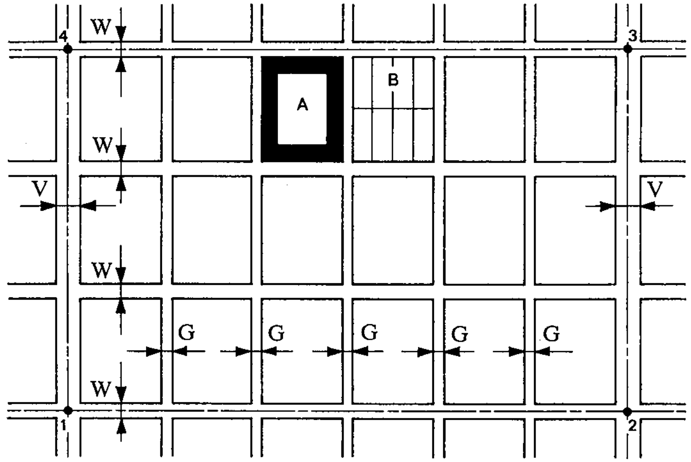
Schule mit ihren Auffassungen über die Harmonie der Zahlen erkennen läßt.

Einer der bedeutendsten Architekten und Städteplaner jener Zeit war Hippodamos von Milet. Das Bild 18 zeigt schematisch die Struktur einer solchen »hippodamischen« Stadt.

Feld A bezeichnet eine sog. Insula. Feld B zeigt eine Form der Aufteilung einer Insula in einzelne Parzellen, wie sie beispielsweise in Priene gefunden wurde. Dabei ist eine Parzelle das Wohngrundstück einer Familie, also das Privathaus.

Die Größenverhältnisse der Parzellen und der Insulae richteten sich nach dem verfügbaren Platz und den Bedürfnissen der Bewohner der Stadt. In der Stadt Priene betrug die Länge einer Parzelle 80 Fuß und ihre Breite 30 Fuß. Eine Insula umfaßte 8 Parzellen, wie im Feld B dargestellt.

Bild 18



Je nach Größe der Stadt (Anzahl der Bewohner) konnten mehrere Insulae zu einem Quartier oder Wohnbezirk zusammengefaßt sein, so daß die gesamte Stadt (Polis) in Wohnbezirke unterteilt war. Die Insulae wurden von Gassen (G) und Wohnstraßen (W) begrenzt. Eigentliche Verkehrsstraßen (V) gab es wenige.

Setzen wir einmal voraus, daß die Abbildung den Entwurf für die Platzaufteilung einer neu zu gründenden Stadt darstellt. Dabei sollen folgende Maße festgelegt sein:

- Länge einer Parzelle: 80 Fuß
- Breite einer Parzelle: 30 Fuß
- Anzahl der Parzellen pro Insula: $2 \cdot 4 = 8$ (wie Feld B)
- Anzahl der Insulae pro Wohnbezirk: $3 \cdot 6 = 18$
- Breite einer Gasse: G = 15 Fuß
- Breite einer Wohnstraße: W = 24 Fuß
- Breite einer Verkehrsstraße: V = 33 Fuß.

Beim Abstecken der künftigen Wohnbezirke soll von den Mittelachsen der Verkehrsstraßen und dgl. der Wohnstraßen ausgegangen werden. (Die Punkte 1, 2, 3 und 4 in Bild 18 sind damit Eckpunkte eines Wohnbezirkes.)

Berechnen Sie

a) die Seitenverhältnisse einer Parzelle,
b) die Seitenverhältnisse einer Insula,
c) die Seitenverhältnisse eines Wohnbezirkes (entsprechend den Eckpunkten in der Abbildung),
d) die Fläche einer Parzelle,
e) die Fläche einer Insula,
f) die Fläche eines Wohnbezirkes,
g) den prozentualen Anteil der Fläche für Gassen und Straßen an der Gesamtfläche des Wohnbezirkes!

Berechnen Sie die verlangten Flächen in »Quadratfuß« und in »Quadratmeter« (1 Fuß = 29,5 cm)!

Griechische klassische Baukunst

Die Griechen bewohnten den Peloponnes, große Teile Kleinasiens, Süditalien mit Sizilien, Nordafrika, Südfrankreich und Teile des Schwarzen Meeres. Sie setzten sich zusammen aus Achäern, Ioniern und Dorern. Sie kannten keine zentrale Staatsmacht, sondern bildeten Stadtstaaten mit einer Regierungsform, »Demokratie der freien Bürger« genannt.

Ihre Architektur entsprach dieser demokratischen Ordnung. Neben Tempeln bauten die Griechen Rathäuser, Sportstätten und Theater. Mittelpunkt des gesellschaftlichen Lebens war der Markt.

Wir stellen einige klassische griechische Bauwerke vor:

Bild 19
Griechische Säulen – dorisch, ionisch und korinthisch

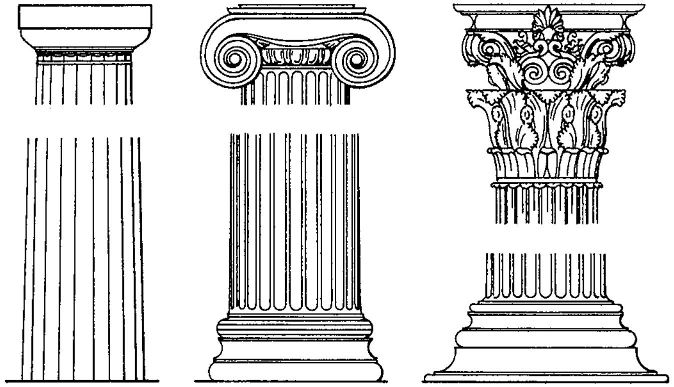
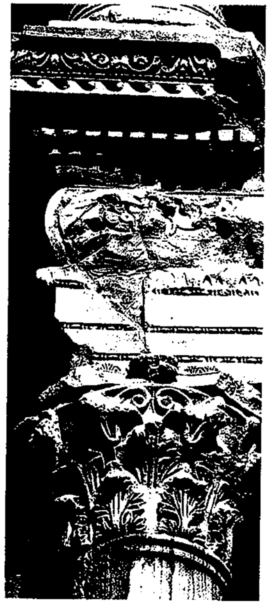


Bild 20
Korinthisches Kapitell
Foto: Johannes Lehmann, Leipzig



Kapitelle: Den obersten Teil von Säulen, Pfeilern und Pilastern nennt man Kapitelle (lateinisch: capitellum, d.h. Köpfchen). Den Indern, Assyrern und Persern waren sie bereits bekannt. Bei den Griechen sind zu unterscheiden: Dorische Kapitelle mit Wulst und Deckplatte, ionische Kapitelle (sogenannte Voluten-Kapitelle) und korinthische Kapitelle (sogenannte Akanthus-Kapitelle).

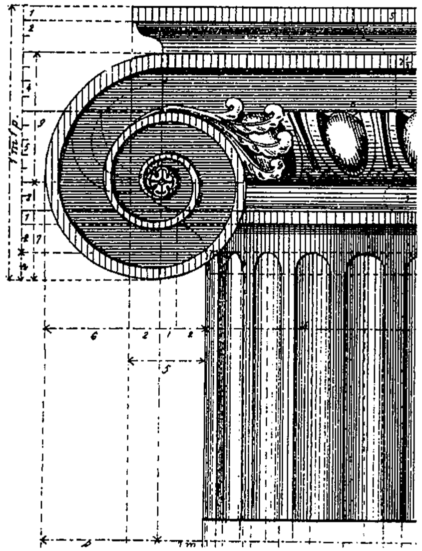
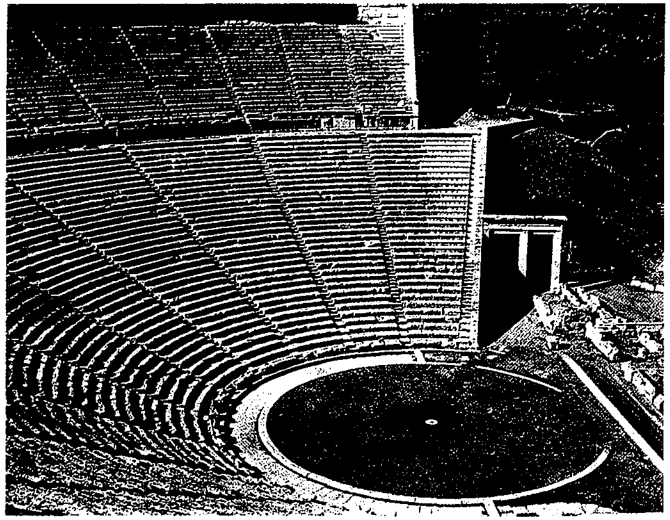


Bild 21
Epidaurus (Peloponnes). Theater, erbaut im 3. Jh. v. u. Z. von Polyklet d. J. Die Griechen waren Freunde des Schauspiels. Epidaurus zeigt die klassische Form des griechischen Theaterbaus. Im Halbkreis sind 34 Reihen angeordnet. Es folgt ein Gang, daran schließen sich weitere 21 Reihen an. Dazwischen verdoppeln sich die strahlenförmigen Treppenzugänge. Auf der kreisrunden Orchestra, die aus einem Altarplatz hervorgegangen ist, sang und tanzte der Chor. Das Theater faßte 14 000 Zuschauer. Es verfügte über eine ausgezeichnete Akustik. Einen Schauspieler, der genau in der Mitte der Orchestra stand und mit normaler Stimme rezitierte, konnte man auch in der oberen Reihe deutlich verstehen.
Foto: Johannes Lehmann, Leipzig



13

Ein alter Grieche ging zum Zeustempel und bat den Göttervater, er möge das Geld, das er in der Tasche habe, verdoppeln. Zeus erhörte sein Gebet, und zum Dank opferte der Mann 8 Goldstücke. Dann ging er zum Tempel Apollos und äußerte die gleiche Bitte. Auch da wurde er erhört und opferte den gleichen Betrag. Alsdann begab er sich zum Tempel der Athene, und alles vollzog sich noch einmal in gleicher Weise. Daheim wollte er feststellen, wieviel Goldstücke er nun habe; dabei kam zu seiner Überraschung zutage, daß er völlig mittellos war.

Wieviel Goldstücke trug er bei sich, als er zum Tempel des Zeus kam?

14

Ein reicher Athener ließ zu einem Gastmahl 13 Ochsen und 41 Schafe im Gesamtwert von 159 Drachmen schlachten. Ein Ochse kostete um 6 Drachmen mehr als ein Schaf.

Wieviel Drachmen bezahlte er für ein Schaf?

Bild 22
Delphi. Die Tholos. Unser Bild zeigt einen Rundbau im Bezirk der Athena Pronaia. Er war der imposanteste Bau des Heiligtums. Gebildet wurde er von einem runden Hauptraum (Cella) mit zehn korinthischen Säulen.
Foto: Johannes Lehmann, Leipzig

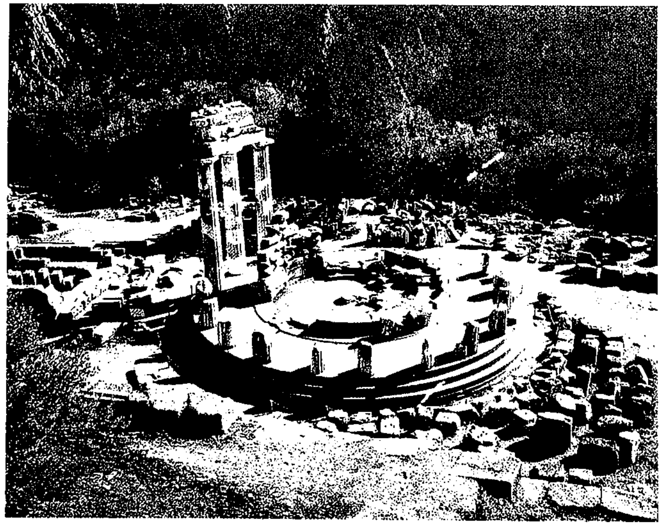


Bild 23
Heinrich Schliemann (1822–1890), der Entdecker von Troja
Die von ihm entwickelte archäologische Methode ist noch heute gültig.

Griechisches Potpourri

15

Der erste mathematische Wettstreit, von dem wir Kunde haben, wurde nach einem legendären Bericht zwischen den beiden größten griechischen Dichtern Homer und Hesiod um 800 v. u. Z. ausgetragen. Bei einer Bestattungsfeier in Chalkis, einer Kleinstadt auf der Insel Euboia, legte Hesiod seinem Rivalen folgende Frage vor: »Weißt du zu sagen, wieviel Volkes die Atriden (griechischer Volksstamm) vormals gegen Ilion (Troja) führten?«

Homer antwortete mit einem Rechenexempel: »Fünfzig an Zahl gab's Feuer im Heer, an jeglichem staken fünfzig Spieße, es schmorten an jeglichem fünfzig Braten, dreimal dreihundert Mann aber speisten von jeglichem Braten.«

Ob Sie das Problem lösen können?

16

Schlacht bei Marathon (490 v. u. Z.). Die bei Marathon von den verbündeten Athenern und Platäern besiegte persische Streitmacht war elfmal so stark wie das griechische Heer und doch noch um das Zehnfache des griechischen Heeres kleiner als das gesamte persische Heer, das aus 210 000 Mann bestand.

Wieviel Mann zählte das bei Marathon kämpfende griechische Heer?

17

Das Gnomon. Bei griechischen Mathematikern wie Aristoteles, Euklid und Heron findet sich die Beziehung Gnomon für folgende Fläche: In ein Parallelogramm *ABCD* mit den Diagonalen $\overline{AC}$ wird ein geometrisch ähnliches Parallelogramm *CGEF* mit der großen Diagonale $\overline{CE}$ so eingezeichnet, daß sich die beiden großen Diagonalen überdecken. Die Differenzfigur aus den beiden Parallelogrammen ist ein Gnomon.

Zeichnen Sie ein Parallelogramm *ABCD* mit der Grundlinie $\overline{AB} = a = 9$ cm, der Höhe $h = 6$ cm und einem Neigungswinkel der beiden Seiten gegen die Grundlinien von 60°! In dieses Parallelogramm zeichnen Sie ein zweites Parallelogramm *EFCG* in der eben beschriebenen Weise ein, wobei dessen Grundlinie $\overline{EF} = b = 6$ cm sein soll. Der so entstehende Gnomon enthält nach Verlängerung der Seiten $\overline{FE}$ und $\overline{GE}$ bis *H* und *I* die beiden kleinen Parallelogramme *IBFE* und *HEGD*.

Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die beiden Flächen der kleinen Parallelogramme zueinander stehen!

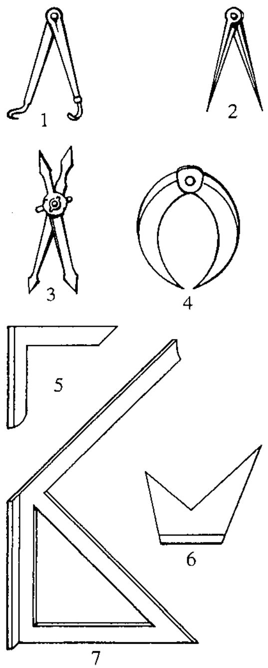


Bild 24
Zirkel im Altertum: 1. Zirkel für Innenwinkel; 2. Normalzirkel; 3. Proportionalzirkel; 4. Hohlzirkel für Außenmessung; 5. Winkel 90°; 6. Fünfwinkel-Messer (Normalwinkel); 7. Winkel aus Eisen für 45°, 90°, 135°.

18

Das Delische Problem (333 v. u. Z.) – die Würfelverdopplung. Wie die Sage erzählt, fragten die Bewohner der Insel Delos das Orakel zu Delphi, was sie tun sollten, um von einer Pest befreit zu werden. Die Antwort lautete, sie sollten den würfelförmigen Altar Apollos verdoppeln, ohne seine Gestalt zu verändern. (Dieses Problem sollte mit Zirkel und Lineal gelöst werden.)

Wie lang wäre die Kante x des neuen Altars, wenn der alte Altar die Kantenlänge $a = 2$ cm hatte?

19

Vollkommene Zahlen. Seit der Antike heißt eine natürliche Zahl eine vollkommene Zahl, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist und die Zahl 1 als Teiler mitgezählt wird, die Zahl selbst

jedoch nicht. Die in den »Elementen« von Euklid erwähnten vollkommenen Zahlen sind 6; 28; 496; 8 128.

Es gilt: Wenn $2^n - 1$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ eine Primzahl ist, dann erhält man aus $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ eine vollkommene Zahl.
Beispiel: Aus $n = 3$ folgt $2^3 - 1 = 7$ (Primzahl); also ist $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 4 = 28$ eine vollkommene Zahl. 28 hat die Teiler 1, 2, 4, 7, 14 und $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Überprüfen Sie, ob für $n = 5$ und $n = 7$ vollkommene Zahlen entstehen!

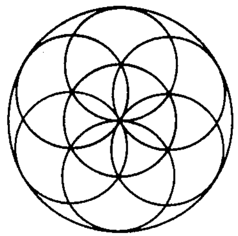


Bild 25

20

Griechische Amulette. Das Amulett sollte Schadenzauber durch feindliche Dämonen und neidische Menschen abwehren, besonders von Krieger und Pferd, Haus und Werkstatt, Werkzeug und Waffen. Man trug das Amulett zugleich als Schmuck umgehängt auf der Brust, als Fingerring oder Armreif, aufgenäht am Gewand (Metallblättchen). Tongebilde (Masken) heftete man als Amulett an Werkstatt und Haus an.

Das Bild 25 zeigt ein frühgriechisches Ornament. Das Muster besteht aus Kreisen und Kreisteilen. Hätten Sie nicht Lust, die Ornamente nachzuzeichnen? Entwerfen Sie Ihr eigenes!

Zenon von Elea

21

Achilles und die Schildkröte. Nach einem Gedankenexperiment des Griechen Zenon aus Elea (490–430 v. u. Z.) kann Achilles eine Schildkröte, die einen Vorsprung von 1 km hat, niemals einholen, obwohl er zehnmal so schnell wie die Schildkröte läuft. Zenon begründet das so: Hat Achilles 1 km zurückgelegt, ist die Schildkröte inzwischen 100 m weitergekrochen. Ist nun Achilles 100 m weitergelaufen, so ist die Schildkröte aber auch weitergekommen, und zwar 10 m, usw. Der Vorsprung wird zwar kleiner, aber es verbleibt immer ein gewisser Vorsprung. Also holt Achilles die Schildkröte nie ein. Unsere Erfahrung spricht gegen diesen Schluß von Zenon.

Wo liegt der Denkfehler? Oder: Nach wieviel Kilometern holt Achilles, der legendäre Krieger im Kampf um Troja, eine Schildkröte ein, wenn diese einen Vorsprung von 1 km hat und Achilles zehnmal so schnell wie die Schildkröte läuft?

Bild 26
Griechische Briefmarke, 18 Drachmen, herausgegeben am 24. 11. 1989.
Das Bild zeigt die Büste des Mathematikers Hippokrates von Chios (griechische Mittelmeerinsel).
Hippokrates gilt als der bedeutendste Geometer der Frühzeit (um 400 v. u. Z.).
Er bezeichnete Punkte und Strecken bei geometrischen Konstruktionen durch Buchstaben, schrieb ein (verschollenes) Buch, die »Elemente«, aufbauend auf Definitionen, Sätzen und Beweisen.

Hippokrates von Chios

Hippokrates (um 440 v. u. Z.) war der berühmteste Mathematiker des 5. Jh. v. u. Z. Er soll beim Seehandel durch Piraten oder betrügerische Zöllner sein gesamtes Vermögen verloren haben. Auf seinen Reisen, besonders aber beim Studium in Athen, erwarb er sich ein hohes Wissen. Das versetzte ihn in die Lage, sich als »Weisheitslehrer« (Sophist) seinen Lebensunterhalt zu verdienen. In einem Lehrbuch faßte er die ihm bekannten geometrischen Erkenntnisse zusammen. Er führte die Bezeichnungsweise von geometrischen Figuren mit Buchstaben ein, verwendete den Begriff der Ähnlichkeit, konnte das regelmäßige Sechseck, den Umkreis zu einem Dreieck, ein gleichschenkliges Dreieck und ein Trapez konstruieren. Er beschäftigte sich mit der Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras (für spitz- und stumpfwinklige Dreiecke) und war in der Lage, jedes Polynom in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Seit dem Altertum bis hin in unsere Zeit bewertete man seine Entdeckung der sogenannten Möndchen des Hippokrates sehr hoch. (Sie stehen in enger Verbindung mit der sogenannten Würfelverdopplung.)

Unter der Quadratur des Kreises versteht man die Aufgabe, nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt einer vorgegebenen Kreisfläche gleich ist. Die Quadratur des Kreises ist nicht ausführbar, da sie darauf hinausläuft, aus einer Einheitsstrecke eine Strecke der Maßzahl zu konstruieren. Die Quadratur mancher Figuren, die aus Kreisbögen zusammengesetzt sind, ist dagegen möglich.

22

Als Möndchen des Hippokrates bezeichnet man Kreiszweiecksflächen, deren Flächeninhalt dem einer quadrierbaren Fläche gleich ist. Umschreibt man z. B. einem Quadrat einen Kreis und errichtet

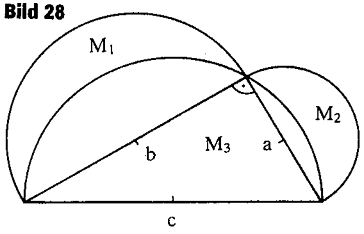
Bild 27
Antike Schreibgeräte mit Holztafel, Doppelwachstafel, Notizbuch aus Wachstäfelchen, Papyrusrolle, Tintenfaß, Metallgriffel, Rohrfeder u. a.
Mit freundlicher Genehmigung der Staatlichen Museen zu Berlin, Antikensammlung

über den Quadratseiten Halbkreise nach außen, so ist die Summe der Flächeninhalte der vier Möndchen dem des Quadrates gleich.
Beweisen Sie den Satz!

23

Hippokrates zeigt, daß die Summe der Möndchen M_1 und M_2 über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC diesem Dreieck flächengleich ist (s. Bild 28).

Bild 28



Dazu ist der Nachweis zu führen.

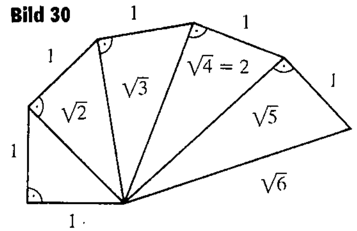
Bild 29
Griechischer Schreiber mit Wachstafel (um 400 v. u. Z.)

Theodoros von Kyrene

24

Bereits Theodoros (um 465 bis nach 399 v. u. Z.) befaßte sich mit dem Problem der Irrationalitäten. Er zeigte, daß $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,..., $\sqrt{17}$ irrationale Zahlen sind, und benutzte durch fortgesetzte Anwendung des Satzes des Pythagoras die Konstruktion der Strecken mit den Längen $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$,..., $\sqrt{17}$ (s. Bild 30).

Bild 30



Führen Sie die begonnene Konstruktion bis $\sqrt{10}$ fort!

Herodot

25

Herodot, (griechisch Herodotos, etwa 484–425 v. u. Z.); ältester griechischer Geschichtsschreiber, berichtet in seiner »Geschichte der Perserkriege«, die Schnelligkeit der persischen Postreiter habe es möglich gemacht, daß eine wichtige von Sardes nach Susa gesandte Depesche an jedem Tag 60 Parasangen zurücklegte. Dieser Depesche sei genau einen Tag später eine zweite Depesche nachgesandt worden, die an jedem Tag 70 Parasangen zurückgelegt und die erste Depesche gerade in Susa eingeholt habe.
Wieviel Kilometer beträgt die Entfernung zwischen Sardes und Susa, wenn 1 Parasang = 5 549 m ist?

Griechische Epigramme

Epigramme (7. Jh.–5. Jh. v. u. Z.) sind ursprünglich (meist zweizeilige, in Hexametern oder Pentametern verfaßte) Inschriften an Bauten, Denkmälern, Bildwerken, später auch geistreiche, häufig satirische Kurzgeschichten. Epigramm-Dichter waren u. a. Catull, Metrodorus, Platon, Heron, Euklid, Sappho: viele aber sind anonym. Eine Reihe von Epigrammsammlungen ist erhalten, zum Beispiel die von Maximus Planudes (um 1350). Sie sind sowohl in Versen als auch in Prosa geschrieben und schließen Hymnen an Götter, Epitaphe, Widmungen und Lobpreisungen ein. Es gibt Beispiele mit exotischen Versmaßen, die als Rätsel, als Orakel oder auch als Mathematikaufgabe daherkommen. Meist fehlen den Aufgaben die Fragestellungen. Man erwartete vom Leser oder Löser, daß er diese selbst findet.

Sehen Sie selbst!

26

»Zu Augeias einmal die gewaltige Kraft des Alkiden
Sprach, ausforschend der Rinder Gesammtzahl. Jener entgegnet:
Rings um die Flut des Alpheios herum, Freund, weidet die Hälfte;
Aber das Achtel der Herd' am Hügel, geweihet dem Kronos;
Um Taraxippos sodann ein Zwölftel noch, fern an der Grenze;
Auch ein Zwanzigstel grast im altehrwürdigen Elis;
Aber den dreißigsten Theil rundum in Arkadien ließ ich.
Was nun übrig der Herd', schaust hier du: die Hälfte von Hundert.«

Berechnen Sie die Gesamtzahl der Rinder!

27

»Einst sprach Kypris zu Eros, der niedergeschlagen daherkam:
Was für ein Kummer beschwert dich, o Sohn? Er entgegnete also:
Hierher stürzend und dort wegschleppten die Musen die Äpfel,
Raffend sie mir aus dem Schoß; sie holt' ich vom Helikon eben.
Kleio das Fünftel mir nahm, Euterpe das Zwölftel der Äpfel;
Aber das Achtel Thaleia, die hehre; das Zwanzigstel dann noch
Packte Melpomene auf; Terpsichore stahl mir das Viertel;
Doch ein Siebentel drauf griff Erato sich zu dem Antheil;
Aber Polymnia auch hat Äpfel mir dreißig geraubet;
Hundertzwanzig erhaschte Urania; mächtig belastet,
Schlich sich Kalliope fort mit dreimal Hundert der Äpfel.
Heim nun komm' ich zu dir, schau her! mit leichteren Händen;
Ließen die Göttinnen doch bloß fünfzig der Äpfel mir übrig.«

Wieviel Äpfel hatte Eros vom Helikon geholt?

28

»Thränen vergießt! Dann gehet vorbei! Hier liegen gesammt wir,
Die des Antiochus Haus stürzend als Gäste begrub.
Ach, den Raum ja verhängte ein Gott zur Stelle des Mahles
Uns und des Grabes zugleich. Siehe! von Tegea sind's
Vier an der Zahl, Messenier zwölf, drauf fünf noch aus Argos;
Aber aus Sparta die Hälft' sämmtlicher Gäste erlag,
Auch Antiochus selbst; ein Fünftel des Fünftels Athener
Waren es, du, o Korinth, weine um Hylas allein.«

Wie viele Personen hielten sich im Hause auf?
(Anmerkung: Antiochus war nicht einer der Spartaner.)

29

»Löwe von Erz, hier steh' ich; es sind Springquellen mir beide
Augen und Mund und die Sohl', rechts an dem Fuße, zusammt.
In zwei Tagen wohl füllt die Cisterne das Auge zur Rechten,
Dieses zur Linken in drei, aber die Sohle in vier.
Endlich genügen dem Mund sechs Stunden zur Füllung.

Wie lang wird's, Wenn sie nun strömen zugleich, Augen und Sohle und Mund?«
(Ein Tag umfaßt hier 12 Stunden.)

30

»Wir drei Liebenden stehen hier und gießen Wasser zum Baden aus, wobei wir Ströme von Wasser in das Becken fließen lassen. Ich auf der rechten Seite fülle es mit meinen langen Füßen im sechsten Teil eines Tages; ich auf der linken Seite mit meinem Krug in vier Stunden und ich in der Mitte mit meinem Bogen in genau einem halben Tag.

Sag mir, in welch kurzer Zeit wir das Becken füllen würden, wenn wir drei gleichzeitig Wasser eingießen!«
(Ein Tag umfaßt hierbei 12 Stunden.)

31

»Wir beiden wiegen zusammen zwanzig Minen, ich, Zethus, und mein Bruder; und wenn du den dritten Teil von mir und den vierten Teil von Amphion hier nimmst, wirst du feststellen, daß es sechs ergibt, und du hast das Gewicht unserer Mutter gefunden.«

Mathematische Wettbewerbe in Olympia

Bei den Gastmahlen, die im Anschluß an die sportlichen Wettkämpfe (Olympiaden) zu Ehren der Sieger stattfanden, wurden vielfach mathematische Wettbewerbe veranstaltet. Dabei galt folgende Ordnung (Regel): Der das Präsidium führende Symposiarch (d. h. der das Gespräch Leitende) stellte eine in Versen gekleidete Rechenaufgabe. Der erste, der die richtige Lösung in Versen zu geben vermochte, hatte nun seinerseits das Recht, eine weitere Aufgabe zu stellen. Es wurden im allgemeinen nicht mehr als neun – diese Zahl ist gleich der Anzahl der neun Schutzgöttinnen der Künste (Musen), Töchter des Zeus – Aufgaben gestellt. Wer die meisten Aufgaben richtig gelöst hatte, bekam als Sieger einen Efeukranz. Gab ein Teilnehmer eine falsche Lösung an, so mußte er einen Becher mit Salzlauge in einem Zuge leeren, während der Sieger mit einem Becher voll gewürzten Weines geehrt wurde. Zwei Beispiele in Epigrammform:

32

»Wie mich der Bruder betrog! Austeilt' er doch fünf der Talente,

Bild 31
Unser Bild zeigt den Eingang und im Hintergrund die Wettkampfbahn in Olympia. Die Bahn hatte eine Länge von 192 m (= 100 Choes, Fuß). Bei den Olympischen Spielen mußten die Läufer zweimal die Länge des Stadions durchlaufen, d. h. 384 m. Die mit Pferden bespannten Rennwagen mußten eine Strecke von 24 Stadien (ca. 4 600 m) zurücklegen. Ein noch größeres Entfernungsmaß war der Dromos. Man bezeichnete die Strecke, die ein Schiff mit Segeln und Rudern an einem Tag zurücklegte, mit 1 Dromos. Eine Reihe dieser Normalen (Urmaß, Prototyp) wurde auf der Akropolis aufbewahrt. Ein Teil der hier genannten Maße wurde um 300 v. u. Z. von den Römern übernommen.
Foto: Johannes Lehmann, Leipzig

Die wir vom Vater ererbt, wider das göttliche Recht.
Seiner Talent' ein Fünftel des Elftels nur siebenmal hab ich
Tränenvergießend. O Zeus, tief ist der Schlaf, den du schläfst.«

Wieviel Talente erhielt der Bruder?

33

»Ich bin Pallas, geschmiedet aus Gold, dies brachten
Zum Opfer Jünglinge, liebend den Sang, dar mir als Weihegeschenk.
Siehe! die Hälfte des Golds gab her Charistios; Thespis
Schenkte das Achtel sodann, Solon den zehenten Theil;
Aber das Zwanzigstel drauf noch Themison. Endlich, was fehlte,
Neun der Talent' und das Werk schafft' Aristodikos her.«

Wieviel Talente wog diese Bildsäule?

Eine andere Version der Aufgabe lautete:

»Zu einer goldenen Bildsäule gab Charistios die Hälfte des Goldes, Thespis ein Achtel, Solon ein Zehntel, Themison ein Zwanzigstel, während Aristodikus neun Talente gab.«

Wieviel Talente wog die Säule? (1 Talent = 36,2 kg)

Bild 32
Ausgrabungsfeld von Olympia
Foto: Johannes Lehmann, Leipzig

Aristarch von Samos

34

In einer Abhandlung leitete Aristarch (griech. Aristarchos, etwa 310–230 v. u. Z.) für das Verhältnis

$$v = \frac{\textit{Abstand Erde–Sonne}}{\textit{Abstand Erde–Mond}} = \frac{v}{x}$$

die Abschätzung $18 < v < 20$ her. In Wahrheit ist v ungefähr 390. Aristarch ging dabei von der richtigen Überlegung aus, daß die Erde E, die Sonne S und der Mond M ein bei M rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn wir genau die Hälfte des Mondes beleuchtet sehen. Man braucht also nur den Winkel α zu messen, um v zu bestimmen.

Berechnen Sie, wie groß dieser Winkel bei $v = 390$ in Wahrheit ist und welche falschen Abschätzungen Aristarch für α gemessen haben muß, um zu seiner Abschätzung für v zu gelangen (s. Bild 33)!

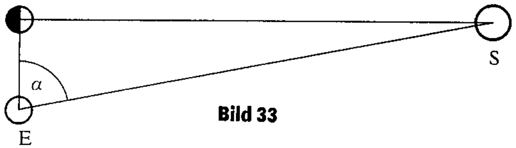


Bild 33

Euklid von Alexandria

Wir wissen von Euklid (um 365–um 300 v. u. Z.) weder Ort noch Zeit der Geburt und des Todes. Er war Grieche, wirkte in Alexandria, der Stadt Alexanders des Großen. Allem Anschein nach war er Direktor der berühmten alexandrinischen Schule. Mit den dreizehn Büchern der »Elemente« des hellenistischen Mathematikers Euklid tritt uns das erfolgreichste Werk der mathematischen Weltliteratur entgegen (mit über 1 400 Ausgaben). In meisterhafter Darstellung vereinigte und systematisierte Euklid das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit mit Ausnahme der Anwendungen der Mathematik.

Das von Euklid gewählte Darstellungsschema »Definition–Satz–Beweis« wurde für mehr als zwei Jahrtausende zum Muster der in der griechischen Tradition stehenden Mathematik. Neben den »Elementen‹ schuf er Schriften zur theoretischen Astronomie, Sphärik und Perspektive.

35

Die fünf sogenannten platonischen Körper sind Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Sie symbolisieren Feuer, Luft, Erde, Wasser und Weltall. Euklid bewies, daß es nur diese fünf regulären Körper gibt.

a) Zeichnen Sie für Tetraeder und Oktaeder zu dem gegebenen Netz das Schrägbild und zu den anderen Körpern jeweils das Netz (s. Bild 34)!

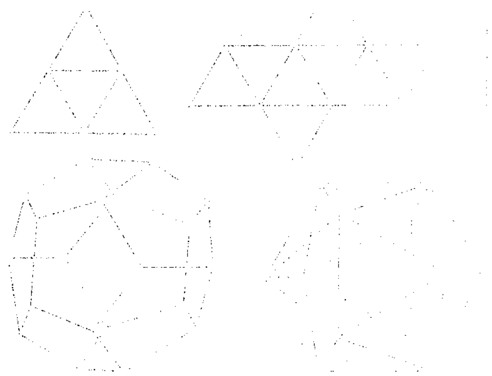


Bild 34
Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder

Bild 35
Euklides, Mathematiker um 300 v. u. Z. Nach einem Relief am Dom zu Florenz. Aus: Uccelli Arturo, Enciclopedia Storica

b) Jeder dieser Körper hat eine ganz bestimmte Anzahl von Ecken, Flächen und Kanten.

Füllen Sie die folgende Tabelle aus!

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Ecken					
Flächen					
Kanten					

Das folgende Epigramm wird Euklid zugeschrieben:

36

Esel und Maultier schritten einher, beladen mit Säcken. Unter dem Drucke der Last schwer stöhnt' und seufzte der Esel. Jenes bemerkte es und sprach zu dem kummerbeladenen Gefährten:
»Alterchen, sprich, was weinst du und jammerst schier wie ein Mägdlein?
Doppelt soviel als du grad' trüg' ich, gäbst du ein Maß mir;
Nähmst du mir eines, so trügen wir dann erst beide dasselbe.
Geometer, du Kundiger, sprich, wieviel sie getragen.«

37

Beschreibt man einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a ein, so ist der Flächeninhalt des Quadrates über einer Dreieckseite dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über dem Radius r des Umkreises k.

Diese Aussage ist zu beweisen.

Sieben Perlen von Euklid

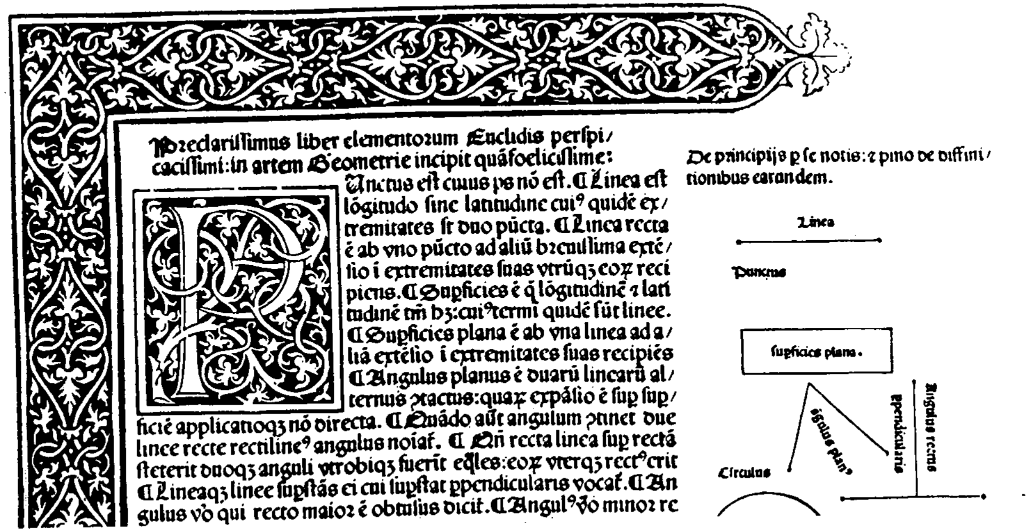
38

Euklid war ein Fürst unter den Mathematikern der Antike. Viele seiner Aufgaben sind, was Raffinesse und Exaktheit angeht, wahre Perlen. Sehen Sie selbst. Wir haben sieben davon für Sie aus Euklids Buch »Die Elemente« entnommen. (Ostwalds Klassiker der Wissenschaft, Euklid, Die Elemente, Leipzig 1984)

1. Eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ ist durch einen inneren Punkt H so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke $\overline{AB}$ und dem Abschnitt $\overline{BH}$ flächengleich ist dem Quadrat über dem Abschnitt $\overline{AH}$.

2. Es ist zu beweisen, daß zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen eines Kreises einander im Schnittpunkt nicht halbieren können!

3. Schneiden im Kreise zwei Sehnen einander, so ist das Rechteck


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quāfoelicissime: Punctus est cuius ps nō est. Linea est lōgitudo sine latitudine cui⁹ quidē extremitates sūt duo pūcta. Linea recta ē ab vno pūcto ad aliū breuissima extēsio i extremitates suas vtrūq3 eorum recipiens. Superficies ē q lōgitudinē et latitudinē tm̄ h3: cui⁹ termi quidē sūt linee. Superficies plana ē ab vna linea ad aliā extēsio i extremitates suas recipiēs. Angulus planus ē duarū linearū alternus ꝯtactus: quarum expāsio ē sup superficiē applicatoq3 nō directa. Quādo aūt angulum ꝯtinet due linee recte rectiline⁹ angulus noiat. Qn recta linea sup rectā steterit duoq3 anguli vtrobiq3 fuerit eq̄les: eorum vterq3 rect⁹ erit Lineaq3 linee supstās ei cui supstat ppendicularis vocat. Angulus vō qui recto maior ē obtusus dicit. Angul⁹ vō minor re

De principijs p se notis: et pmo de diffinitionibus earundem.

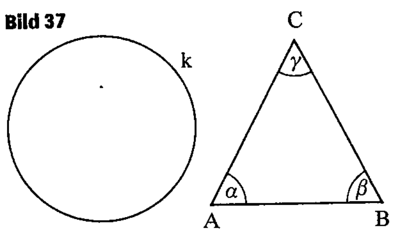
Bild 36
Die »Elemente« des Euklid. Der Ausschnitt aus dem 1. Buch der frühesten Druckausgabe von Venedig 1492 zeigt die verbalen Definitionen und die zeichnerische Veranschaulichung geometrischer Begriffe wie Punkt, Linie, Fläche, Kreis, Winkel, Durchmesser.

aus den Abschnitten der einen Sehne flächengleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sehne.

Dieser Satz ist zu beweisen!

4. Gegeben seien ein Kreis k und ein Dreieck ABC. Diesem Kreis k ist ein Dreieck $A'B'C'$ einzubeschreiben, das dem Dreieck ABC ähnlich ist (s. Bild 37).

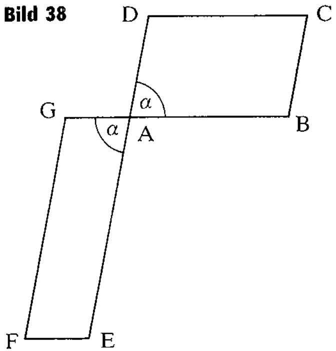
Bild 37



5. Gegeben seien zwei winkelgleiche Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$ mit den kongruenten Scheitelwinkeln BAD und EAG.

Es ist nachzuweisen, daß sich die Seiten dieser Parallelogramme umgekehrt proportional verhalten, d. h., daß $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AG} : \overline{AD}$ gilt (s. Bild 38).

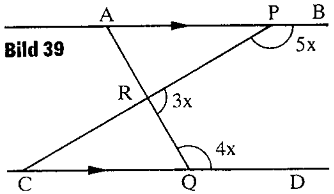
Bild 38



6. *APB* und *CQD* sind parallele Geraden, *ARQ* und *PRC* zwei gerade Strecken, ∢ $PRQ = 3x$, ∢ $BPR = 5x$ und ∢ $DQR = 4x$ (s. Bild 39).

Bestimmen Sie x, und beweisen Sie dann, daß alle Winkel in der Figur zu einer arithmetischen Folge gehören, deren gemeinsame Differenz x ist!

Bild 39



7. *ABCD* ist ein Sehnenviereck mit ∢ $DAB = 3x$. *AB* und *CD* treffen sich im Punkt *P* unter dem Winkel ∢ $APD = x$. *AD* und *BC* treffen sich in *Q* unter dem Winkel ∢ $AQB = 2x$ (s. Bild 40).

Bestimmen Sie x und alle Winkel in der Figur!

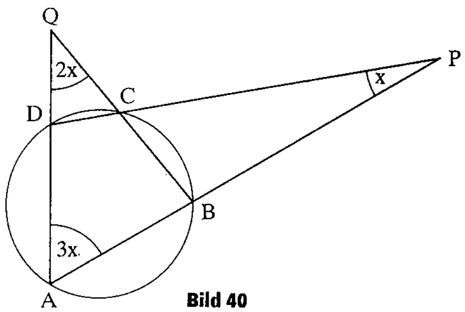


Bild 40

Rund um den Kreis: neun knifflige Fragen

39

Der Leser wird festgestellt haben, daß sich die Griechen intensiv mit der Kreislehre und mit der damit in engem Zusammenhang stehenden Kreiszahl Pi beschäftigt haben; sei es in Theorie oder Praxis. Auch heute spielt dieses Sachgebiet eine bedeutsame Rolle.

Das veranlaßte uns, Aufgaben zur Wiederholung von Grundkenntnissen zusammenzustellen, als Anregung dafür, sich mit weiterführenden Problemen zu befassen.

1. Zunächst eine Aufgabe von Archimedes (287–212 v. u. Z.): Wenn in und um ein Quadrat ein Kreis gezeichnet wird, hat der umschriebene Kreis die doppelte Fläche des eingeschriebenen.

Beweisen Sie das!

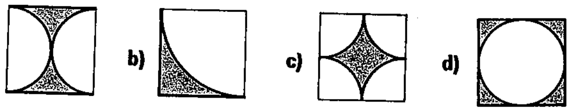
2. Noch eine Aufgabe von Euklid (um 365–um 300 v. u. Z.): Beschreibt man einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ein gleichseitiges Dreieck *ABC* mit der Seitenlänge a ein, so ist der Flächeninhalt des Quadrates über einer Dreieckseite dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über dem Radius r des Umkreises k.

Diese Aussage ist zu beweisen!

3. Welche der gelben Flächen (s. Bilder 41 a)–d)) in den abgebildeten vier kongruenten Quadraten ist am größten?

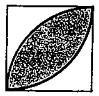
Die Antwort ist zu begründen.

Bild 41 a) b) c) d)



4. Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Quadrates beträgt die im Quadrat gelbe, von zwei Kreisbögen begrenzte Fläche (s. Bild 42)?

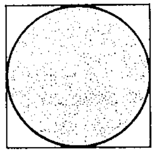
Bild 42



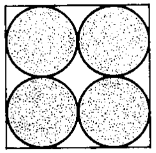
5. Die Bilder 43a) und b) zeigen zwei kongruente Quadrate. Dem einen wurde der Inkreis, dem anderen wurden vier kongruente Kreise einbeschrieben.

Es sind die gelben Flächeninhalte beider Figuren zu vergleichen.

Bild 43a)



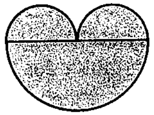
b)



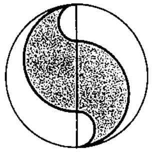
6. Die beiden abgebildeten Figuren haben den gleichen großen Durchmesser *d*.

Es sind die gelb dargestellten Flächeninhalte durch *d* auszudrükken und zu vergleichen (s. Bild 44a) und 44b)).

Bild 44a)



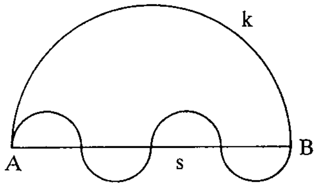
b)



7. Über den Durchmesser $\overline{AB}$ eines Halbkreises k wurden, abwechselnd nach beiden Seiten, vier kleine kongruente Halbkreise gezeichnet, die eine Schlangenlinie s bilden.

Es ist zu untersuchen, welche der drei Beziehungen $k < s$, $k = s$ oder $k > s$ gilt (s. Bild 45).

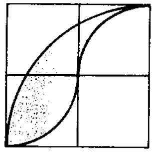
Bild 45



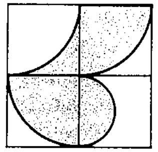
8. Die sechs abgebildeten großen Quadrate (s. Bilder 46a) bis f)) sind jeweils aus vier kongruenten kleineren Quadraten zusammengesetzt.

Die gelben Flächen sind durch die Seitenlänge a eines kleinen Quadrates auszudrücken.

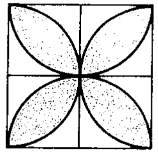
Bild 46a)



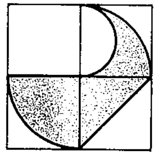
b)



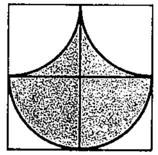
c)



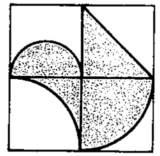
d)



e)



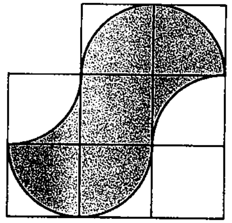
f)



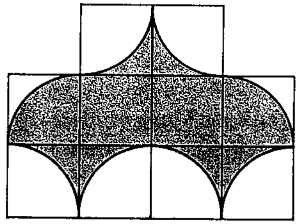
9. Jedes der kleinen Quadrate der drei abgebildeten Figuren (s. Bilder 47a) bis c)) hat die Seitenlänge $a = 1$ cm.

Es ist der Flächeninhalt jeder der drei gelben Flächen zu berechnen.

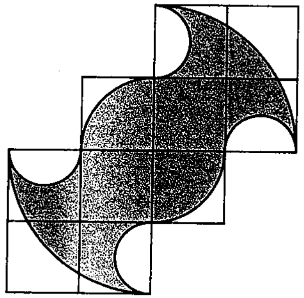
Bild 47a)



b)

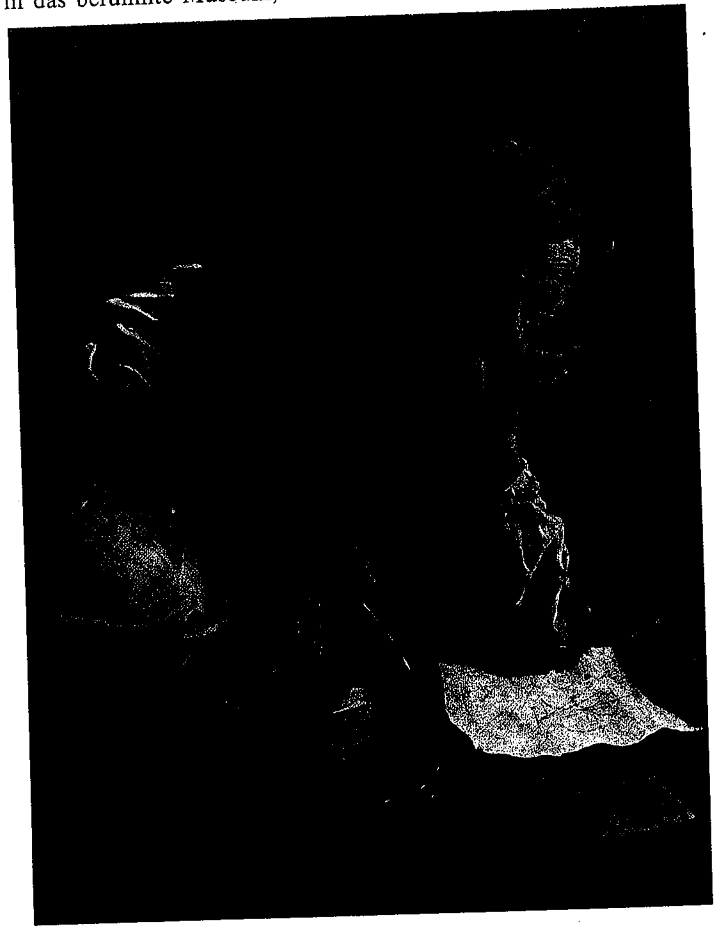


c)



Archimedes von Syrakus

Archimedes (287–212 v. u. Z.) gilt als der vielseitigste und bedeutsamste Mathematiker und Naturwissenschaftler der Antike. Er wurde 287 v. u. Z. als Sohn des Astronomen Pheidios in Syrakus geboren. Sein Vater führte ihn schon frühzeitig an die Beschäftigung mit wissenschaftlichen Problemen heran. Reisen nach Alexandria in das berühmte Museum, ein Zentrum damaliger wissenschaftli-



48
himedes. Gemälde von
nenico Fetti (1589–um
4), Leinwand
< 73,5 cm
hsische Landes-
'iothek, Abt. Deutsche
othek/Würker 1980

cher Forschung, machten Archimedes mit bedeutenden Gelehrten seiner Zeit, aber auch mit Werken früherer Mathematiker, Physiker und Astronomen bekannt und weckten sein Interesse besonders für diese Disziplinen. Bald übertraf er alle in seinen Leistungen. Nach längerem Aufenthalt in Alexandria kehrte er in seine Vaterstadt Syrakus zurück.

Wer kennt sie nicht, die Legende von der goldenen Königskrone? Der Baumeister Vitruvius, der um 100 v. u. Z. am Hofe des Kaisers Augustus lebte, hat sie uns überliefert:
Der König Hieron II. von Syrakus übergibt einem seiner Goldschmiede einen Klumpen reinen Goldes, aus dem dieser einen Weihkranz herstellen soll. Als die Arbeit ausgeführt ist, befürchtet der König jedoch, daß der Handwerker im Innern des Kranzes einen Teil des Goldes durch Silber ersetzt hat. Er wendet sich daher um Rat an Archimedes. Dieser aber kann das Problem nicht sogleich lösen. Als er sich eines Tages baden will, bemerkt er beim Einsteigen in die mit Wasser bis zum Rande voll gefüllte Badewanne, daß wohl ebensoviel Wasser überläuft, wie sein Körper verdrängt. Da kommt ihm plötzlich der Gedanke, daß man die von Hieron gestellte Aufgabe lösen muß, indem man den Kranz in ein voll mit Wasser gefülltes Gefäß taucht und die überlaufende Wassermenge bestimmt. Aus Freude über seine Entdeckung eilt Archimedes nackt aus dem Bade hin zum Tyrannen und ruft:
»Heureka, heureka!« (Ich hab's gefunden, ich hab's gefunden!)

Aus der Vielzahl seiner physikalisch-technischen Forschungsgebiete und Erfindungen seien genannt: Hebel, Winde, die sogenannte archimedische Schnecke. Sie fanden ihren Niederschlag in den Werken »Mechanik«, »Methodik«, »Die schwimmenden Körper«. Sein archimedischer Globus gleicht einem Kleinplanetarium.

Zum Schutze seiner Heimatstadt entwickelte er kriegstechnisches Gerät wie Wurfschleudern, Greifarme, Brennspiegel. Es wurde bei der Abwehr der sechsjährigen römischen Belagerung eingesetzt. Nur durch eine List konnte die Stadt eingenommen werden. Der römische Feldherr Marcellus gab strengsten Befehl, den berühmten Gelehrten und tapferen Gegner unversehrt gefangenzunehmen. Aber durch das Schwert eines aufgebrachten Legionärs wurde Archimedes getötet. Seine letzten Worte – er war gerade mit geometrischen Problemen beschäftigt – sollen gewesen sein: »Noli turbare circulos meos.« (Zerstöre meine Kreise nicht!)

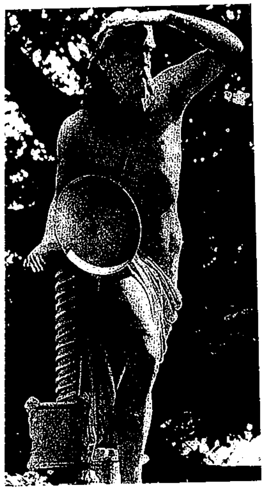


Bild 49
Archimedes auf einer Postkarte aus Syracus.
Das Kunstwerk weist auf die archimedischen Versuche mit Schraube und Hohlspiegel hin.

Einige der bedeutenden mathematischen Leistungen des »Giganten von Syrakus« sollen hier skizziert werden: Archimedes gelang mit Hilfe der Exhaustionsmethode in der Abhandlung »Parabelquadratur« die Flächeninhaltsbestimmung (Quadratur) eines Parabelsegments mit exakt gehandhabten infinitesimalen Methoden (unendliche geometrische Reihe). In seiner »Kreismessung« gab er den sehr guten Näherungswert für

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

für das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser an, und in der »Sandrechnung« wies er die Unbeschränktheit des Zahlensystems nach. Weitere tiefgreifende Abhandlungen betreffen u. a. Kugel, Zylinder, halbregelmäßige Körper (archimedische Körper), Spiralen, Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, der Kreisfläche, ein- und umbeschrieben in ein 96-Eck.

40

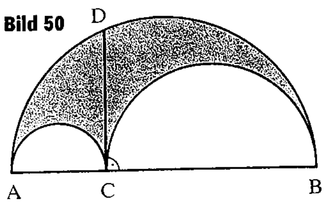
Nach Angaben von Vitruvius wog die Krone (in heutigem Massemaß ausgedrückt) 10 kg und verlor, in Wasser gewogen, 0,625 kg.

Aus wieviel Gold und Silber bestand sie, wenn außer diesen Metallen kein anderer Stoff in der Krone war und das Gold eine Dichte von 19,3 g/cm³, das Silber eine Dichte von 10,5 g/cm³ hat?

41

Das Bild 50 stellt einen Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{AB}$ dar. In einem inneren Punkt C von $\overline{AB}$ wurde die Senkrechte zu $\overline{AB}$ gezeichnet, die den Halbkreis in D schneidet. Über $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ als Durchmesser wurden zwei weitere Halbkreise konstruiert.

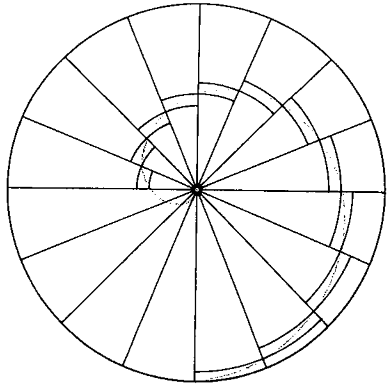
Bild 50



Die gelb dargestellte Fläche nannte Archimedes *Arbelos*. Sie ist gleich dem Flächeninhalt des Kreises mit $\overline{CD}$ als Durchmesser.

Dafür ist der Nachweis zu erbringen.

Bild 51
Die archimedische Spirale. Wenn eine Gerade gleichförmig um einen festen Punkt O gedreht wird und wenn gleichzeitig von O ausgehend ein Punkt P sich gleichförmig längs der Geraden bewegt, dann beschreibt dieser Punkt eine Spirale.



42

Eine Halbkugel, deren Radius $r = 1$ ist, soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in zwei volumengleiche Teile geteilt werden.

In welchem Abstand von der Grundfläche ist der Schnitt zu führen?

Bild 52
Eine Statue des Archimedes von Gerhard Thieme, Berlin – aufgestellt auf dem Innenhof der Technischen Universität Magdeburg
Foto: Peter Schreiber, Stralsund

43

Die folgenden, dem Archimedes bereits bekannten Sätze sind zu beweisen:

a) Die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius mittlere Proportionale zur Höhe des Zylinders und zum Durchmesser seiner Grundfläche ist.

b) Die Fläche der Ellipse hat zur Fläche des Kreises, der die große Achse der Ellipse zum Durchmesser hat, dasselbe Verhältnis wie die kleine Achse der Ellipse zur großen.

c) Der Kreis hat zum Quadrat seines Durchmessers nahezu ein Verhältnis wie 11 : 14.

44

Archimedes hat für $\sqrt{3}$ ermittelt: $\frac{26}{15} > \sqrt{3}$.

Bestätigen Sie diese Beziehung ohne Benutzung der Tafel, und stellen Sie den Fehler in Prozent fest!

45

Das Volumen einer Kugel ist viermal so groß wie das Volumen eines geraden Kreiskegels, dessen Höhe gleich dem Kugelradius ist und dessen Grundfläche den Kugelradius zum Radius hat.

Diese Aussage ist zu beweisen.

46

Die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels verhält sich zur Grundfläche des Kegels wie die Mantellinie des Kegels zum Radius seiner Grundfläche.

Begründen Sie diese Aussage!

47

Die Flächeninhalte des Umkreises und des Inkreises eines Quadrates verhalten sich wie 2 : 1.

Dieser Satz ist zu beweisen.

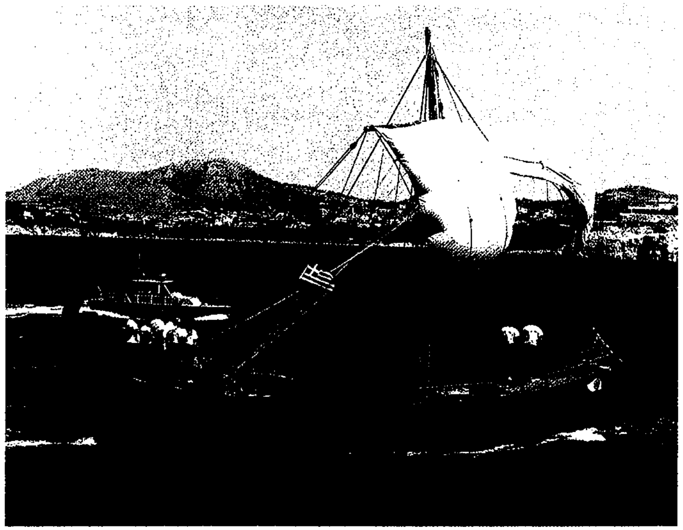
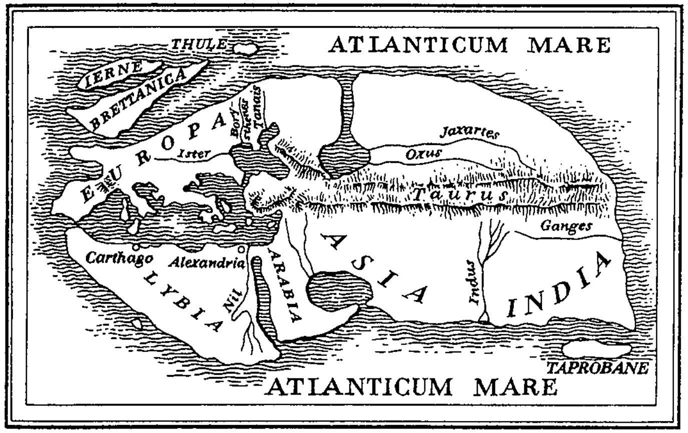


Bild 53
Kyrenia II, ein nach antiken Modellen nachgebautes Schiff. Es ist 14,75 m lang, aus Zedernholz und wird ausschließlich durch Ruder und ein etwa 60 Quadratmeter großes trapezförmiges Segel fortbewegt. Es nahm auf seiner Jungfernfahrt am 6. 9. 1986 von Piräus nach Zypern Frachten mit, die vor über 2 000 Jahren gehandelt wurden.
Foto: ADN GmbH, Bildarchiv

Eratosthenes von Kyrene

Der griechische Gelehrte und Dichter Eratosthenes (etwa 276–etwa 194 v. u. Z.) ist vor allem bekannt durch die Einführung einer chronologischen Zählung nach Olympiaden sowie durch sein dreibändiges geographisches Werk, in dem er als erster eine umfassende kartographische Aufnahme der Erdoberfläche versuchte. Eratosthenes führte eine erstaunlich genaue Messung des Erdumfangs durch. Er wußte, daß in Assuan (Oberägypten) die Sonne am Mittag des längsten Tages im Zenit steht. Zu diesem Zeitpunkt bestimmte er den Winkel, unter dem man in Alexandria die Sonne sieht, und fand eine Abweichung von 7,2° zum Lot. Nach einer Messung liegt Alexandria etwa 5000 ägyptische Stadien nördlich von Assuan. Mit Hilfe dieser Angaben berechnete er den Erdumfang.

Bild 54
Weltkarte des Eratosthenes von Kyrene (Syrien), Eratosthenes war Prinzenerzieher und Leiter der Bibliothek von Alexandria. Er war nicht nur Mathematiker, sondern auch Geograph, u. a. entwarf er eine Erdkarte mit Hilfe eines Koordinatennetzes mit Parallelkreisen und Meridianen.



48

a) Wieviel ägyptische Stadien zählte der Erdumfang?

b) Rechnen Sie diesen Wert in km um, wenn einem ägyptischen Stadion 184,72 m entsprechen!

c) Vergleichen Sie den damals ermittelten Erdumfang mit dem heute bestimmten, d. h. etwa 40 000 km!

49

Die größte bisher bekannte Primzahl ist ein 65 087 Ziffern umfassendes Ungetüm. Es erblickte nach jahrelanger Rechnerei von Forschern der kalifornischen Computerfirma Amdahl Corporation das Licht der Mathematik. Die neue Rekordzahl ergibt sich als $2^{216193} \cdot 391\,581 - 1$. Weitere werden folgen.

Aus dem Unterricht kennen wir die Methode zur Auffindung aller Primzahlen. Sie wird als das »Sieb des Eratosthenes« bezeichnet. Sie besteht darin, daß alle ungeraden Zahlen der Reihe nach aufgeschrieben werden und dann die Vielfachen der vorangehenden bereits ermittelten Primzahlen auszustreichen sind.

$3 \quad 5 \quad 7 \quad \cancel{9} \quad 11 \quad 13 \quad \cancel{15} \quad 17 \quad 19 \quad \cancel{21} \quad 23 \quad \cancel{25} \quad \cancel{27} \quad \ldots$

Setzen Sie die Reihe fort bis 100!

50

Beweisen Sie, daß $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist, wenn p eine Primzahl ist, die größer als 3 ist!

51

Zeigen Sie, daß alle Primzahlen außer den ersten drei von der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ sind!

Wie kann man diesen Satz auf das »Sieb des Eratosthenes« anwenden?

Apollonius von Perge

Apollonius (griech. Apollonios, etwa 262–etwa 190 v. u. Z.) war ein bedeutender hellenistischer Geometer und Astronom. Er studierte als Schüler Euklids am Museum von Alexandria und wirkte hauptsächlich in Pergamon. In seinem acht Bücher zählenden Hauptwerk »Konika« (Schnitte) faßte er die Ergebnisse der antiken Lehre von den Kegelschnitten zusammen und führte sie in tiefgründigen eigenen Forschungen weiter.

Unter dem Namen »Berührungsproblem des Apollonius« werden Aufgaben zusammengefaßt, die darin bestehen, Kreise zu konstruieren, die drei gegebene Kreise berühren. Dabei ist zugelassen, daß die gegebenen Kreise in Punkte oder auch Geraden entartet sind,

so daß sich zehn verschiedene Fälle ergeben. Ob ein Kreis durch einen Punkt geht oder einen Punkt berührt, ist dasselbe.

	Punkte	Geraden	Kreise		Punkte	Geraden	Kreise
1.	3	–	–	6.	1	1	1
2.	2	1	–	7.	–	1	2
3.	2	–	1	8.	–	2	1
4.	1	2	–	9.	–	3	–
5.	1	–	2	10.	–	–	3

52

a) Gegeben seien eine Gerade g und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von g mit unterschiedlichen Abständen von g.

Es ist ein Kreis k zu konstruieren, der durch P und Q geht und die Gerade g berührt.

b) Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 geht und eine gegebene Gerade g berührt.

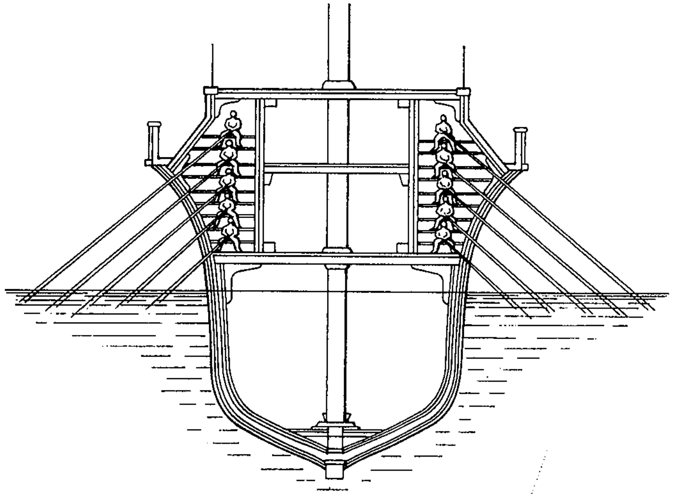


Bild 55
Rekonstruktion einer Pentere, d. h. eines Schiffes mit fünf Decks übereinander. Die Riemen (Ruder) hatten unterschiedliche Länge zwischen 2,25 m und 5,85 m. Mit ihnen war kaum noch Takt beim Rudern zu halten. Auf einer Bank saßen fünfzig Ruderer. Ein solches Schiff war bis zu 45 m lang, mit 800 bis 900 Ruderern besetzt.

Heron von Alexandria

Heron (um 75 u. Z.) – mit dem Beinamen »der Mechaniker« – wirkte in Alexandria als Ingenieur, Mathematiker und Vermessungstechniker. Er verband, wie er selbst sagt, Wissenschaft und Praxis, schrieb zahlreiche naturwissenschaftliche Bücher, oft lehrbuchartig, mit Illustrationen und Rechenbeispielen versehen. Heron gab zugleich Anleitungen für den Apparatebau. So beschäftigte er sich mit Vermessungskunde, Geschützkunde sowie Mechanik mit Hebel, Keil, Flaschenzug, Gewölbekonstruktionen, mit Luft- und Dampfdruck und behandelte Flächen- und Volumenberechnungen.

53

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes, wenn $s = 8$ (Längeneinheiten und $h = 3$ (Längeneinheiten), indem Sie die Formel benutzen, die Heron in seiner »Metrica« verwendet:

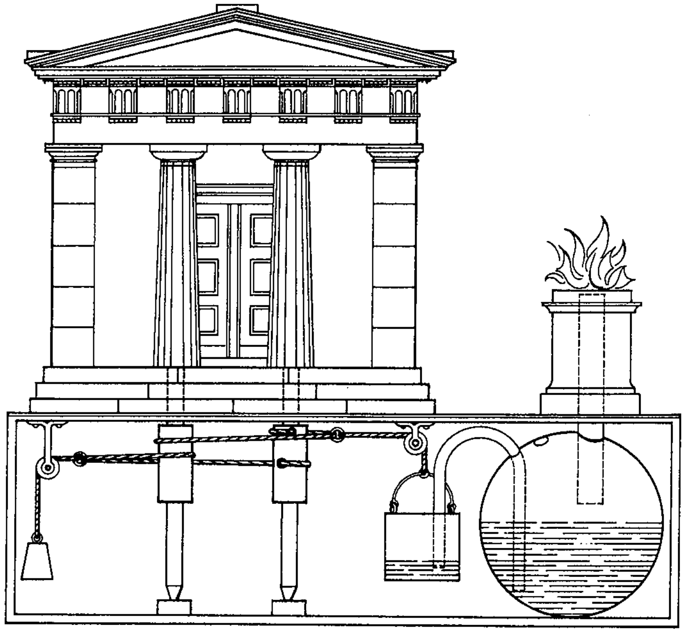


Bild 56
Herons Konstruktion zum selbsttätigen Öffnen einer Tempeltür. Durch das Feuer auf dem Altar (rechts) wird Luft erwärmt und ausgedehnt. Sie drückt Wasser aus dem rechten Gefäß ins linke, das mit zunehmendem Gewicht über Seilrollen die Türangeln bewegt.

$$A = \frac{h(s+h)}{2} + \frac{1}{14}\left(\frac{5}{2}\right)^2!$$

b) Rechnen Sie die gleiche Aufgabe mit den heute üblichen Mitteln durch, und vergleichen Sie beide Ergebnisse!

Heron berechnete $\sqrt{2}$ wie folgt:

$\sqrt{2} = x;\ x^2 = 2;\ x = \frac{2}{x}$. Wählt man für $\sqrt{2}$ zunächst den zu kleinen Näherungswert $x_1 = 1{,}4 = \frac{7}{5}$, so ist $\frac{2}{x_1} = \frac{10}{7}$ ein zu großer Näherungswert. Einen wesentlich besseren Näherungswert erhält man, wenn man das arithmetische Mittel x_2 von x_1 und $\frac{2}{x_1}$ bildet. Es ist nämlich

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} + \frac{10}{7}\right) = \frac{99}{70} \approx 1{,}4143.$$

Wiederholt man dieses Verfahren, so erhält man

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{99}{70} + \frac{140}{99}\right) \approx 1{,}414213564.$$

54

Berechnen Sie $\sqrt{3}$
a) mit Hilfe eines elektronischen Taschenrechners;
b) nach dem Heronschen Verfahren, wenn man für $x_1 = 2$ einsetzt!

Ptolemäus von Alexandria

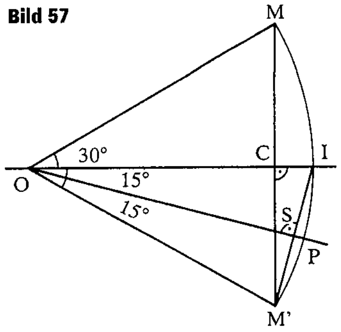
55

Ptolemäus (griech. Ptolemaios, etwa 85–etwa 165 u. Z.) lebte zur gleichen Zeit wie Hipparch. Er konnte sin 15° auf Grund einer anderen Erkenntnis als Hipparch berechnen (s. Bild 57).

$(\overline{OI} = 1)$

Betrachten Sie die Figur, und begründen Sie die folgenden Feststellungen:

Bild 57



$\sin 15° = \overline{IS}$; $2 \cdot \overline{IS} = \overline{IM'}$; $\overline{IM'}^2 = \overline{CM'}^2 + \overline{CI}^2$; $\overline{CM'} = \frac{1}{2}$;

$\overline{CI} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Also ist $\sin 15° = \frac{\sqrt{1 + (2 - \sqrt{3})^2}}{4}$.

Führen Sie die Berechnungen durch, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der Sinustabelle!

56

Beweisen Sie den Satz des Ptolemäus!
Das Produkt aus den Diagonalen eines Sehnenvierecks ergibt denselben Wert wie die Summe der Produkte aus den Paaren gegenüberliegender Seiten.

Menelaos von Alexandria

Menelaos lebte um 100 u. Z. in Rom. Von seinen Büchern, die er als Mathematiker und Astronom schrieb, blieb nur die »Sphärik« (3 Bände) in arabischer Übersetzung erhalten.

57

Beweisen Sie den Satz des Menelaos!
Eine die drei Seiten eines Dreiecks bzw. deren Verlängerungen schneidende Gerade teilt die Dreiecksseiten innen oder außen so, daß die Produkte aus je drei Abschnitten ohne gemeinsame Endpunkte denselben Wert ergeben.

Diophant von Alexandria

Der einzige griechische Mathematiker, der ein Werk über Arithmetik und Algebra schrieb, war Diophant (griech. Diophantos, um 250 u. Z.). Er lebte in Alexandria. Das von ihm geschriebene Werk heißt »Arithmetica«, besteht aus 13 Büchern und enthält 189 Aufgaben. Es behandelt hauptsächlich Gleichungen zweiten und gelegentlich dritten Grades. Diophant suchte nur nach rationalen Lösungen, d. h. Lösungen, die als rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ geschrieben werden können, wobei a und b ganze Zahlen sind ($b \neq 0$). Meistens bietet Diophant nur eine Lösung an, obwohl viele dieser Gleichungen mehr als eine Lösung haben. Bis heute werden derartige Gleichungen »diophantische Gleichungen« genannt; jedoch interessieren uns dabei heute im allgemeinen nur die ganzzahligen und weniger die rationalen Lösungen. Diophant, auch »Vater der Algebra« genannt, schrieb in seinem Werk auch einige Lehrsätze über Eigenschaften von ganzen Zahlen. Er war der erste Mathematiker, der zum Schreiben mathematischer Ausdrücke besondere Symbole einführte. Bis zu seiner Zeit wurden alle Ausdrücke – mit Ausnahme der Zahlen – voll ausgeschrieben. Er führte auch Symbole für die Unbekannte, für Quadrate und Kuben, Subtraktion u. a. ein. Die meisten dieser Symbole waren Abkürzungen der entsprechenden Wörter. Die Erkenntnisse des Diophant dienten zahlreichen Mathematikern wie Bombelli, Fermat, Gauß u. a. als Anleitung für ihre Arbeit.

58

Berechnen Sie das Alter des Diophant!
Originaltext: »Dieses Grabmal bedeckt Diophantos. Ein Wunder zu schauen: durch arithmetische Kunst lehrt uns sein Alter der Stein. Knabe zu bleiben verlieh der Gott ihm ein Sechstel des Lebens; nach einem Zwölftel sodann ließ er ihm sprießen den Bart, ließ ihm nach weiterem Siebtel die Fackel der Hochzeit entzünden, und fünf Jahre darauf schenkte er ihm einen Sohn. Ach, der geliebte, unglückliche Sproß! Als halb er das Alter hier seines Vaters erreicht, ward er, ein Kalter, verbrannt. Nach vier Jahre den Schmerz durch Kunde der Zahlen beschwichtend, langte am Ziele des Seins endlich er selbst auch an.«

59

Diophant sagt: »Ihrer Natur nach läßt sich ... die Zahl 65 zweimal in je zwei Quadrate zerfällen, nämlich in 16 und 49, sowie in 64 und 1. Dies rührt daher, daß 65 durch Multiplikation der Zahlen 13 und 5 entsteht, von denen jede sich in zwei Quadrate zerlegen läßt.« (Der Leser prüfe das selbst nach.) Diophant war wahrscheinlich schon der Satz bekannt: Sind zwei Zahlen jeweils Summe zweier Quadrate, so gilt das auch für ihr Produkt.

a) Beweisen Sie diesen Satz allgemein!
b) Zerlegen Sie die Zahl 5780 in entsprechende Quadratzahlen!

60

Es sind zwei Zahlen zu finden, so daß ihre Summe und ihr Produkt gleich zwei gegebenen Zahlen a und b sind.

a) Geben Sie eine allgemeine Lösung an!
b) Nutzen Sie die allgemeine Lösung für a = 5 und b = 4!

Rund um die Kreiszahl π

Zum Schluß geben wir Ihnen eine Übersicht über die Geschichte der Kreiszahl π in Schlagzeilen:

Archimedes war der erste, der es in seiner Kreismessung unternahm, den Umfang des Kreises mit seinem Durchmesser zu vergleichen, indem er feststellte: »Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß wie der Durchmesser, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber mehr als zehn Einundsiebzigstel des Durchmessers, also

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}.«$$

Johann Heinrich Lambert bewies im Jahre 1767, daß π nicht als gebrochene Zahl darstellbar ist.
(π ist wie $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl.)

Der deutsche Mathematiker Ferdinand v. Lindemann bewies im Jahre 1882, daß π eine transzendente Zahl, nicht algebraische Zahl ist, d.h., daß sie nicht Nullstelle einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann.

Der flämische Mathematiker und Fechtmeister Ludolph van Ceulen verwendete ein Vieleck, das mehr als $32 \cdot 10^9$ Ecken besaß, so daß er damit auf 35 Dezimalstellen kam. Er bestimmte in seinem Testament, diese Zahl auf seinen Grabstein einzumeißeln (Ludolphsche Zahl).

Im Jahre 1647 bezeichnete der Engländer Outhred die gesuchte Zahl mit dem Symbol $v:\delta$ (d. h. Perimeter : Diameter); im Jahre 1706 verwendete der Engländer Jones erstmalig nur den griechischen Buchstaben π. Allgemein setzte sich die Schreibweise π dank der Autorität Eulers um 1750 durch.

Euler berichtigte die von dem Franzosen de Lagny 1717 durchgeführte Berechnung, die 128 Dezimalstellen enthielt, durch eigene Berechnung in nur 80 Stunden.

Ab 1949 erfolgten Computerberechnungen:

ENIAC Reitwiesner	1949 auf 2037 Stellen
IBM Paris	1958 auf 10000 Stellen in 4 h 3′
Shanks, Wrench	1961 auf 100000 Stellen in 8 h 43′
CEA Paris	1969 auf 1000000 Stellen in 23 h
Ushiro Tokio	1983 auf 16000000 Stellen in 30 h
Columbia Universität	1989 auf 488000000 Stellen in 37 h (auf 20000 Blatt Papier).

Der Engländer Shanks berechnete nach zwanzigjähriger Arbeit insgesamt 707 Dezimalstellen. Diese Leistung – per Handarbeit – wurde nicht mehr übertroffen. Im Jahre 1945 wurde von einer elektronischen Rechenmaschine in der 520. Stelle ein Fehler entdeckt.

Der π-Wert wurde im Jahre 1961 von zwei unabhängig voneinander arbeitenden Rechenautomaten auf 100625 Stellen nach dem Komma berechnet. Die reine Rechenzeit betrug 4 h und 22 min. Diese Zahl, auf einen Papierstreifen gedruckt (5 Ziffern je Zentimeter), würde einen über 200 m langen Streifen erfordern.

Der Italiener L. Macheroni erreichte durch Näherungskonstruktion mit dem Zirkel im Jahre 1797 für $\pi \approx 3{,}142399\ldots$

Ein Schweizer Mathematiklehrer errechnete mit seinen Schülern auf einer elektrischen Rechenmaschine die Zahl π auf 1034 Stellen und ordnete sie originellerweise zu einem Kreis (s. Bild 58).

Bild 58
Die Kreiszahl π. Das Bild zeigt π mit 1 034 Stellen, berechnet nach einem BASIC-Programm, zur Verfügung gestellt von *Michael Vowe*, Therwil (Schweiz).

3,1415926535
8979323846264338327950
2884197169399375105820974944
59230781640628620899862803482534
211706798214808651328230664709384460
95505822317253594081284811174502841027
019385211055596446229489549303819644288109
75665933446128475648233786783165271201909145
648566923460348610454326648213393607260249141 2
7372458700660631558817488152092096282925409171
536436789259036001133053054882046652138414695194
151160943305727036575959195309218611738193261179
31051185480744623799627495673518857527248912279381
83011949129833673362440656643086021394946395224737
19070217986094370277053921717629317675238467481846
76694051320005681271452635608277857713427577896091
73637178721468440901224953430146549585371050792279
689258923542019956112129021960864034418159813629
774771309960518707211349999998372978049951059731
7328160963185950244594553469083026425223082533
44685035261931188171010003137838752886587533 20
838142061717766914730359825349042875546873 11
5956286388235378759375195778185778053217 12
26806613001927876611195909216420198938
09525720106548586327886593615338 1827
96823030195203530185296899577362
2599413891249721775283479131
51557485724245415 06959
508295331168

61

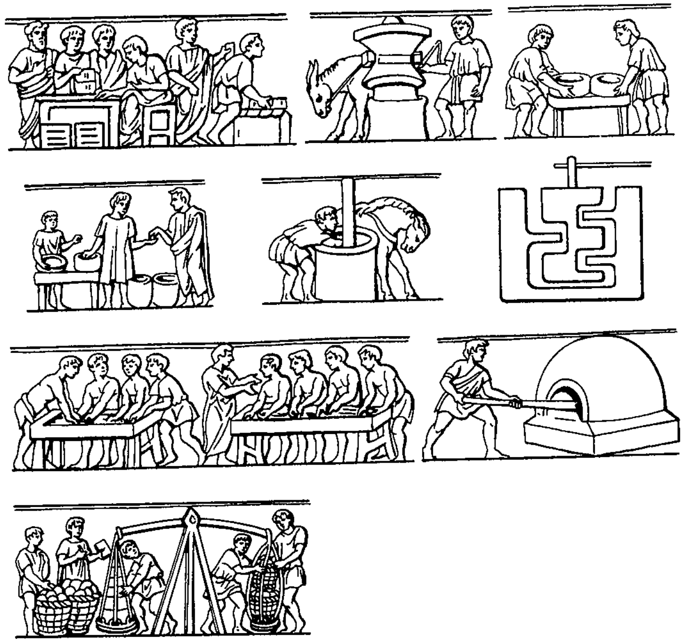
Vergleichen Sie mit Hilfe des Taschenrechners, wie weit die unten genannten π-Werte jeweils vom exakten siebenstelligen Näherungswert 3,141593 für π abweichen (eventuell auch in Prozent)!

Archimedes	ca. 250 v.u.Z.	zw. $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$
Vitruvius Dürer	3. Jh. 1471–1528	$3\frac{1}{8}$
Bramagupta Chang Heng	? 78–139	$\sqrt{10}$
Zu Ch'ong-Zhi Peter Metius	430–501 um 1550	$\frac{355}{113}$

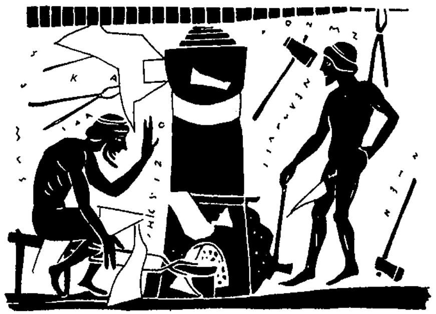
Achmes		$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Aryabhata	geb. 476	$\frac{62\,832}{20\,000}$
Nilakanthe	um 1500	$\frac{104\,348}{33\,215}$
Wang Fan	gest. 267	$\frac{142}{45}$
Ptolemäus	um 150	$3\frac{17}{120}$
Vieta	1579	$1{,}8 + \sqrt{1{,}8}$
Specht	1828	$\frac{13}{50}\sqrt{146}$ und $\frac{7}{10^7} + \frac{13}{50}\sqrt{146}$
d'Ocagne	1895	$2 + 3$

Bild 59
Das Schatzhaus der Athener in Delphi
Foto: Christa Schoder, Jena

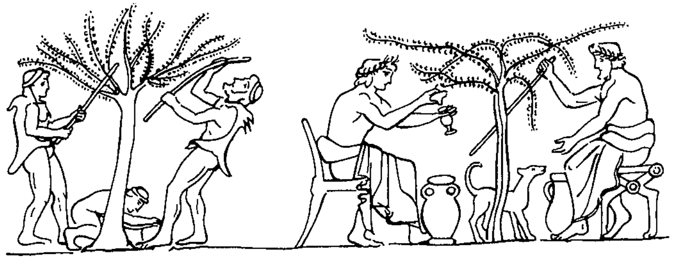
ler 60–63
dem griechisch-
ischen Alltag



a) Bäckerei: Getreideeinkauf; Kornmühle; Sieben des Mehls; Prüfen des Mehls; Teigknetmaschine, daneben Schnittbild; Formen des Brotes an Tischen; Sklave mit Brotschieber am Backofen; Brot wägen bei einer Großlieferung (nach einem Relief[1] vom Grab des Brotfabrikanten Euraces, Rom 2. Jh.)



b) Schmiede (auf einer griechischen Vase, 6. Jh. v. u. Z.)

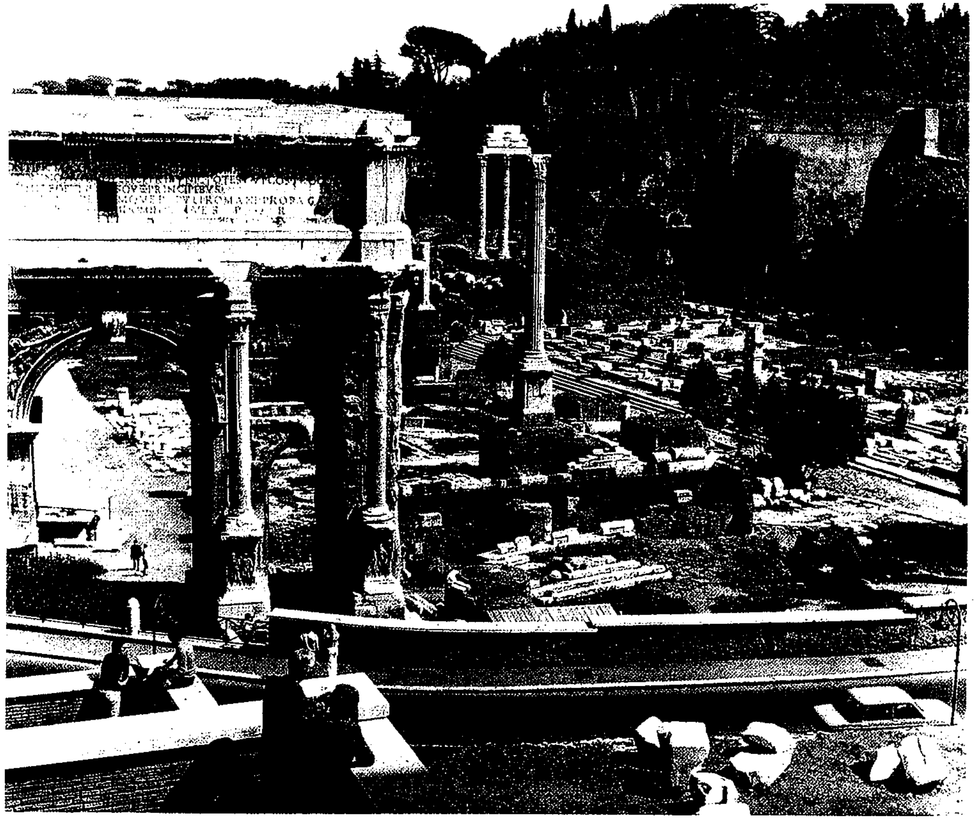


c) Olivenernte mit Stöcken, Ölprobe von der neuen Ernte (nach einer Amphora)

d) Häusliche Produktion von Textilien. Fließbild: Webstuhl, Wägen der Wolle (unter Aufsicht); sitzende Herrin mit Dienerin beim Prüfen von Garn; beim Falten von Stoffen; Spinnen im Stehen (nach einem Vasenbild, um 500 v. u. Z.)

[1] Flach- und Hochreliefs treten bereits in der archaischen griechischen Kunst neben der freistehenden Figur auf. Man verwendete Reliefs unter anderem bei Grabsteinen, Weihgeschenken und im Giebeldreieck der Tempel.

Bild 64
Das Forum Romanum in Rom
Foto: ADN GmbH, Bildarchiv



Römische Impressionen

62

In Bild 65 sehen Sie einen Meilenstein, der in der Provinz Salerno gefunden wurde. Laut Inschrift wurde er vom Konsul C. Popilius Laenas (172–156 v. u. Z.) aufgestellt.

Auf dem Meilenstein sind neun römische Zahlzeichen zu suchen. (Das Zeichen ⫰ bedeutet 50, Ð = 500.)

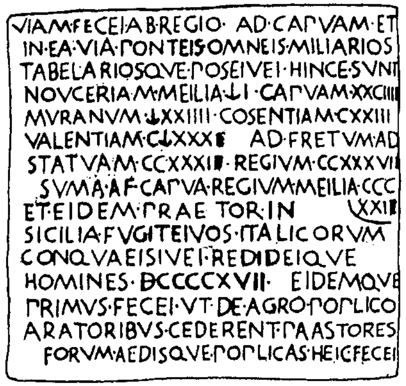


Bild 65

63

a) Unsere Tabelle (1) zeigt einen römischen Abakus, eingeteilt in sieben Felder. Zum Rechnen stehen zwei Arten von Steinchen, ekkige und runde, zur Verfügung. Wir wollen die Zahlen 1523 (MDXXIII) und 2368 (MMCCCLXVIII) addieren. Die obere Reihe zeigt, wie die eckigen Steine und die untere Reihe, wie die runden Steine zu legen sind.
Die Tabelle (2) zeigt das Ergebnis der Addition. Der Leser möge sich selbst die Art des Rechnens erarbeiten.

Tabelle (1)

M	D	C	L	X	V	I
■ ●●	■	●●●	●	■■ ●	●	■■■ ●●●

Tabelle (2)

M	D	C	L	X	V	I
■●●	■	●●●	●	■■●●		■

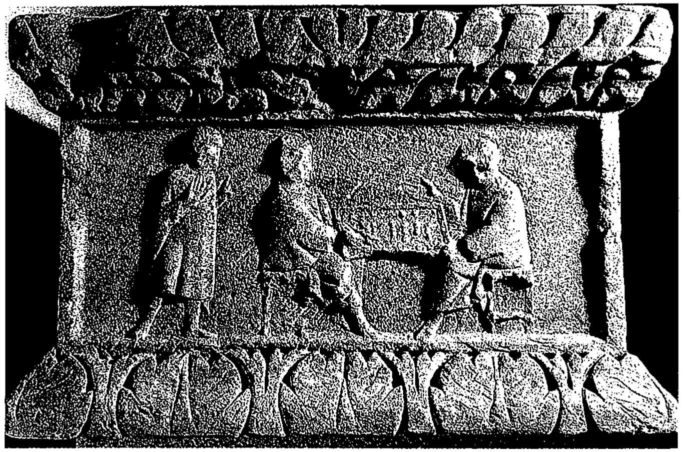
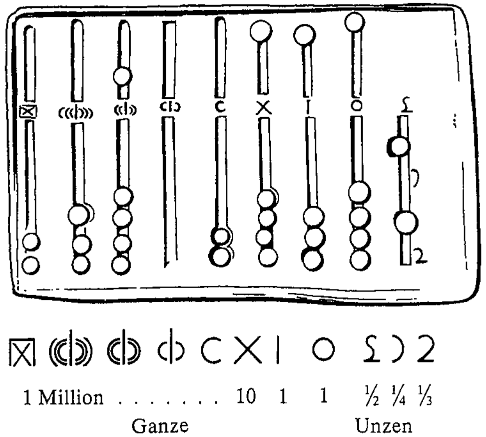


Bild 66
Rechenszene, Relief eines Grabmals in Trier (215 v. u. Z.). Das Bild zeigt einen (stehenden) Schüler beim Fingerzählen, das im Anfangsunterricht gelehrt wurde. Daneben sitzen zwei Schüler beim Arbeiten mit einem Abakus. In dem Holzschnitt darunter ist eine Tabelle gezeigt, eine von zahlreichen Anleitungen zum Fingerrechnen.
Mit freundlicher Genehmigung des Landesmuseums Trier

Neben dem Rechnen mit dem Abakus galt das Kopfrechnen als wichtigste Rechenart. Hilfsmittel des Kopfrechnens war das Einmaleins, das in Rom schon die Kinder erlernen mußten. Nach der Fähigkeit im Kopfrechnen wurde zum Beispiel die Klugheit des Mannes eingeschätzt. Deshalb gaben sich die Römer gegenseitig knifflige Denkaufgaben auf, deren Lösung Wendigkeit beim Rechnen voraussetzte. Wir geben Ihnen folgendes Beispiel:
b) »Auf den Fluren weiden Rinder vierfach in Herden geteilt, jede Herde anders gefärbt. Die erste ist milchweiß, die andere rabenschwarz, die dritte braun und die vierte scheckig. Weiße Rinder weiden 12 insgesamt. Die braunen Rinder sind den weißen gleich an der Zahl weniger dem vierten Teil der schwarzen Rinder. Die Menge der schwarzen ist gleich dem dritten Teil der weißen, doppelt genommen. Die scheckigen Rinder ergeben an Zahl die Hälfte der weißen, vermehrt um sämtliche schwarzen.
Sage mir genau die Zahl der Rinder, die du weiden siehst!
Sage mir auch, wieviel es gibt von jeder Farbe!«

Bild 67
Der Abakus war bereits in der Antike ein viel verwendetes Rechenbrett, auf dem mit Hilfe frei beweglicher Steine insbesondere Additions- und Subtraktionsaufgaben durchgeführt wurden. Das Bild zeigt einen römischen Handabakus (Gipsabguß) in fast natürlicher Größe. Mit ihm führten die Römer kleinere Rechnungen durch. Zwischen den beiden Schlitzreihen erkennen wir die eingeritzten römischen Zahlzeichen.
Auf dem Prinzip des Abakus beruht die heute noch als Lernspielzeug verwendete »Rechenmaschine«, bei der durch Verschieben von Kugeln auf Drähten das Zusammenzählen und Abziehen veranschaulicht wird.



c) Nach dem Gesetz des älteren Gracchus sollte jeder römische Patrizier 500 jugera Staatsland und für jeden erwachsenen Sohn 250 jugera in Besitz haben dürfen. Nun haben zwei Patrizier, Gajus und Titus, von denen Gajus 4 erwachsene Söhne mehr als Titus hat, beide den gesetzlichen Maximalbesitz, und zwar zusammen 3500 jugera Staatsland, inne.
Wieviel erwachsene Söhne hatte Gajus und wieviel Titus?

Römische Zahlen auf Münzen

64

Auf einem Bronzemedaillon des Kaisers Hadrian (s. Bild 68) ist der Genius der Zirkusspiele abgebildet, in der Rechten ein Rad haltend, mit der Linken eine Zirkussäule (Wendemarke) umfassend. Die Münzaufschrift lautet:

> ANN DCCCLXXIIII NAT VRB P CIR CON; d.h. »im Jahre ... hat (der Kaiser) am Gründungstage der Stadt dem Volk Zirkusspiele gestiftet«.

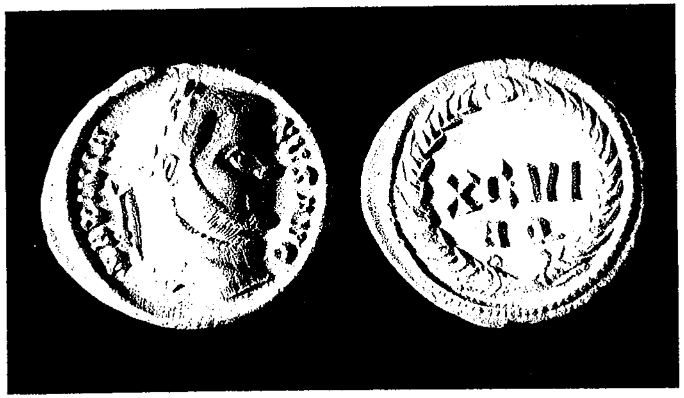
In welchem Jahre wurde dieses Medaillon geprägt, wenn die Gründung der Stadt Rom nach traditioneller römischer Auffassung im Jahre 753 v. u. Z. stattgefunden hat?

ilder 68–71
ömische Münzen
lit freundlicher Genehmigung
er Staatlichen Museen zu
erlin, Münzkabinett

65

Eine Goldmünze Konstantins des Großen (s. Bild 69) zeigt die Siegesgöttin (Viktoria), in der Linken einen Palmzweig, in der Rechten ein Siegesmal (Tropaion) haltend. Im sogenannten Abschnitt der Münze, d. h. unter der Bodenlinie, befindet sich die Signatur der Münzstätte Antiochia (Syrien), rechts neben der Göttin die Zahl LXXII, die angibt, wie viele derartige Münzen auf ein (römisches) Pfund Gold gehen.

Wie schwer müßte die Münze sein, wenn das römische Pfund einer Masse von 324 g entsprach?

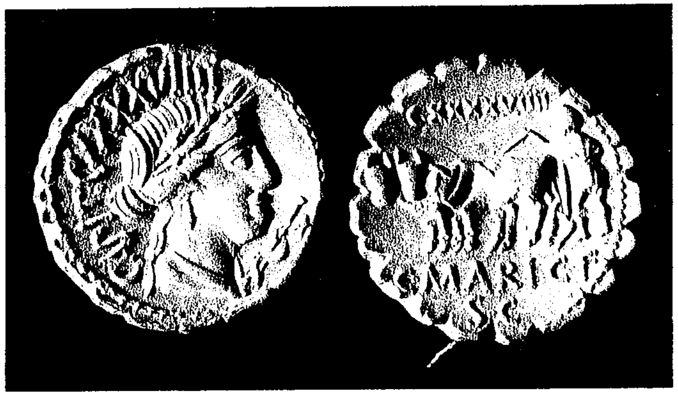


66

Eine Silbermünze des Kaisers Maximianus (s. Bild 70) läßt innerhalb eines Kranzes die Buchstaben AQ erkennen, mit denen die Münzstätte Aquileia (Norditalien) bezeichnet wird, und darüber eine römische Zahl, die angibt, wie viele derartige Münzen auf ein Pfund Silber gehen. Wie heißt die Zahl in der Mitte?

67

Welche Zahl liest man auf der Rückseite des Denars des Gajus Marius Capito, der ungefähr im Jahre 81 v. u. Z. das Amt eines Münzmeisters ausübte (s. Bild 71)?



Brot und Spiele

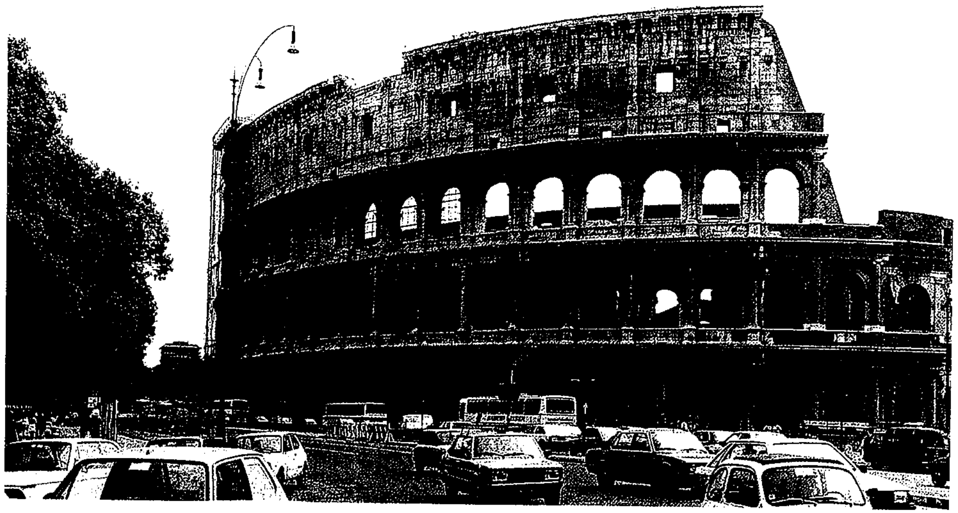
68

Das Kolosseum Romanum. Es wurde in Rom unter Kaiser Vespasian erbaut und von Kaiser Titus im Jahre 80 u. Z. mit hunderttägigen Spielen eingeweiht. Aufgebaut auf elliptischem Grundriß in vier Etagen, faßte es etwa 50000 Zuschauer. Durch ein sinnvolles Treppensystem war ein schneller Zu- und auch Abgang für die Zuschauer gewährleistet. Die Höhe betrug 48,5 m. Der äußere Baukörper war in drei übereinanderliegende Arkaden mit je 80 Bogen gegliedert. Das obere Stockwerk, mit einem Säulengang, trug 240 Mastbäume für die Sonnensegel. Unter der Arena befanden sich gemauerte Gänge und die Käfige für die »Bestien« (Raubtiere) sowie die Requisitenkammern.

Berechnen Sie den Umfang des Kolosseums, wenn dessen große Achse 188 m und die kleine Achse 156 m lang ist!

Berechnen Sie die Fläche der Arena, wenn deren beide Achsen Längen von 86 m und 54 m haben!

ild 72
as Kolosseum, Amphi-
eater des Kaisers Flavius
espasianus.
to: ADN GmbH, Bildarchiv



69

Die kluge Königstochter Dido. Bei der Gründung der Stadt Karthago benutzte Dido, die Tochter des tyrrhenischen Königs, eine List, um dem König der Numidier, Hiebras, ein riesiges Stück Land abzuluchsen. Sie erbat soviel Boden von ihm, wie eine Ochsenhaut umspannen kann, schnitt die Haut in fadendünne Streifen, aus denen sie eine sehr lange Schnur machte, und umgrenzte damit am geradlinigen Meeresufer ein Flächenstück.

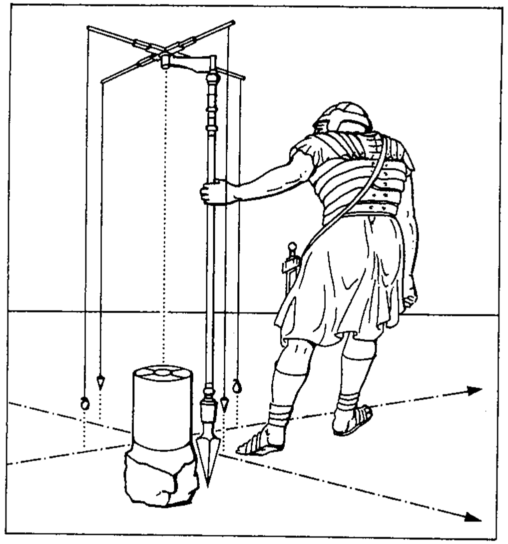
Welche Form muß Dido dem umgrenzten Gebiet erteilen, um den größtmöglichen Flächeninhalt zu gewinnen?

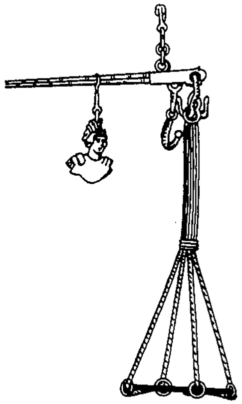
70

Zu einer gemeinschaftlichen Mahlzeit gibt Cajus 7, Sempronius 8 Schüsseln, jede von gleichem Werte. Ehe sie die Mahlzeit beginnen, kommt Titus hinzu und setzt sich mit zu Tische. Nachdem er gegessen, zahlt er 30 Silberlinge und verteilt dieselben unter Cajus und Sempronius nach Verhältnis der Anzahl der Schüsseln, welche jeder mitbrachte; ersterem zahlt er 14, letzterem 16 Silberlinge. Sempronius, hiermit nicht zufrieden, verlangt richterlichen Ausspruch. Wie müßte derselbe lauten?

Bild 73
Palmyra. Die Stadt liegt auf der Mitte des Weges zwischen dem Euphrat, dem bedeutenden Verkehrsweg des östlichen Vorderasiens, und der Küste des Mittelmeeres mit seinen zahlreichen Hafenplätzen. Diese große Oase versorgte durchziehende Heere sowie Kaufleute und Händler mit Wasser und Lebensmitteln. Sie war ein Zentrum des Warenaustauschs. Erst durch die genügsamen Kamele war es möglich, den langen Weg zwischen den Wasserstellen zu bewältigen. Der Handelsverkehr verschaffte Palmyra die Grundlage seines Reichtums. Die Bauern schufen durch Ackerbau und Viehzucht eine sichere Ernährungsgrundlage. Außer einheimischen Fürsten waren Römer und Araber die Herrscher. Unser Bild zeigt die Ruinen einer römischen Säulenstraße.
Foto: Herbert Förg-Rob, Schwaz (Österreich)

ıld 74
ömischer Vermesser.
nser Bild zeigt einen Gro-
.atici, d. h. eine Person,
.e unter Leitung eines Tri-
ınen beim Anlegen eines
astells oder einer Kolonie
e zwei Hauptrichtungen
nvisierte. Er bedient sich
ıbei einer »Groma«, eines
erätes, dessen Hauptstück
n drehbares Winkelkreuz
:.
it freundlicher Genehmigung
n Karl Röttel, Buxheim bei
golstadt





d 75
ɜ abgebildete, bei Ausgra-
ıgen in Pompeji (79 u. Z.
rch Vulkanausbruch des
suvs verschüttet) gefun-
ıe altrömische Schnell-
ıge befindet sich jetzt in
· Petersburger Ermitage.
jedem Aufhängebügel
ıört eine mit Kerben ver-
ıene Ableseskale. Ihr
ıfgewicht hat die Form
er Jünglingsbüste (Emp-
dlichkeit etwa 9 g).

71

Eine Witwe ist verpflichtet, die Hinterlassenschaft ihres Mannes in Höhe von 3500 Denar mit dem Kind, das sie erwartet, zu teilen. Wird es ein Sohn, so erhält sie nach den römischen Gesetzen die Hälfte des Anteils des Sohnes. Wird eine Tochter geboren, so erhält die Mutter den doppelten Anteil der Tochter. Nun wurden jedoch Zwillinge geboren – ein Sohn und eine Tochter.

Wie ist die Erbschaft aufzuteilen, damit allen Forderungen des Gesetzes entsprochen wird?

72

Bacchus, der Gott des Weines, trank einst mit Silen um die Wette; ersterer hatte schon 6 Becher voraus, als er zu trinken anfing, und leerte in derselben Zeit 5 Becher, in welcher Silen nur 3 Becher zu leeren vermochte. Recht viel zwar konnten beide vertragen, Bacchus gerade noch einmal soviel wie Silen, doch es erlagen, nachdem sie manchen Becher geleert, beide erschöpft zu gleicher Zeit.

Wieviel Becher hatte jeder von ihnen geleert?

73

Ein Händler ging durch drei Städte. In der ersten gab er die Hälfte und ein Drittel aus, in der zweiten die Hälfte und ein Drittel dessen, was er übrigbehalten hatte, in der dritten wiederum die Hälfte und ein Drittel dessen, was er noch bei sich hatte. Ihm verblieb danach ein Groschen.

Wieviel Groschen besaß der Händler zu Beginn seiner Einkäufe?

74

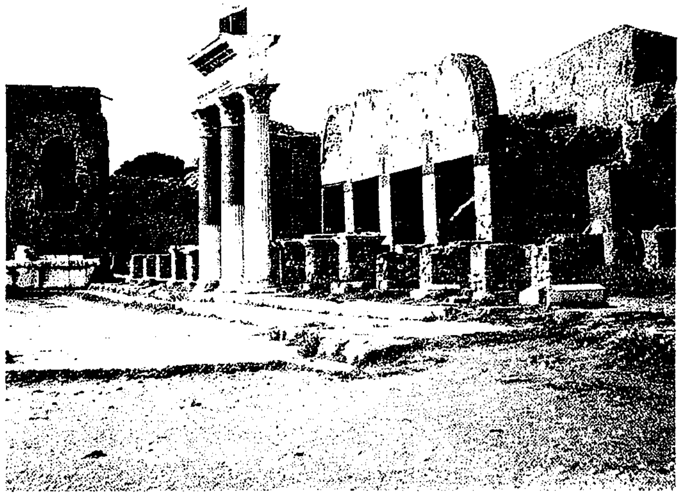
Der römische Schriftsteller Lucius Junius Moderatus Columella (um 50 u. Z.) stellte in seinem Buch »rei rusticae libri« u. a. folgende Aufgabe:

Man berechne den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a nach der folgenden Formel

$$A = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}.$$

Verwenden Sie das Verfahren von Columella, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem unter Benutzung heutiger Formeln, wenn $a = 10$ Längeneinheiten beträgt!

Bild 76
Pompeji. Bedeutende Hafen- und Handelsstadt des Altertums am Fuße des Vesuvs, 12 m über dem Mittelmeer gelegen. Pompeji wurde am 5. Februar 62 durch ein Erdbeben fast völlig zerstört und – noch bevor der Wiederaufbau beendet war – am 24. August 79 durch einen Vesuvausbruch verschüttet. Systematische Ausgrabungen seit 1860 legten die besterhaltene Stadt des Altertums frei. Neben Tempeln, Thermen, Wohnhäusern vornehmer Bürger und einem Gerichtsgebäude legte man auch eine Wechselstube frei, bestehend aus vier Räumen, siehe Mitte des Bildes. Sie unterstützte die Kaufleute bei ihren Geldgeschäften.
Foto: Johannes Lehmann, Leipzig



Zwei altrömische Kalender

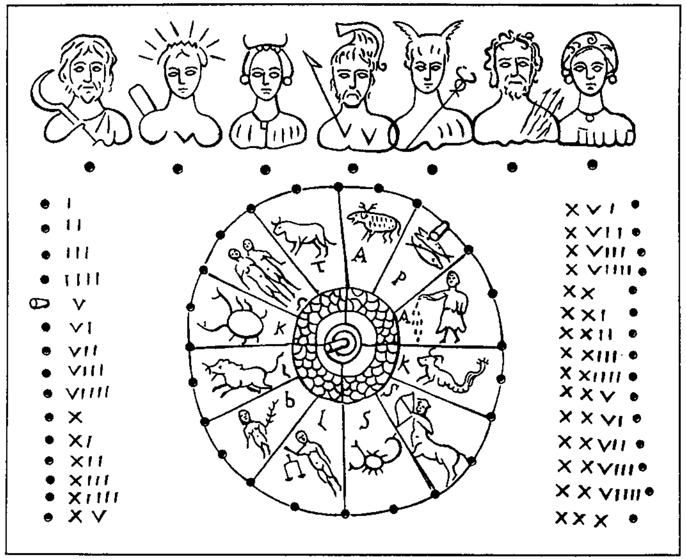


Bild 77
Steckkalender nach einer in Rom gefundenen Steinplatte aus dem 3./4. Jh. u. Z.

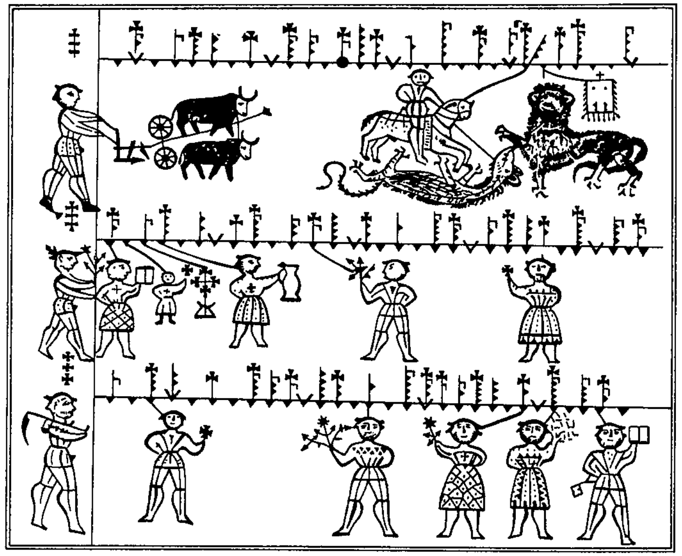


Bild 78
Kalenderstein zur Bezeichnung der Monate, Wochentage und des Datums

Drei griechisch-römische Spiele

75

Drei in einer Reihe. Auf den Treppen der Akropolis in Athen scheint man das Spiel schon gespielt zu haben. Ovid, der römische Dichter (43 v. u. Z. bis 18 u. Z.), erwähnt es, und Shakespeare (1564–1616) nimmt im »Sommernachtstraum, Akt II, Szene 2«, darauf Bezug.

Auf ein Neun-Punkte-Mühlebrett werden von zwei Spielern abwechselnd drei weiße bzw. schwarze Knöpfe gesetzt. Ziel ist es, drei der gleichen Farbe in eine Linie zu bekommen. Sitzen die insgesamt sechs Knöpfe, dann wird aufs benachbarte Feld »gezogen«. Hier hat »weiß« begonnen, »schwarz« hat jeweils nachgelegt, nun muß gezogen werden. Offensichtlich kann »weiß« in zwei Zügen jetzt eine Mühle machen, und »schwarz« kommt zu spät.

Es erhebt sich die Frage, ob es eine »Gewinnstrategie« gibt.

76

Ein Legespiel. Quadrate bilden ein Rechteck.

Wie kann man aus den Quadraten mit den Seitenlängen 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18 Einheiten ein Rechteck mit den Seiten von 32 Einheiten und 33 Einheiten zusammensetzen?

77

Eine Information aus der englischen Zeitung »Sunday Times«, London 1988:

»Als Professor Digby-Nite Ausgrabungen in der Nähe des Hadrianswalles vornahm, stieß er dabei auf eine Tontafel, in der das folgende Rätseldiagramm und die Worte »CRUX NUMERORUM« eingeritzt waren. Die Lösungshinweise sahen (natürlich vom Lateinischen ins Deutsche übersetzt) so aus (s. Bild 78):

Bild 78

I	II	III
II		
III		

Waagerecht: I Vielfaches von XXXVII
II Vielfaches von LXXIII
III Faktor von I senkrecht/keine Primzahl

Senkrecht: I Eine Quadratzahl
II Vielfaches von VII
III Calpurnias Alter

Wie alt war Calpurnia?

Zum Abschluß – Unterhaltsame Labyrinthe

78

Im Altertum verstand man unter Labyrinthen unterirdische Gänge und Gewölbe, verwirrend miteinander verbunden, mehrfach verzweigt. Wer unkundig war, verirrte sich leicht, kam oft nicht mehr zum Ausgang zurück.

Einst kam der bedeutende Baumeister und Erfinder Daedalus, Vater des Ikarus, zum Palast des Königs Minos nach Knossos auf Kreta.

Auf dieser Mittelmeerinsel gab es vier Paläste, erbaut in vorgriechischer Zeit. Der größte von ihnen war Knossos, erbaut und erweitert 2000 v.u.Z.–1800 v.u.Z., zerstört um 1400 v.u.Z. 1899 begann Sir A.J. Evans diesen Palast freizulegen. In dem mehrstöckigen Gebäudekomplex mit seinen zahlreichen Räumen, Pfeilerhallen und

ld 80
ɾundriß des Palastes von ɔossos (Fläche 20 000 m²): Thronsaal; 2. Aufgang zu ɪn Repräsentationsräumen; Mittelhof; 4. Kult- und ɛpräsentationsräume; Magazine; 6. Altar; Silos; 8. Westhof; 9. Altar; ı. Aufgang zum Mittelhof; . Korridor zum östlichen ·eppenhaus und zu den ıumen der Königin; . Östliches Treppenhaus it Säulenhalle und chthof; 13. Saal der Doplăxte; 14. z. T. unerɾschte Räume; 15. Prolon; 16. Pfeilerhalle; . Südaufgang (Südprolon); 18. Schautreppe am eg zum Kleinen Palast.

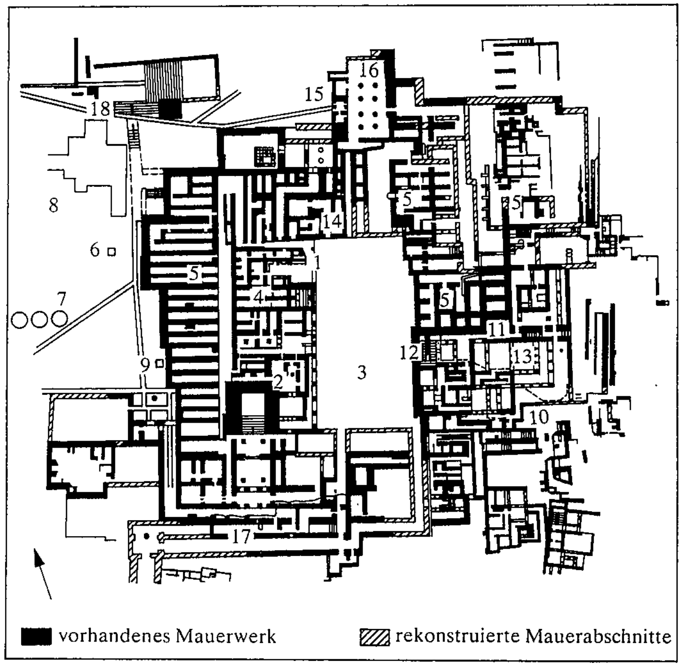


Bild 81
Altgriechische Silbermünze, Kreta, 3. Jahrhundert v.u.Z. Freimarkenausgabe, erschienen 24.3.1959. Vorderseite: Bildnis des Apollon, Rückseite: Das Labyrinth von Knossos.

Lichthöfen konnte man sich leicht verirren. Um Ihnen einen Eindruck vom gesamten Palast zu geben, zeigen wir einen Plan (s. Bild 80), geben Ihnen einen kleinen Einblick in einen prächtigen Tempel (s. Bild 84) und zeigen einen Ausschnitt (s. Bild 91) von den umfassenden Vorratsräumen. Zurück zur Daedalus-Sage:

Der Baumeister erhielt vom König Minos den Auftrag, in der Nähe des Palastes ein Labyrinth zu bauen. Wie die griechische Mythologie berichtet, hauste darin Minotaurus, ein blutrünstiges Ungeheuer – halb Stier, halb Mensch. Jedes Jahr wurden sieben Knaben und Mädchen aus Athen diesem Ungeheuer geopfert. Erst Theseus, Sohn des Ägeus von Athen, gelang es, das Ungeheuer zu töten (s. Bild 82). Von seiner Geliebten Ariadne, Tochter des Königs Minos, erhielt er einen Fadenknäul mit auf den Weg. Beim Durchsuchen des Labyrinths nach dem Ungeheuer hatte Theseus den Faden des Knäuls abgewickelt. Nach dem Sieg über Minotaurus erreichte er durch das Aufwickeln des Fadens leicht den Ausgang.

Bild 82
Theseus mit dem Minotaurus. Malerei auf einer attischen Vase. Kampfszene

Besonderes Interesse fanden Labyrinthe bei der griechischen und römischen Jugend. Bis heute werden Irrgärten nicht nur in vielfältigsten Formen zu Papier gebracht, sondern es entstanden auch Labyrinthe in Parks, Gärten und Palästen, dienten auf Amuletten der Abwehr des Bösen.

In den letzten beiden Jahrhunderten wurden Labyrinthe wissenschaftlich analysiert. Heute spielen sie unter anderem in der Gra-

Bild 83
Das Knossos-Labyrinth auf einer etruskischen Vase

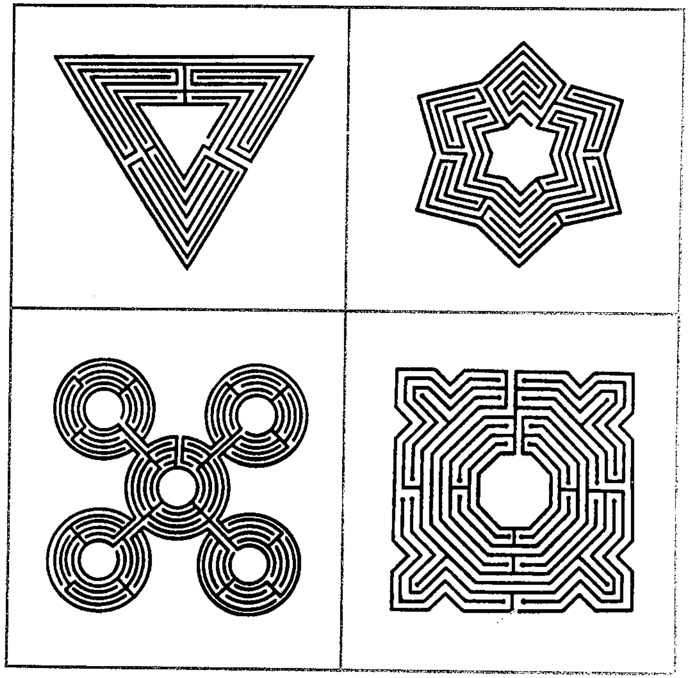
Bild 84
Blick auf die großen Propyläen am Südeingang des Palastes von Knossos, einem Teil der Residenz des sagenumwobenen Königs Minos
Foto: ADN GmbH, Bildarchiv

phentheorie und der Kybernetik eine bedeutende Rolle. Mit einer Reihe von Irrgärten wollen wir dieses Buch abschließen.

Nehmen Sie ein Stück Transparentpapier, legen Sie dieses auf die Figuren, und versuchen Sie, mit einem Stift zum Ziele zu kommen. Wir wünschen viel Freude und Erfolg!

Bild 85
Graffito. Bei Ausgrabungen in Pompeji fand man eine Ritzzeichnung an einer Wand. Das zeigt uns, daß die mythologische Darstellung des Kampfes zwischen Theseus und dem Minotaurus auch im römischen Reich bekannt war. Die Buchstaben bedeuten: Labyrinthus. Hic habitat Minotaurus; übersetzt: Labyrinth. Hier wohnt Minotaurus.

Bild 86
Vier Irrgärten aus dem 16. Jahrhundert



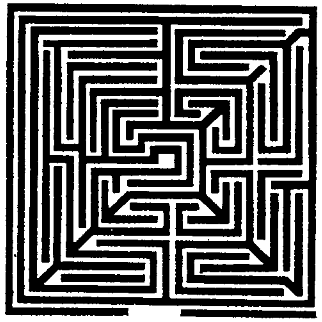


Bild 87
Irrgarten Altjeßnitz bei Bitterfeld. Im Jahre 1732 wurde auf Veranlassung eines Barons, wohnhaft in Altjeßnitz, von einem französischen Gartenbauingenieur ein 0,25 Hektar umfassender Irrgarten angelegt. Interessanterweise hat dieser keine »Sackgassen«. Unter den ca. 2 Meter hohen Taxushecken befinden sich Bewässerungsanlagen, die auch bei trockener Witterung das Begießen der dicht geschlossenen Strächerreihen erübrigen.
Versuchen Sie möglichst rasch, die im Zentrum gelegene erhöht angelegte Plattform, von der aus man den gesamten Irrgarten überblicken kann, zu erreichen!

Bild 88
Irrgarten aus dem 17. Jahrhundert

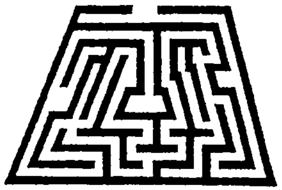


Bild 89
Idealisierte Darstellung des Labyrinths im Garten des königlichen Schlosses Hampton Court im Südosten Londons.

Bild 90
Sirene
Aus einer ungarischen Rätselzeitschrift

Bild 91
In achtzehn Vorratsräumen des Palastes von Knossos wurden in mehr als zwei Meter hohen Tongefäßen – sogenannte Pithoi – hauptsächlich Öl, Wein, Feigen und Bohnen aufbewahrt. Ein Gefäß faßte durchschnittlich 185 Liter. Allein im Westhof fand man noch 151 meist unversehrte Pithois.
Foto: ADN GmbH, Bildarchiv

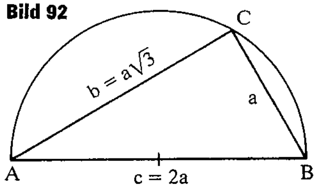
Die Lösungen

Im Eifer
vergißt man die Mühe.
Ovid (43–17 v. u. Z.)

1

Die Seitenlänge l eines Quadrates mit dem Inhalt $A = 3a^2$ ist $l = a\sqrt{3}$. Aus dem pythagoreischen Lehrsatz folgt $b^2 = c^2 - a^2$, und $3a^2$ wird zerlegt in $3a^2 = 4a^2 - a^2 = (2a)^2 - a^2$. Also muß man ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, dessen Hypotenuse c die Länge $2a$ und dessen eine Kathete die Länge a hat. Dazu benutzt man den Thales-Kreis (s. Bild 92). Die zweite Kathete hat die Länge $b = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. Die Länge b ist die Seitenlänge des gesuchten Quadrates mit dem Flächeninhalt $A = 3a^2$.

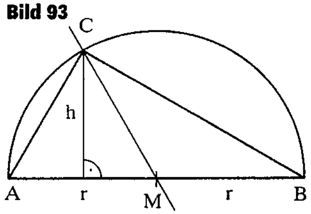
Bild 92

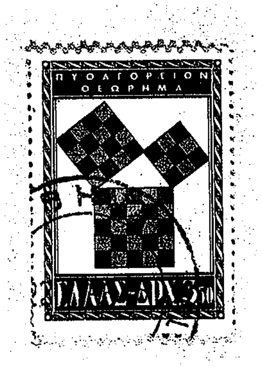


2

Durch die Gerade CM (s. Bild 93) wird das rechtwinklige Dreieck ABC in die flächengleichen Teildreiecke ΔAMC und ΔMBC zerlegt; denn es gilt $A_{AMC} = A_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot rh$.

Bild 93





Bilder 94/95
Briefmarkenserie zu Ehren der Pythagoreer. Das 2 500 jährige Gründungsjahr dieser Schule wurde 1956 in Athen auf der Insel Samos festlich begangen. Aus diesem Anlaß gab die griechische Postverwaltung am 20. August 1955 die zum Teil im Bild gezeigte – inzwischen sehr wertvolle – Briefmarkenserie heraus.

3

Es seien a die meßbare halbe Länge der Basis der Pyramide, $a + b$ die Schattenlänge der Pyramide, h die Höhe der Pyramide, h' die Länge des Stockes oberhalb des Erdreichs, c seine Schattenlänge (s. Bild 96). Wegen der Parallelität der Sonnenstrahlen gilt

$$h : (a + b) = h' : c, \text{ also}$$

$$h = \frac{h'(a + b)}{c}.$$

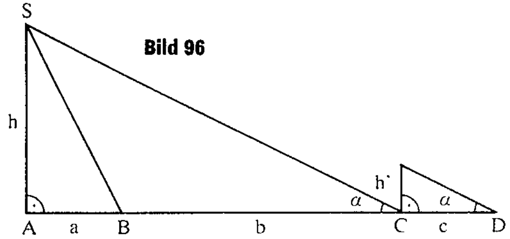


Bild 96

4

a) Das Bild 97 zeigt, daß das Hypotenusenquadrat mit den 7 Teilen genau überdeckt ist.

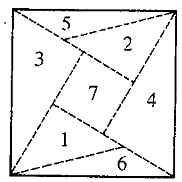


Bild 97

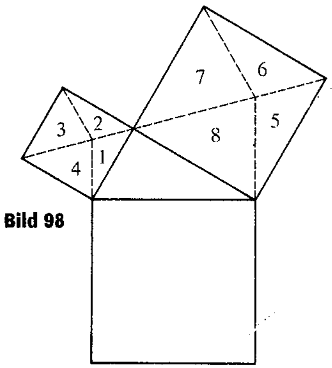


Bild 98

b) Das Bild 98 zeigt die Aufteilung auf die beiden Kathetenquadrate.

5

Aus $a:b=b:(a-b)$ folgt $b^2=a^2-ab$;

$$a^2-ab-b^2=0, \text{ also}$$

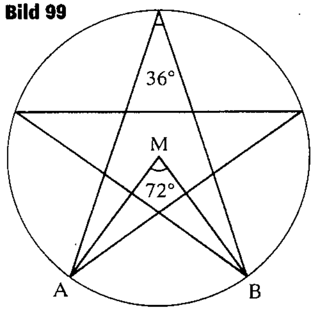
$$a=\frac{b}{2}\pm\frac{b}{2}\sqrt{5}, \text{ d. h.}$$

a und b können keine ganzen Zahlen sein.

6

Der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ (s. Bild 99) hat die Größe $360°:5=72°$. Deshalb hat der zugehörige Peripheriewinkel ADB über der gleichen Sehne $\overline{AB}$ die Größe $72°:2=36°$.

Bild 99



7

$1+3+5+7+\ldots+93+95+97+99$

$$=(1+99)+(3+97)+(5+95)+(7+93)+\ldots+(49+51)$$

$$=25\cdot 100=2\,500=50^2.$$

8

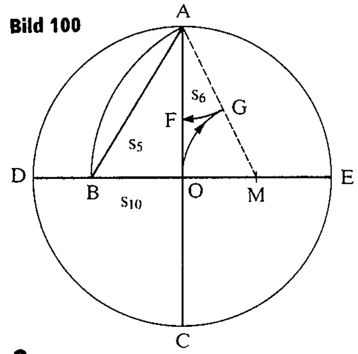
Zwischen den Seitenlängen s_5, s_6 und s_{10} (s. Bild 100) eines regelmäßigen Fünf-, Sechs- und Zehnecks gilt nach dem Goldenen Schnitt mit $\overline{AO}=s_6$; $\overline{OM}=s_6/2$;

$$\overline{AG}=\overline{AF}=\overline{BO}=s_{10} \text{ und } s_6^2+s_{10}^2=s_5^2.$$

Darauf beruht folgende Konstruktion:

Man zeichnet in einen Kreis mit dem Mittelpunkt O zwei zueinander senkrechte Durchmesser $\overline{AC}$ und $\overline{DE}$, schlägt um die Mitte M von $\overline{OE}$ den Kreis mit $\overline{MA}$ als Radius, der $\overline{OD}$ in B schneidet. Dann hat $\overline{AB}$ die Länge s_5.

Bild 100



9

Angenommen, im Hause des Pythagoras sind x Personen mit wissenschaftlichen Dingen beschäftigt; dann gilt

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3=x, \text{ also } x=28.$$

Es sind 28 Personen.

10

Die Differenzen der Quadrate zweier beliebiger aufeinanderfolgender Dreieckszahlen sind Kubikzahlen.
Es sei

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

die Summe von n natürlichen Zahlen; dann ist

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

die Summe von $(n+1)$ natürlichen Zahlen. Nun ist

$$a_{n+1}^2-a_n^2=\frac{[(n+1)(n+2)]^2}{4}-\frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

$$= \frac{(n^2+3n+2)^2 - n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3, \text{ w. z. b. w.}$$

11

Die Geschwindigkeit beträgt $v = 25$ Stadien/h $= 4{,}625$ km/h. Dann ist der Umfang $u = v \cdot t$. Mit $t = 2$ h beträgt der Umfang $u = 2 \cdot 4{,}625$ km $= 9{,}250$ km.

12

Städtebau im klassischen Griechenland

a) $q = \frac{80}{30} = \frac{8}{3}$

b) $q = \frac{2 \cdot 80}{4 \cdot 30} = \frac{4}{3}$

c) Länge des Wohnbezirks: $(6 \cdot 120 + 5 \cdot 15 + 33)$ Fuß $= 828$ Fuß
Breite des Wohnbezirks: $(3 \cdot 160 + 3 \cdot 24)$ Fuß $= 552$ Fuß
$q = \frac{828}{552} = \frac{3}{2}$

d) $80 \cdot 30$ Quadratfuß $=$ 2400 Quadratfuß $= 208{,}86\ \text{m}^2$

e) $160 \cdot 120$ Quadratfuß $=$ 19200 Quadratfuß $= 1670{,}88\ \text{m}^2$

f) $828 \cdot 552$ Quadratfuß $=$ 457056 Quadratfuß $= 39775{,}30\ \text{m}^2$

g) $\frac{457056 - 18 \cdot 19200}{457056} = \frac{111456}{457056} = 0{,}2439;\ p = 24{,}4\ \%$

13

Angenommen, der alte Grieche hatte anfangs x Goldstücke; dann gilt

$$[(2x-8) \cdot 2 - 8] \cdot 2 - 8 = 0;\ (4x-24) \cdot 2 = 8;\ x = 7.$$

Er hatte anfangs 7 Goldstücke bei sich.

14

Angenommen, ein Schaf kostet x, also ein Ochse $(x+6)$ Drachmen. Dann gilt

$$13(x+6) + 41x = 159;\ x = 1{,}5.$$

Ein Schaf kostet 1,5 Drachmen.

15

$$50 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 3 \cdot 300 = 112\,500\,000 \text{ (Volk)}$$

16

Das griechische Heer bestehe aus x Mann. Dann gilt

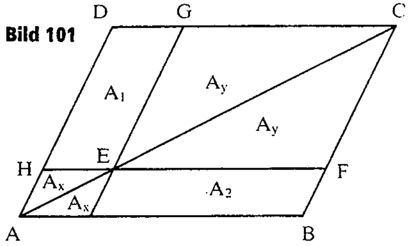
$$11x = 210\,000 - 10x;\ x = 10\,000.$$

Das griechische Heer zählte 10000 Mann.

17

Dem Bild 101 ist folgendes zu entnehmen:

Bild 101



$$A_x + A_y + A_1 = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} \text{ und } A_x + A_y + A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}, \text{ also}$$

$$A_1 = A_2, \text{ d. h.,}$$

beide Parallelogramme sind gleich groß.

18

Der alte Altar hat die Kantenlänge $a = 2$ m und das Volumen $V_1 = a^3 = 8\ \text{m}^3$. Der neue Altar besitzt das Volumen $V_2 = 2a^3 = 2 \cdot 8\ m^3 = 16\ m^3$ und die neue Kantenlänge
$x = a\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}\ \text{m} \approx 2{,}52$ m.
Es wäre also konstruktiv die dritte Wurzel aus 2 zu bestimmen. Das ist aber mit Zirkel und Lineal nicht möglich.

19

Für $n = 5$ erhält man

$$(2^n - 1) \cdot 2^{n-1} = 31 \cdot 16 = 496.$$

496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.

Für $n = 7$ erhält man

$$(2^n - 1) \cdot 2^{n-1} = 127 \cdot 64 = 8\,128.$$

$$8\,128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1\,016 + 2032 + 4\,064.$$

20

Hatten Sie Erfolg beim Nachzeichnen der Ornamente?

21

Es sei x diejenige Strecke, die Achilles zurücklegt, bis er die Schildkröte einholt; die Schildkröte legt in dieser Zeit $\frac{x}{10}$ der Strecke zurück. Darum gilt

$1 + \frac{x}{10} = x$, also $x = \frac{10}{9}$.

Nach $\frac{10}{9}$ km $= 1\frac{1}{9}$ km holt Achilles die Schildkröte ein.

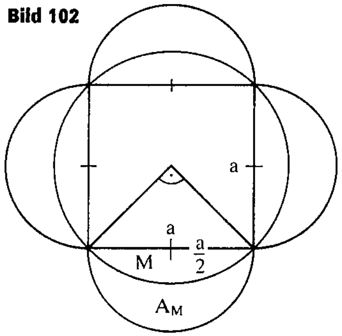
22

Für den Flächeninhalt eines Möndchens gilt (s. Bild 102)

$$A_M = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ also}$$

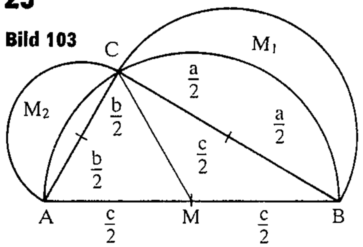
$$4A_M = a^2.$$

Bild 102



23

Bild 103



$$M_1 + M_2 = \frac{1}{2}\,ab + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

$$M_1 + M_2 = \frac{1}{2}\,ab + \frac{1}{8}\cdot\pi\cdot(a^2 + b^2 - c^2).$$

Wegen $a^2 + b^2 = c^2$ gilt

$M_1 + M_2 = \frac{1}{2}\,ab$, also

$M_1 + M_2 = A_{ABC}$.

24

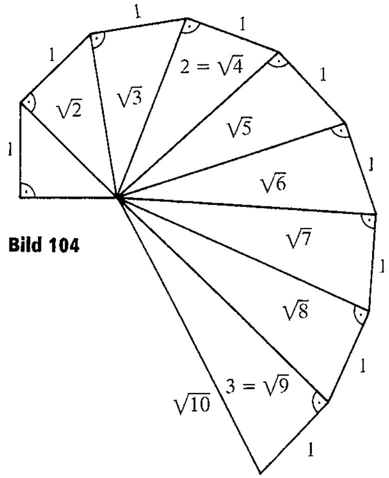


Bild 104

25

Wegen $s = v \cdot t$ und $s_1 = s_2$ gilt

$60(x+1) = 70x$, also

$x = 6$ und somit

$s = 60 \cdot 7 = 420$ Parasangen bzw.

$s = 420 \cdot 5{,}549$ km $\approx 2\,330$ km.

Die Entfernung von Sardes nach Susa beträgt etwa 2 330 km.

26

Die Gesamtzahl der Rinder sei x; dann gilt

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} + \frac{x}{20} + \frac{x}{30} + 50;$$

$x = 240.$

Die Gesamtzahl der Rinder beträgt 240.

27

Angenommen, es waren x Äpfel. Dann gilt

$$x = \frac{x}{5} + \frac{x}{12} + \frac{x}{8} + \frac{x}{20} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 30 + 120 + 300 + 50;$$

$x = 3\,360.$

Eros hatte 3 360 Äpfel vom Helikon geholt.

28

Angenommen, es waren insgesamt x Personen. Dann gilt

$$x = 4 + 12 + 5 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{25} + 1;$$

$x = 50.$

Zu Hause hielten sich 50 Personen auf.

29

Sind alle vier Ausflußröhren geöffnet, so gilt für x Stunden

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{36} + \frac{x}{48} + \frac{x}{6} = 1;$$

$$x = \frac{144}{37} = 3\frac{33}{37}.$$

In $3\frac{33}{37}$ Stunden ist das Gefäß gefüllt.

30

Für x Stunden gemeinsamer Tätigkeit gilt

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 1;$$

$$x = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}.$$

Gemeinsam wird das Becken in $1\frac{1}{11}$ Stunden bzw. in $\frac{1}{11}$ des Tages gefüllt.

31

Angenommen, Zethus wiegt x Minen. Dann wiegt Amphion $(20 - x)$ Minen, und es gilt

$$\frac{x}{3} + \frac{20-x}{4} = 6, \text{ also}$$

$x = 12.$

Zethus wiegt 12, Amphion 8 Minen.

32

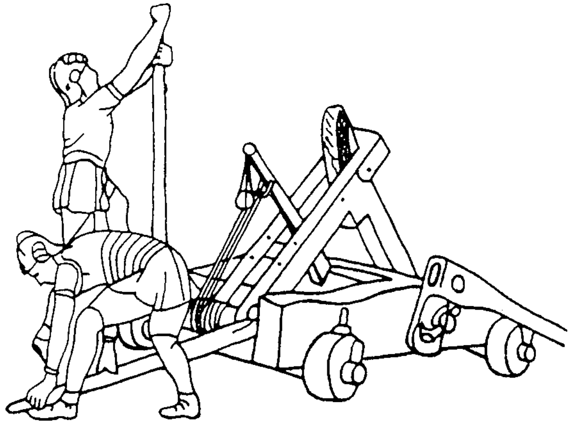
Angenommen, der Bruder habe x Talente, der sich Beklagende y Talente erhalten; dann gilt

$x + y = 5$ und $y = \frac{x}{5} \cdot \frac{7}{11}$. Daraus folgt

$x = 4\frac{27}{62}$ und $y = \frac{35}{62}$ (Talente).

Der sich Beklagende erhielt $\frac{35}{62}$ Talente, sein Bruder $4\frac{27}{62}$ Talente.

Bild 105
Auf zahlreichen Gebieten des Militärwesens finden wir eine Reihe mathematisch-technischer Leistungen, wie große geometrisch exakt gestaltete Heerlagen, präzise Marschpläne, standfeste Verteidigungsanlagen. Unsere beiden Bilder zeigen, wie bereits im Altertum die Menschen im Kampf mit dem Feind sinnvoll konstruierte und wirkungsvolle Maschinen eingesetzt haben, besonders die Griechen und Römer. So wird z. B. von Archimedes berichtet, daß er zur Verteidigung seiner Heimatstadt Syrakus (gegen die Römer) solche Maschinen entwikkelte. 212 v. u. Z. gelang es jedoch den Römern, die Stadt einzunehmen. Archimedes fand dabei den Tod. Wir stellen eine Kriegsmaschine vor: Das Bild zeigt eine Wurfschleuder, mit der Steine gegen den Feind geschleudert wurden.



33

Angenommen, die Bildsäule wog x Talente; dann gilt

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{x}{10} + \frac{x}{20} + 9;$$

$$x = 40.$$

Diese Bildsäule wog 40 Talente.

34

Nach Bild 106:

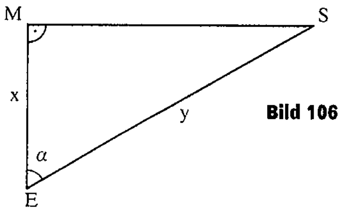
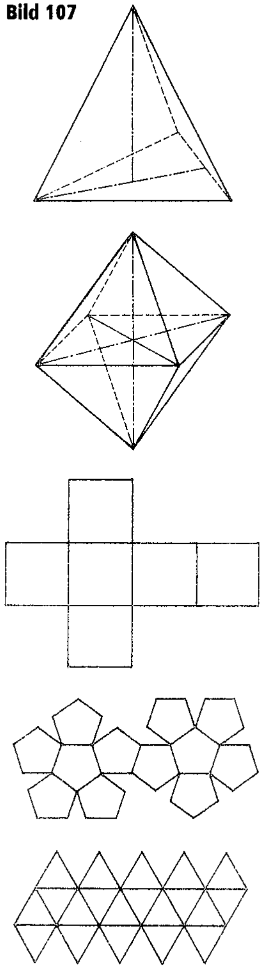


Bild 106

$$v = \frac{y}{x} = 390; \; y = 390x;$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{390x} = \frac{1}{390} \approx 0{,}0025641; \; \alpha \approx 89{,}85°.$$

Bild 107



Der Winkel α beträgt in Wahrheit 89,85°.

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{18} \approx 0{,}05555; \; \alpha_1 \approx 86{,}8°;$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{20} = 0{,}05000; \; \alpha_2 \approx 87{,}1°.$$

Aristarch hat für den Winkel α die falsche Abschätzung $86{,}8° < \alpha < 87{,}1°$ vorgenommen.

35

a) s. Bild 107

b)

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Ecken	4	8	6	20	12
Flächen	4	6	8	12	20
Kanten	6	12	12	30	30

36

Angenommen, der Esel trug x, das Maultier y Maß. Dann gilt

$$2(x-1) = y + 1 \text{ und}$$

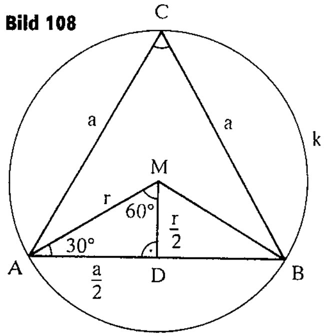
$$x + 1 = y - 1; \; x = 5 \text{ und } y = 7.$$

Der Esel trug 5 Maß, das Maultier 7 Maß.

37

Wir verbinden M mit A und B und fällen das Lot $\overline{MD}$ von M auf

Bild 108



$\overline{AB}$. Der Zentriwinkel AMB ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel ACB. Deshalb hat der Winkel AMD die Größe 60°, der Winkel MAD die Größe 30°. Im rechtwinkligen Dreieck ADM gilt $\overline{AM} = 2 \cdot \overline{DM}$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2; \frac{a^2}{4} + \frac{r^2}{4} = r^2; \text{ also}$$

$$a^2 = 3r^2 \text{ (s. Bild 108).}$$

38

1. Man konstruiere über $\overline{AB}$ das Quadrat $ACDB$ und halbiere $\overline{AC}$; der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ sei E. Man verbinde B mit E. Der Kreis um E mit dem Radius $\overline{EB}$ schneide die über A hinaus verlängerte Strecke $\overline{CA}$ in F. Man konstruiere über $\overline{AF}$ das Quadrat $AHGF$. Die Gerade GH schneide $\overline{CD}$ in K. Dann hat man $\overline{AB}$ in H so geteilt, daß $\overline{AB} \cdot \overline{BH} = \overline{AH}^2$ gilt. Die Strecke $\overline{AB}$ habe die Länge a, also $\overline{AE}$ die Länge $\frac{a}{2}$, $\overline{BE}$ die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ nach dem Satz des Pythagoras, $\overline{AF}$ die Länge

$$\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

und $\overline{BH}$ die Länge

$$a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}) \text{ (s. Bild 109).}$$

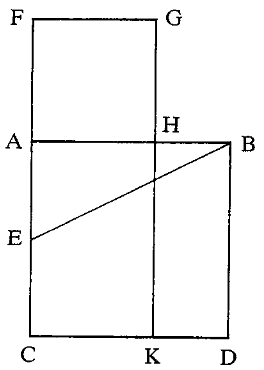


Bild 109

Für den Flächeninhalt des Rechtecks $BHKD$ gilt deshalb

$$A_R = a \cdot \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{a^2}{2}(3 - \sqrt{5});$$

für den Flächeninhalt des Quadrates $AHGF$ gilt

$$A_Q = \frac{a^2}{4}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$$

$$= \frac{a^2}{2}(3 - \sqrt{5}), \text{ also } A_R = A_Q.$$

2. Im abgebildeten Kreis k mit dem Mittelpunkt M mögen sich zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Punkt S schneiden. Wir verbinden M mit S. Würde S die Sehne $\overline{AC}$ halbieren, dann müßte der Winkel MSA ein rechter sein. Würde S die Sehne $\overline{BD}$ halbieren, dann müßte Winkel MSB ebenfalls ein rechter sein. Das heißt, die Punkte A und B müßten zusammenfallen. Dies ist aber nicht möglich, da die Sehnen sich nach Voraussetzung in S schneiden sollen (s. Bild 110).

Bild 110

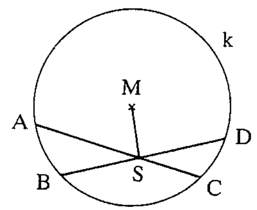
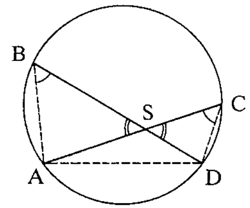


Bild 111



3. Die Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ mögen sich in S schneiden. Als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AD}$ sind die Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle ACD$ kongruent. Als Scheitelwinkel sind die Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle CSD$ ebenfalls kongruent. Deshalb gilt

$$\Delta ASB \sim \Delta CSD \text{ (s. Bild 111).}$$

Daraus folgt $\overline{AS} : \overline{BS} = \overline{DS} : \overline{CS}$ bzw.

$$\overline{AS} \cdot \overline{CS} = \overline{BS} \cdot \overline{DS}.$$

4. Auf dem Kreis k legen wir einen beliebigen Punkt A' fest. Im Punkte A' konstruieren wir die Tangente $QA'P$ an den Kreis k. In A' tragen wir an $A'P$ den Winkel der Größe γ an, dessen freier Schenkel k in B' schneidet. In A' tragen wir an $A'Q$ den Winkel der Größe β an, dessen freier Schenkel k in C' schneidet. Wir verbinden B' mit C'. Da ein Sehnen-Tangenten-Winkel kongruent ist jedem Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen, hat Winkel $A'C'B'$ die Größe γ, Winkel $A'B'C'$ die Größe β.
Daraus folgt $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (s. Bild 112).

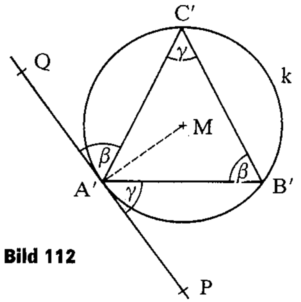


Bild 112

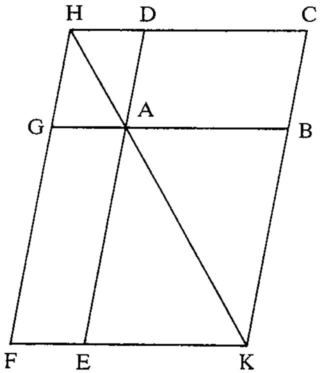


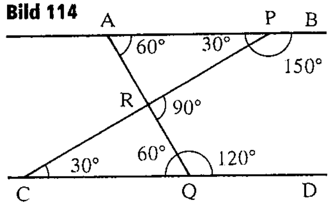
Bild 113

5. Die Geraden FG und CD mögen sich in H, die Geraden FE und CB in K schneiden. Aufgrund der Voraussetzungen liegen die Punkte H, A und K auf einer Geraden. Nach dem Strahlensatz gilt $(\overline{KB}+\overline{BC}):\overline{KB}=(\overline{CD}+\overline{DH}):\overline{AB}$ bzw. wegen

$\overline{KB}=\overline{AE}$ und $\overline{DH}=\overline{AG}$ und $\overline{CD}=\overline{AB}$
$(\overline{AE}+\overline{AD}):\overline{AE}=(\overline{AB}+\overline{AG}):\overline{AB}$, also
$1+\overline{AD}:\overline{AE}=1+\overline{AG}:\overline{AB}$,

also $\overline{AD}:\overline{AE}=\overline{AG}:\overline{AB}$ und somit auch $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AG}:\overline{AD}$ (s. Bild 113).

6. Es gilt $\sphericalangle ECR = \sphericalangle BPR = 5x$ (s. Bild 114); denn $AB \parallel CD$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha+\beta=3x$, $\alpha+\gamma=4x$, $\beta+\gamma=5x$, also $2(\alpha+\beta+\gamma)=12x$, $\alpha+\beta+\gamma=6x$ und $180° = 6x$, also $x = 30°$.

Bild 114


Daraus folgt

$\alpha = 180° - 150° = 30°$,
$\beta = 60°$, $\gamma = 90°$.

Somit gehören alle Winkel in Bild 114 zur arithmetischen Folge 30, 60, 90, 120, 150; ihre gemeinsame Differenz ist $x = 30$.

7. Im Dreieck ABQ gilt $\sphericalangle ABQ = 180° - 5x$; im Dreieck PDA gilt $\sphericalangle PDA = 180° - 4x$; im Sehnenviereck $ABCD$ gilt $\sphericalangle ABQ + \sphericalangle CDA = 180°$, also $180° - 5x + 180° - 4x = 180°$, also $x = 20°$. Dann ist $\sphericalangle APD = 20°$, $\sphericalangle BQA = 40°$, $\sphericalangle QAB = 60°$, $\sphericalangle ABQ = 80°$, $\sphericalangle DCB = 120°$, $\sphericalangle ADC = 100°$.

39

1. Die Seite des Quadrates habe die Länge a. Der umschriebene Kreis hat die Fläche

$A_u = \pi r_u^2 = \frac{\pi a^2}{2}$ und der innere Kreis hat die Fläche

$A_i = \pi r_i^2 = \frac{\pi a^2}{4}$. Dann gilt

$A_u = 2 \cdot A_i$ bzw. $\frac{\pi a^2}{2} = 2 \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{2}$.

2. Wir verbinden M mit A und B, fällen das Lot $\overline{MD}$ von M auf $\overline{AB}$. Der Zentriwinkel AMB ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel ACB. Deshalb hat der Winkel AMD die Größe 60°, der Win-

kel MAD die Größe 30°. Im rechtwinkligen Dreieck ADM gilt somit $\overline{AM} = 2 \cdot \overline{DM}$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2, \ \frac{a^2}{4} + \frac{r^2}{4} = r^2,$$

also $a^2 = 3 \cdot r^2$.

3. Es sei a die Länge einer Quadratseite. Für die schraffierten Flächen gilt dann im Quadrat:

$$A_a = a^2 - \frac{1}{4} a^2 \cdot \pi = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$A_b = a^2 - \frac{1}{4} \pi a^2 = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$A_c = a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$A_d = a^2 - \frac{1}{4} a^2 \cdot \pi = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Die vier gelben Flächen haben den gleichen Flächeninhalt; es gibt keine mit dem größten Flächeninhalt.

4. Die beiden Kreisbögen erzeugen im Quadrat drei Flächen. Für eine der nicht gelben Flächen gilt

$$A_x = a^2 - \frac{1}{4} \pi \cdot a^2 = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Für den gelben Flächeninhalt gilt somit

$$a^2 - 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Daraus folgt weiter

$$a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) : a^2 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57.$$

Die gelbe Fläche macht rund 57 % vom Flächeninhalt des Quadrates aus.

5. Aus

$$A_a = \frac{\pi a^2}{4} \text{ und}$$

$$A_b = 4 \cdot \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4} \text{ folgt}$$

$$A_a = A_b.$$

6. Für die gelben Flächen der Figuren gilt

$$A_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot d^2 + \frac{1}{4} \pi \left(\frac{d^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \pi d^2 + \frac{1}{16} \pi d^2 = \frac{3}{16} \pi d^2.$$

$$A_b = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{3d}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \pi \left(\frac{d}{4}\right)^2 = \frac{9}{64} \pi d^2 - \frac{1}{64} \pi d^2$$

$$= \frac{8}{64} \pi d^2 = \frac{1}{8} \pi d^2. \text{ Also gilt } A_a > A_b.$$

7. Aus $k = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi \cdot r$ und

$$s = 4 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot 2\pi \frac{r}{4} = \pi \cdot r \text{ folgt } k = s.$$

$4a^2-$

8. $A_a = (2a)^2 \cancel{+} \frac{1}{4} \pi (2a)^2 - a^2 - \frac{1}{4} \pi a^2 - \left(a^2 - \frac{1}{4} \pi a^2\right)$

$$= a^2(4 - \pi), \quad (\pi - 2)a^2$$

$$A_b = a^2 + \frac{1}{4} \pi a^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2\left(1 + \frac{3}{8}\pi\right),$$

$$A_\psi = (2\alpha)^2 \cancel{- 4 \cdot \frac{1}{4}} \pi a^2 = \cancel{a^2(4 - \pi)}, \quad 2a^2(\pi - 2)$$

$$A_\delta = \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{4} \pi a^2 + \left[\frac{1}{4} \pi a^2 - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{8} a^2 (3\pi + 4),$$

$$A_\varepsilon = \alpha \cdot 2\alpha = 2\alpha^2,$$

$$A_f = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \pi a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4} \pi a^2\right) = \frac{1}{8} a^2 (12 + \pi).$$

9. $A_a = 3a \cdot a + \frac{1}{2}\pi a^2 = 3a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{a^2}{2}(6+\pi)$

$= \frac{1}{2}(6+\pi)\ \text{cm}^2 \approx 4{,}57\ \text{cm}^2,$

$A_b = 4a \cdot a + (4a^2 - \pi a^2) = 8a^2 - \pi a^2$

$= a^2(8-\pi) = (8-\pi)\ \text{cm}^2 \approx 4{,}86\ \text{cm}^2,$

$A_c = 2\left[\frac{1}{4}\pi(2a)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$

$+ \frac{1}{2}\pi a^2 = 2\pi a^2 = 2\pi\ \text{cm}^2 \approx 6{,}28\ \text{cm}^2.$

40

Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht des vom Körper verdrängten Flüssigkeitsvolumens, also

$m'g = mg - \varrho V f.$

Demzufolge ist das Volumen

$V = \frac{m - m'}{\varrho} = 625\ \text{cm}^3.$

Die Masse des Goldes sei G und die des Silbers S Gramm. Dann gilt das Gleichungssystem

$G + S = 10\,000$ und $\frac{G}{19{,}3} + \frac{S}{10{,}5} = 625$

mit den Lösungen $G = 7\,539$ und $S = 2\,461$.
Die Krone bestand aus 7 539 g Gold und 2 461 g Silber.
($\varrho = 1\ \text{g/cm}^3$)

41

Angenommen, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ haben in dieser Reihenfolge die Längen d_1, d_2, d_3 und d_4. Nach dem Höhensatz gilt

$d_4^2 = d_2 \cdot d_3.$

Der Kreis über $\overline{CD}$ als Durchmesser hat somit den Flächeninhalt

Bild 115
Archimedes. Stich von Troller.
Mit freundlicher Genehmigung des Deutschen Museums München

$A_x = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot d_4^2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot d_2 d_3.$

Der Flächeninhalt des Arbelos beträgt

$A_y = \frac{1}{8}\cdot\pi\,(d_1^2 - d_2^2 - d_3^2)$

$= \frac{1}{8}\cdot\pi\left[(d_2+d_3)^2 - d_2^2 - d_3^2\right] = \frac{1}{8}\cdot\pi\cdot 2d_2 d_3,$

$A_y = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot d_2 d_3$, also

$A_x = A_y.$

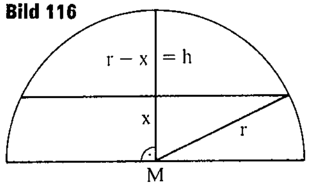
42

Der Schnitt zerlegt die Halbkugel (s. Bild 116) in ein Kugelsegment mit dem Volumen

$V_S = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2(3r - h)$. Dann gilt

$V_S = \frac{1}{4}V_K$ mit $V_K = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3.$

Bild 116



Da $h = r - x$, erhält man

$V_S = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{1}{3}\cdot\pi\,(r-x)^2\cdot[3r - (r-x)]$, also

$r^3 = (r-x)^2(2+x)$ und wegen $r = 1$ somit

$1 = (1-x)^2(2+x)$ bzw. $x^3 - 3x + 1 = 0.$

Diese kubische Gleichung besitzt die reelle Näherungslösung $x \approx 0{,}3\,473$. Der Abstand x der Schnittebene von der Grundfläche der Halbkugel beträgt deshalb $0{,}3473\ r$.

43

a) Für die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders gilt

$$A_M = 2\pi rh;$$

für die Kreisfläche soll gelten

$$A_K = \pi r_1^2 \text{ und } r_1^2 = h \cdot 2r.$$

Daraus folgt

$$A_K = 2\pi rh, \text{ also } A_M = A_K.$$

b) Es gilt

$$\frac{A_E}{A_K} = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{\pi \cdot r^2} = \frac{ab}{r^2}.$$

Wegen $d = 2a$, also $r = a$ erhalten wir durch Einsetzen

$$\frac{A_E}{A_K} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}.$$

c) Aus $\frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{11}{14}$ folgt $\pi = \frac{4 \cdot 11}{14} = \frac{22}{7}$.

Das ist ein guter Näherungswert für die Zahl π, der in Schulbüchern heute noch zu finden ist.

44

Aus $\frac{26}{15} > \sqrt{3}$ folgt $\frac{676}{225} > 3$ und somit $676 > 675$.

Fehler:

$$\left(\frac{26}{15} - \sqrt{3}\right) : \sqrt{3} \approx 0{,}00074;$$

das entspricht einer Abweichung von 0,074 % vom wahren Wert.

45

Das Volumen einer Kugel beträgt

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Das Volumen dieses speziellen Kegels beträgt

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3.$$

Daraus folgt

$$V_1 : V_2 = 4 : 1.$$

46

Die Mantelfläche beträgt
$A_M = \pi rs$ und die Grundfläche $A_G = \pi r^2$. Dann gilt

$$A_M : A_G = (\pi rs) : (\pi r^2) = s : r.$$

47

Der Inkreis eines Quadrates mit der Seitenlänge a hat den Durchmesser a, der Umkreis den Durchmesser $d = a\sqrt{2}$. Für die Flächeninhalte vom Um- und Inkreis eines Quadrates gilt deshalb

$$\begin{aligned} A_u : A_i &= \left(\frac{1}{4}\pi d^2\right) : \left(\frac{1}{4}\pi a^2\right) \\ &= d^2 : a^2 = (a\sqrt{2})^2 : a^2 \\ &= 2 : 1. \end{aligned}$$

48

a) $\frac{360°}{7{,}2°} \cdot 5\,000$ ägyptische Stadien $= 250\,000$ ägyptische Stadien;

b) $250 \cdot 184{,}72$ km $= 46\,180$ km

c) $46\,180$ km $- 40\,000$ km $= 6\,180$ km. Der damals ermittelte Erdumfang wurde um 6 180 km länger angenommen.

49

3	5	7	~~9~~	11
13	~~15~~	17	19	~~21~~
23	~~25~~	~~27~~	29	31
~~33~~	~~35~~	37	~~39~~	41
43	~~45~~	47	~~49~~	~~51~~
53	~~55~~	~~57~~	59	61
~~63~~	~~65~~	67	~~69~~	71
73	~~75~~	~~77~~	79	~~81~~
83	~~85~~	~~87~~	89	~~91~~
~~93~~	~~95~~	97	~~99~~	

50

$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$; von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p-1$, p, $p+1$ ist genau eine durch drei teilbar. Da p eine Primzahl größer als 3 ist, sind $p-1$ und $p+1$ gerade Zahlen, von denen eine durch 2, die andere durch 4 teilbar ist. Deshalb ist p^2-1 durch $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ teilbar.

51

Jede natürliche Zahl läßt sich durch $6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$ oder $6n+5$ mit $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ darstellen. Alle Primzahlen größer als 2 sind ungerade Zahlen, die sich deshalb nur durch $6n+1$, $6n+3$ oder $6n+5$ darstellen lassen. Da $6n+3 = 3(2n+1)$ durch 3 teilbar ist, entfällt diese Möglichkeit für Primzahlen größer als 3.

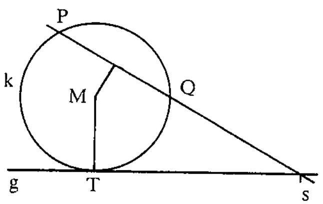
Wegen $6n+5 = 6(n+1) - 1 = 6m - 1$ für $m = n+1$ und da m und n beliebige natürliche Zahlen sind, läßt sich jede Primzahl größer als 5 durch $6n+1$ bzw. $6n-1$ darstellen.

Um Primzahlen nach dem Verfahren des Eratosthenes zu ermitteln, braucht man sich nur auf die Zahlen $6n+1$ bzw. $6n-1$ zu beschränken.

52

a) Angenommen, der zu konstruierende Kreis k mit dem Mittelpunkt M berühre die Gerade g in T, die durch P und Q gelegte Gerade schneide g in S (s. Bild 117). Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz gilt dann $\overline{SP} \cdot \overline{SQ} = \overline{ST}^2$. Nach dem Höhensatz läßt sich $\overline{ST}$

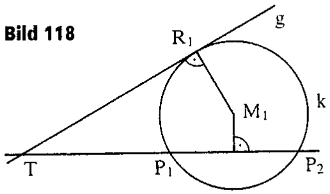
Bild 117



konstruieren, also der Punkt T ermitteln. Die Mittelsenkrechte von PQ schneidet die Senkrechte zu g durch T in M. Da man $\overline{ST'} = \overline{ST}$ auch nach der anderen Seite abtragen kann, hat die Aufgabe zwei Lösungen.

b) Es sei k der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 (s. Bild 118), der durch die Punkte P_1 und P_2 geht und die Gerade g in R_1 berührt. Verbindet man P_1 mit P_2 und verlängert die Gerade P_1P_2, bis sie die Gerade g in T schneidet, so gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $\overline{TP_1} \cdot \overline{TP_2} = \overline{TR}_1^2$, wonach $\overline{TR_1}$ nach dem Höhensatz konstruierbar ist, und demzufolge ist der Punkt R_1 bekannt. Der Mittelpunkt M_1 ergibt sich dann als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von P_1P_2 und der Senkrechten in R_1 auf g. Der Radius von k ist dann z. B. $\overline{M_1P_1}$.

Bild 118



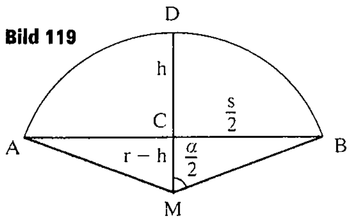
Trägt man $\overline{TR_1}$ von T aus auf g noch einmal nach der entgegengesetzten Seite ab, so erhält man den Berührungspunkt R_2 eines zweiten Kreises mit dem Mittelpunkt M_2, der ebenfalls durch P_1 und P_2 geht. Die Aufgabe hat daher zwei Lösungen (FE ≙ Flächeneinheiten).

53

a) $A = \dfrac{h(s+h)}{2} + \dfrac{1}{14}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3 \cdot 11}{2} + \dfrac{25}{56}\right)\text{(FE)} \approx 17\text{ (FE)}$

b) $A = \left(\dfrac{\pi \cdot \alpha}{180°} - \sin\alpha\right) \cdot \dfrac{r^2}{2}$

Bild 119



Dem Bild 119 ist folgendes zu entnehmen:

$r^2 = 4^2 + (r-3)^2$, also

$$r = \frac{25}{6};\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r} = \frac{24}{25} = 0{,}9\,600,$$

also

$$\frac{\alpha}{2} = 73{,}73°,\ \alpha = 147{,}46°.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$A = \left(\pi\frac{147{,}46°}{180°} - 0{,}5376\right)\frac{625}{72}\ (\text{FE}) \approx 17{,}67\ (\text{FE}).$$

Bild 120
Claudius Ptolemäus (um 100–nach 160 u. Z.), alexandrinischer Astronom, Mathematiker und Geograph, wirkte in Alexandria. Er schuf mit seinem »Almagest« eine erste systematische Ausarbeitung der Astronomie. Ptolemäus vertrat das sogenannte geozentrische Weltsystem. Unser Bild: Astronomia lehrte Ptolemäus, die Sterne zu beobachten. Holzschnitt aus dem 15. Jh.
Mit freundlicher Genehmigung der Forschungs- und Landesbibliothek Gotha

54

a) $\sqrt{3} \approx 1{,}7320508$

b) $c^2 = 3;\ x = \frac{3}{x};\ x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1{,}75;$

$x_3 = \frac{1}{2}(1{,}75 + 1{,}7142857) \approx 1{,}7321428$ usw.

55

$\sin 15° = \frac{\overline{IS}}{1} = \overline{IS};$

$2 \cdot \overline{IS} = \overline{IM'}$, Basis des gleichschenkligen $\Delta OM'I$.

$\overline{IM'}^2 = \overline{CM'}^2 + \overline{CI}^2$, rechtwinkliges $\Delta M'CI$,

$\overline{CM'} = \frac{1}{2}$, die halbe Seite des gleichseitigen $\Delta OM'M$.

$\overline{CI} = 1 - \overline{OC} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Dann ist

$$\sin 15° = \overline{IS} = \frac{\overline{IM'}}{2} \text{ und mit } \overline{IM'} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

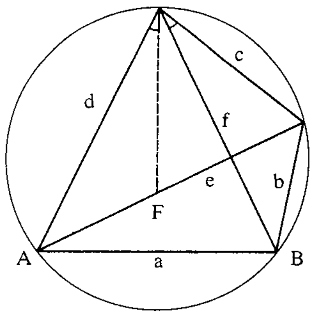
$$\sin 15° = \frac{\sqrt{1 + (2 - \sqrt{3})^2}}{4}.$$

56

Nach Konstruktion gelte $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADF$; als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{CD}$ gilt $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$. Folglich sind die Dreiecke AFD und BCD einander ähnlich (s. Bild 121). Deshalb gilt weiter $\overline{AD} : \overline{AF} = \overline{BD} : \overline{BC}$, also $\overline{AF} = \overline{AD} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$. Auch die Dreiecke DFC und ABD sind einander ähnlich, und es gilt $\overline{FC} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{DB}$, also $\overline{FC} = \overline{DC} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$. Nun ist $\overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}$. Durch Einsetzen erhalten wir $\overline{AD} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} + \overline{DC} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \overline{AC}$;

$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ bzw. $ac + bd = ef$.

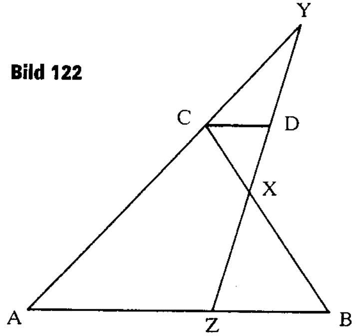
Bild 121



57

Die Gerade möge $\overline{AB}$ in Z, $\overline{BC}$ in X, die Verlängerung von $\overline{AC}$ in Y schneiden, und es gelte $AB \| CD$ (s. Bild 122). Nach dem Strahlensatz gilt dann $\overline{AY}:\overline{CY} = \overline{AZ}:\overline{CD}$ und $\overline{BX}:\overline{CX} = \overline{BZ}\cdot\overline{CD}$ bzw.
$\overline{CD} = \dfrac{\overline{AZ}\cdot\overline{CY}}{\overline{AY}}$ und $\overline{CD} = \dfrac{\overline{BZ}\cdot\overline{CX}}{\overline{BX}}$, also $\overline{AZ}\cdot\overline{BX}\cdot\overline{CY} = \overline{AY}\cdot\overline{BZ}\cdot\overline{CX}$.

Bild 122



58

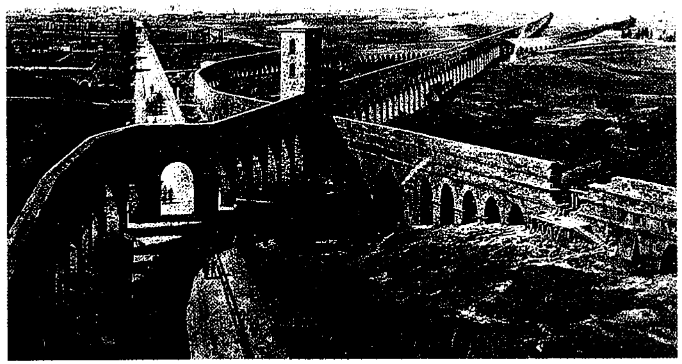
Angenommen, Diophant wurde x Jahre alt. Dann gilt

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x;$$

$$x = 84.$$

Diophant wurde 84 Jahre alt.

Bild 123
Von der hochentwickelten römischen Bautechnik zeugen vor allem auch die Aquädukte – auf steinernen, oft mehrstöckigen Bogenkonstruktionen geführte Wasserleitungen. Damit wurden römische Städte mit frischem Trinkwasser versorgt. Unser Bild zeigt eine solche »Ader des Lebens« (Gemälde von Zeno Diemer).
Mit freundlicher Genehmigung des Deutschen Museums München



59

a) Für die beiden Zahlen m und n gilt $m = a^2 + b^2$ und $n = c^2 + d^2$, also
$m \cdot n = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2$,
$m \cdot n = (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2$,
$m \cdot n = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = p^2 + q^2$ für $p = ac + bd$ und
$q = ad - bc$, d. h., das Produkt $m \cdot n$ ist gleich der Summe zweier Quadrate.

b) $m \cdot n = 5780 = 17 \cdot 340$,
$m \cdot n = (1 + 16)(16 + 324)$,
$m \cdot n = (1^2 + 4^2)(4^2 + 18^2)$.
Es existieren weitere Zerlegungen.

60

a) Es gilt $x + y = a$ bzw. $y = a - x$ und $x \cdot y = b$.
Daraus folgt

$$x(a - x) = b; \quad x^2 - ax + b = 0.$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right), \quad y_1 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right), \quad y_2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

b) $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{25-16}) = 4; \quad y = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{25-16}) = 1.$

61

vorgegebener Wert	Abweichung	prozentuale Abweichung
$3\frac{1}{7} = 3{,}142857$	0,001264	0,0402 %
$3\frac{10}{71} = 3{,}140845$	−0,000748	−0,0238 %
$3\frac{1}{8} = 3{,}125$	−0,016593	−0,5282 %
$\sqrt{10} = 3{,}162278$	0,020685	0,6584 %
$\frac{355}{113} = 3{,}141593$	0	0 %
$\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}160494$	0,018901	0,6016 %
$\frac{62\,832}{20\,000} = 3{,}1416$	0,000007	0,0002 %
$\frac{104\,348}{33\,215} = 3{,}141593$	0	0 %
$\frac{142}{45} = 3{,}155556$	0,013963	0,4445 %
$3\frac{17}{120} = 3{,}141667$	0,000074	0,0024 %
$1{,}8 + \sqrt{1{,}8} = 3{,}141641$	0,000048	0,0015 %
$\frac{13}{50}\sqrt{146} = 3{,}141592$	−0,000001	0 %
$\frac{7}{10^7} + \frac{13}{50}\sqrt{146} = 3{,}141593$	0	0 %
$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}146264$	0,004672	0,1487 %

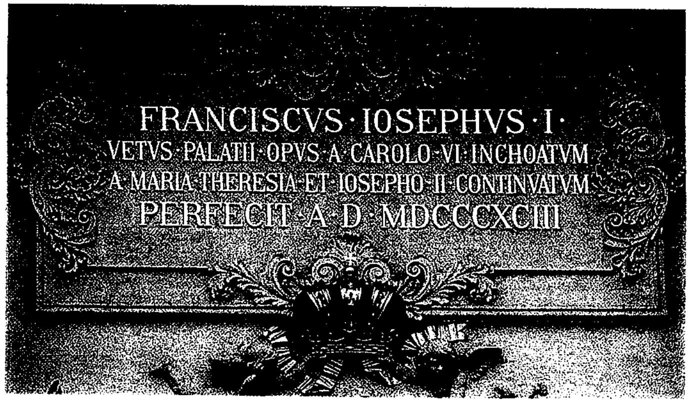
62

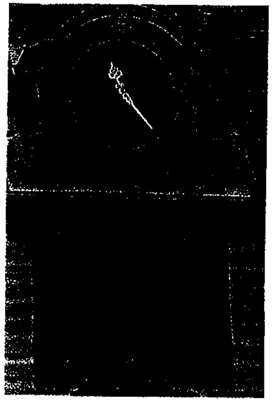
Im Bild 124 sehen Sie die Lösung.

Bild 124

1.4	ↆI	51
1.4	XXCIIII	84
1.5	ↆXXIIII	74
1.5	CXXIII	123
1.6	CↆXXX	180
1.7	CCXXXI	231
1.7	CCXXXVII	237
1.8	CCCXXI	321
1.12	ÐCCCCXVII	917

Bilder 125/126
Römische Ziffern sind in der römischen Welt sowie in Westeuropa bis zum 15. Jahrhundert ein allgemein gebrauchtes Zahlensystem. Alten Traditionen folgend, werden die römischen Zahlen bis in unsere Zeit, besonders in der Baukunst, eingesetzt.
Unsere Bilder zeigen Motive aus der Wiener Hofburg.
Fotos: E. Hofbauer, Wien





63

a) –

b) Weiße Rinder: 12 Stück; schwarze Rinder: $\frac{12 \cdot 2}{3} = 8$ Stück; braune Rinder: $12 - \frac{8}{4} = 10$ Stück; scheckige Rinder: $\frac{12}{2} + 8 = 14$ Stück; insgesamt 44 Rinder.

c) Angenommen, Titus hatte x, Gajus also $x + 4$ Söhne; dann gilt

$$500 + 250x + 500 + 250(x+4) = 3\,500,$$

also $x = 3$.

Titus hatte drei, Gajus sieben Söhne.

64

Die Jahreszahl ist 874. Wenn die Gründung Roms im Jahre 753 v. u. Z. erfolgte, dann wurden die Zirkusspiele im Jahre 121 u. Z. gestiftet.

65

Entsprechend der Zahl auf der Münze müßten 72 derartige Münzen ein römisches Pfund (324 g) Gold ergeben. Die Münze müßte also eine Masse von $m = \frac{324\ g}{72} = 4{,}5\ g$ haben.

66

Die Zahl heißt 93.

67

Die Zahl heißt 149.

68

Sind a und b die beiden Halbachsen einer Ellipse, dann gilt für

$$u \approx \pi (a + b) = \pi (94 + 78)\,\text{m} = 540\,\text{m} \text{ und für}$$

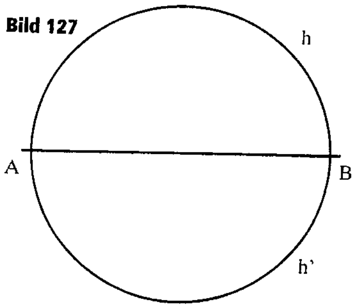
$$A = \pi ab = \pi \cdot 43 \cdot 27\,\text{m}^2 = 3\,646\,\text{m}^2.$$

Das Kolosseum hat einen Umfang von 540 m und die Arena eine Fläche von 3 646 m².

69

Eine abgeschlossene Fläche ist dann am größten, wenn diese geschlossene Kurve ein Kreis ist. Der Halbkreis h und dessen Spiegelbild h' bilden bei Spiegelung an der Geraden AB (Meeresufer) eine geschlossene Kurve doppelter Länge. Deshalb ist die eingeschlossene Fläche dann am größten, wenn Dido einen Halbkreis umgrenzt (s. Bild 127).

Bild 127



70

Auf jede Person entfallen $(7 + 8) : 3 = 5$ Schüsseln. Cajus muß für $7 - 5 = 2$ Schüsseln, Sempronius für $8 - 5 = 3$ Schüsseln entschädigt werden. Deshalb sind die 30 Silberlinge im Verhältnis 2:3 zu teilen, also $2 : 3 = (30 - x) : x$; $x = 18$.
Cajus muß 12 Silberlinge, Sempronius 18 Silberlinge erhalten.

71

Angenommen, der Sohn müßte x, die Tochter y, die Witwe z Denar erhalten. Dann gilt

$$x + y + z = 3\,500 \text{ und } x = 2z \text{ und } y = \frac{1}{2} z.$$

Daraus folgt durch Einsetzen

$$2z + \frac{1}{2} z + z = 3\,500, \text{ also}$$

$$z = 1\,000;\ x = 2\,000;\ y = 500.$$

Die Witwe müßte 1 000 Denar, der Sohn 2 000 Denar, die Tochter 500 Denar erhalten.

72

Angenommen, Bacchus leerte $6 + x$, Silen y Becher. Dann gilt $x : y = 5 : 3$ und $6 + x = 2y$. Aus diesem Gleichungssystem folgt $x = 30$ und $y = 18$.
Bacchus hatte deshalb 36, Silen 18 Becher geleert.

73

Angenommen, der Händler besaß zu Beginn x Groschen. In der ersten Stadt gab er $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6}$ Groschen aus; es verblieben ihm $x - \frac{5x}{6} = \frac{x}{6}$ Groschen. In der zweiten Stadt gab er $\frac{x}{12} + \frac{x}{18} = \frac{5x}{36}$

Bild 128
Schulszene, Relief von Neumagen bei Trier, nach 150 u. Z.
Mit freundlicher Genehmigung des Landesmuseums Trier

Groschen aus; ihm verblieben $\frac{x}{6}-\frac{5x}{36}=\frac{x}{36}$ Groschen. In der dritten Stadt gab er $\frac{x}{72}+\frac{x}{108}=\frac{5x}{216}$ Groschen aus; ihm verblieben $\frac{x}{36}-\frac{5x}{216}=\frac{x}{216}$ Groschen. Nun gilt $\frac{x}{216}=1$, also $x=216$.
Zu Beginn seiner Einkäufe besaß der Händler 216 Groschen.

74

Berechnung nach Columella:

$$A=\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{10}=\frac{13a^2}{30}$$
$$=\frac{13\cdot 100}{30}\quad \text{(Flächeneinheiten)}$$
$$\approx 43{,}33\quad \text{(Flächeneinheiten).}$$

Berechnung nach heutiger Formel:

$$A=\frac{1}{4}a^2\cdot\sqrt{3}$$
$$=25\sqrt{3}\quad \text{(Flächeneinheiten)}$$
$$\approx 43{,}30\quad \text{(Flächeneinheiten).}$$

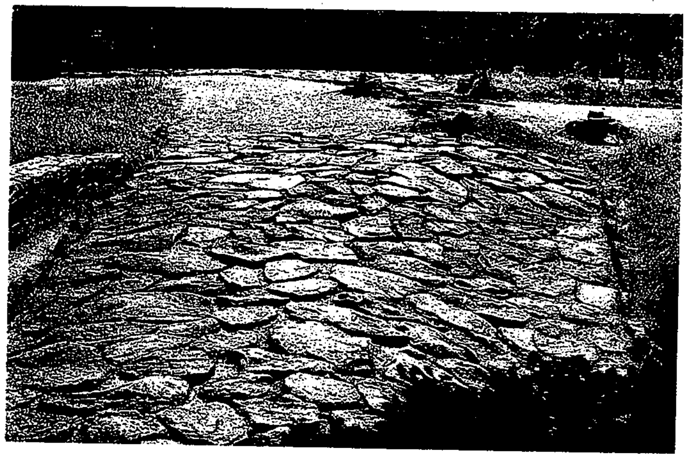


Bild 129
Reste einer römischen Straße in Szombathely, Westungarn. Das Römische Reich wurde von gepflasterten Straßen durchzogen. Auf ihnen konnten Heeresabteilungen rasch verlegt werden. Das Bauwesen war der technisch am weitesten entwickelte Zweig der römischen Wirtschaft.
Foto: G. Zirnstein, Leipzig

Bild 130
Der Limes (lat. Grenzweg, Grenze, Grenzwall). In der römischen Kaiserzeit war er die befestigte Reichsgrenze. Der seit dem 1. Jh. u. Z. angelegte Limes diente ursprünglich der Kontrolle des Vorfeldes; er wurde im 2. und 3. Jh. entsprechend der nun nötigen Schutzfunktion weiter ausgebaut, vermochte aber seit der Zeit Mark Aurels (121–180 v. u. Z.) den Feinden Roms nicht mehr standzuhalten. Neben einem vorbildlichen Straßen- und Wasserleitungsbau waren die Römer hervorragende Architekten, die eine große Zahl monumentaler Bauten, wie Theater, Arenen, Triumphbögen, Bürgerforen schufen. Unser Bild zeigt einen rekonstruierten Wachturm.
Foto: Karl Röttel, Buxheim bei Ingolstadt

75

Es gibt eine Lösungsstrategie: Die Farbe, die beginnt, braucht nı sofort das Mittelfeld 5 zu besetzen und anschließend keinen Fehl mehr zu machen.

76

Bild 131 zeigt, wie die Quadrate zusammengesetzt werden könne um ein Rechteck mit den Ausmaßen 32 × 33 Einheiten zu bilden.

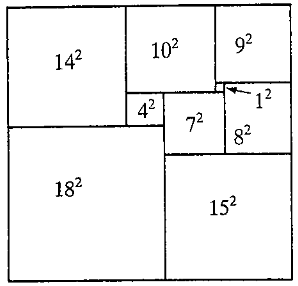


Bild 131

77

Bezeichnen wir die bei I, II, III waagerecht gesuchten Zahlen dieser Reihenfolge mit u, v, w bzw. die bei I, II, III senkrecht zu b stimmenden mit x, y, z, so gilt

3 (III) ≦ u, v, w, x, y, z ≦ 3 000 (MMM).

Da w keine Primzahl sein darf, ist die römische Schreibweise von nicht III (3) und auch nicht VII (7), weshalb sie mit X, L, C, D od M beginnen muß. Somit endet die von x auch auf eines dieser Z chen, falls die römische Schreibweise von v nicht mit I begin was aber, weil v ein Vielfaches von 73 sein muß, in den angeget nen Schranken nicht möglich ist. Folglich ist x durch 10 teilb Darum kann nur

$x = 10^2; 20^2; 30^2; 40^2; 50^2$

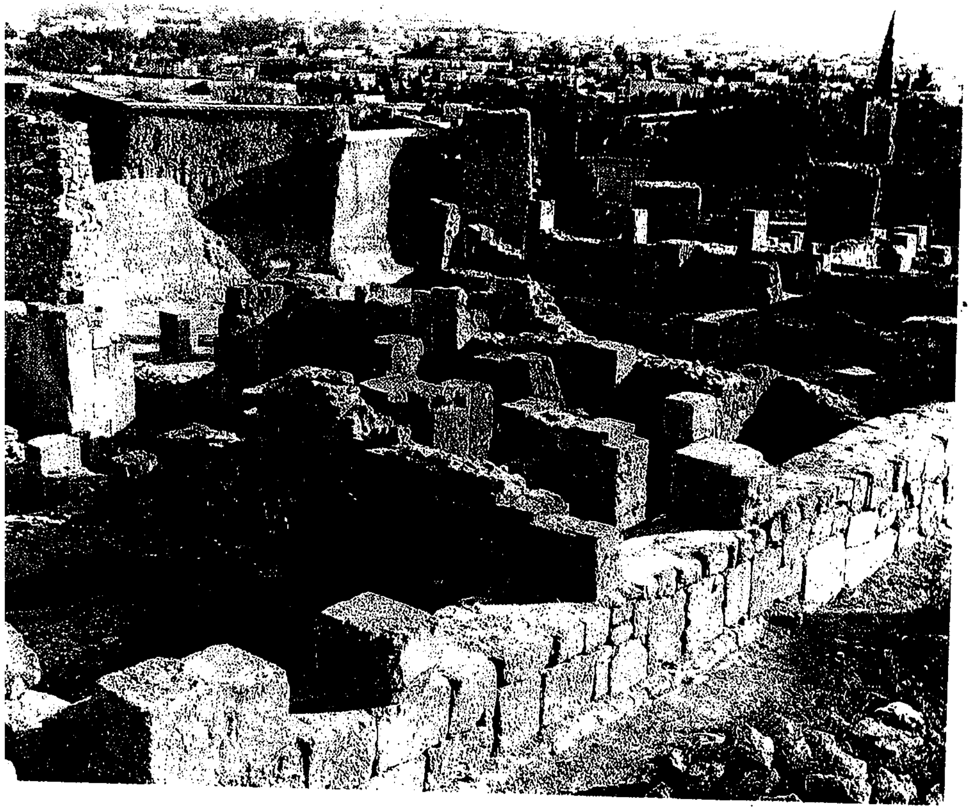
gelten. (60^2 ist bereits größer als 3 000.) Demnach hat x die rör sche Darstellung

C; CD; CM; MDC oder MMD.

Träfe MMD zu, so müßte die römische Darstellung von w mit beginnen und somit 500 < w ≦ 25 000 sein, was aber offenbar ni möglich ist. Damit kann nur noch MDC (1 600) richtig sein. In d

Bild 132
Karthago, einst Zentrum der antiken Welt. Dort trafen alle Mittelmeerkulturen aufeinander. Die Stadt fiel im Dritten Punischen Krieg (146 v. u. Z.) unter dem Ansturm der Römer und wurde dem Erdboden gleichgemacht.
Foto: Karl-Heinz Schneider, Bernau

sem Falle schließt man, daß w die römische Darstellung CLX (160) hat. Folglich beginnt die römische Zahldarstellung von v mit D und endet höchstens mit C, so daß $500 \leqq v \leqq 700$ gilt. Da v aber ein Vielfaches von 73 ist, kann nur $v = 511$; 584; 657 zutreffen. Lediglich wenn $v = 511$ und damit die römische Darstellung DXI hat, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllbar. Da y ein Vielfaches von 7 und u ein Vielfaches von 37 ist, folgert man, daß y die römische Zahldarstellung CXL (140) und u die Darstellung MCX (1110) haben muß. Jetzt ist das Alter Calpurnias XIX ablesbar. Calpurnia war 19 Jahre alt.



Literaturverzeichnis

Das nachfolgende Gesamtliteraturverzeichnis gibt dem Leser Standardliteratur für alle sechs Bände von »4000 Jahre Mathematik in Aufgaben«.

Das Bamberger Blockbuch (Reprint). Rechenbuch aus dem 15. Jh. München/New York/Paris 1980

Basmakowa, I. G.: Diophant und die diophantischen Gleichungen. Berlin 1974

Becker, O.: Das mathematische Denken der Antike. Göttingen 1957

Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. München 1964

Bell, E. T.: Die großen Mathematiker. Düsseldorf 1967

BI-Lexikon: *Kahnt, H./B. Knorr:* Alte Maße, Münzen und Gewichte. Leipzig 1986

BI-Lexikon: Herausg. *R. Koch:* Uhren und Zeitmessung. Leipzig 1987

Biermann, K.-R.: Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810–1920. Berlin 1973

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner. Von den 80 Bänden, im B. G. Teubner-Verlag Leipzig erschienen (seit 1967), seien genannt:
Wußing: C. F. Gauß. *Hoppe:* Johannes Kepler. *Schmutzer/Schütz:* G. Galilei. *Brentjes/Brentjes:* Ibn Sina. *Ilgauds:* N. Wiener. *Tobies:* F. Klein, *Thiele:* L. Euler. *Stolz:* O. Hahn und L. Meitner. *Hamel:* F. W. Bessel. *Grabow:* Simon Stevin. *Purkert/Ilgauds:* Georg Cantor. *Wußing:* Adam Ries.

Böschenstain, J.: Ain neu geordnet Rechenbuchlein mit den zyffern, Augsburg 1518 (Reprint). Dresden 1983

Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen 1971

Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bände. New York/Stuttgart 1965

Conrad, W.: Vom Jakobsstab zur Satellitennavigation. Leipzig/Jena/Berlin 1979

Davis, P./H. Reuben: Erfahrung Mathematik. Basel/Boston/Stuttgart 1986

Deweß, M./G. Deweß: Summa summarum. Kostproben unterhaltsamer Mathematik. Leipzig 1987

Deubner, F.: ... Nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters. Leipzig/Jena 1959

Dieudonné, J.: Geschichte der Mathematik 1700 bis 1900. Berlin 1985

Drinfel'd, G. I.: Quadratur des Kreises und Transzendenz von π. Berlin 1980

Euklid: Die Elemente. Buch I–XIII. Leipzig 1984

Fieder, R.: Streifzüge durch die Mathematik. Mathematikaufgaben aus 4 Jahrtausenden. Berlin 1984

Gauß, C. F.: Wissenschaftliches Tagebuch, 1796 bis 1814. Leipzig 1975

Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Berlin/Heidelberg/New York/Tokio 1984

Hankel, H.: Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Hildesheim 1965

Heermann, Ch.: Von der Zahl zum Gesetz. 1974

Herrmann, D. B.: Vom Schattenstab zum Riesenspiegel. Berlin 1978

Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik. Teil 1 bis 3. Berlin 1953 bis 1957

Hogben, L.: Die Entdeckung der Mathematik. Stuttgart 1963

Hühn, Ch./S. Pietzsch: Vom Kerbholz zum Computer. Aus der Geschichte der Rechentechnik. Berlin 1988

Ifrah, G.: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/M./New York 1987

Ignatjew, E. I.: Mathematische Spielereien (aus dem Jahre 1908). Leipzig/Moskau 1978

Jentsch, W.: Michael Stifel, Leipzig 1987

Juschkewitsch, A. P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964

Kaden, F.: Kleine Geschichte der Mathematik. Berlin 1987

Kaiser, H./W. Nöbauer: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht. Wien/München 1984

Kleffe, H.: Menschen messen Jahr und Tag. Berlin 1985

Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Reprint in einem Band. Berlin/Heidelberg/New York 1979

Kolosow, A. A.: Kreuz und quer durch die Mathematik. Interessante mathematische Probleme – wie sie entstanden, wie sie gelöst wurden, was sie für die heutige Mathematik bedeuten. Berlin 1963

Konforowitsch, A. G.: Guten Tag, Herr Archimedes. Unterhaltsame Mathematikaufgaben vom Altertum bis zur Gegenwart. Leipzig 1986
Krysicki, W.: Zählen und Rechnen einst und jetzt. Leipzig 1968
Kuhrt, H./A. Kutschmar: Baustilfibel. Berlin 1984
Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. Leipzig 1968
Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Leipzig 1969
Lietzmann, W.: Altes und Neues vom Kreis. Leipzig 1966
Life (Autorenkollektiv): Wunder der Wissenschaft: Die Mathematik. Niederlande 1969
Mainzer, K.: Geschichte der Geometrie. Mannheim/Wien/Zürich 1980
Menninger, K.: Zahlwort und Ziffer. Eine kleine Kulturgeschichte der Zahlen. Göttingen 1958
Meschkowski, H.: Problemgeschichte der Mathematik. 2 Bände. Mannheim/Wien/Zürich 1979/81
Miller, M.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme. Leipzig 1973
Neugebauer, O.: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften; Bd. 1 Vorgriechische Mathematik. Berlin/Heidelberg/New York 1969
Nikiforowski, W. A./L. F. Freiman: Wegbereiter der neuen Mathematik. Leipzig/Moskau 1976
Padelt, E.: Mit dem Meßrad um die Welt. Kleine Geschichte von der Kunst des Messens. Berlin 1989
Pieper, H.: Heureka – Ich hab's gefunden. 55 historische Aufgaben der Elementarmathematik mit Lösungen. Berlin 1988
Popp, W.: Geschichte der Mathematik im Unterricht. 2 Bde. München 1968
Resnikoff, H. L./R. O. Wells Jr.: Mathematik im Wandel der Zeiten. Braunschweig/Wiesbaden 1983
Schäfer, J. Ch.: Die Wunder der Rechenkunst. Eine Zusammenstellung der rätselhaftesten und belustigendsten arithmetischen Kunstaufgaben. Berlin 1985
Schreiber, P.: Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie. Leipzig 1980
Schröder, E.: Dürer – Kunst und Geometrie. Berlin 1980
Smogorschewski, A. S.: Lobatschewskische Geometrie. Leipzig 1978
Struik, D. J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. Berlin 1976
Thiele, R.: Die gefesselte Zeit. Spiele, Spaß und Strategien meist aus historischer Sicht. Leipzig 1984
Autorenkollektiv: Streifzüge durch die Mathematik. 2 Bde. Leipzig 1965/66
Szabo, A.: Anfänge der griechischen Mathematik. Budapest/Berlin 1969
Tietze, H.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. München 1982
Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1 bis 7, Berlin 1980
Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik. 2 Bde. Hannover/Paderborn 1958/59
Vogel, K.: Chiu Chang Shu. Neun Rechenbücher arithmetischer Technik. Ein chinesisches Rechenbuch. Braunschweig 1968
Vogel, K./H. Hunger: Ein byzantisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis, Wien 1963
Waerden, B. L. van der: Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Basel/Stuttgart 1956
Wagner, U.: Das Bamberger Rechenbuch von 1483 (Reprint). Berlin 1988
Wußing, H. (Autorenkollektiv): Geschichte der Naturwissenschaften. Leipzig 1983
Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin 1979
Wußing, H./H. Remane: Wissenschaftsgeschichte en miniature. Berlin 1989
Wußing, H./W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin 1989
Zilch, R.: Auf Mark und Pfennig. Berlin 1986

Sechs Bände zum Lesen und Lösen

Johannes Lehmann, Jahrgang 22, tritt mit 23 Jahren in den Schuldienst ein. Sein Herz schlägt für die Mathematik; er leitet Hobby-Matheclubs, Begabtenseminare, engagiert sich als Mathe-Mentor für die Unterhaltungsmathematik im Unterricht; er kurbelt die ersten deutschen Mathematik-Olympiaden an und demonstriert in über 1 800 Vorträgen, wie man Probleme der Schulmathematik kurzweilig präsentiert. Zwanzig Jahre lang steht er der mathematischen Schülerzeitschrift »alpha« als Chefredakteur vor und gilt mit neun Büchern als angesehener Promotor der Unterhaltungsmathematik.
Foto: W. Reinhold, Leipzig

Ein Abenteuer für Geist und Hand, das war die Mathematik für Gelehrte, Techniker und Handelsfahrer aller Zeiten.

Im Babylonischen Reich und im alten Ägypten entdeckten Priester, Schreiber und Architekten die ersten Zahlensysteme und Rechenmethoden für den Alltag.

Die Griechen erfanden den Beweis, sie gaben der Mathematik das Fundament. Ihre großartige Geometrie bewundern wir noch heute. In den Jahrhunderten römischer Dominanz stand die Mathematik im Dienste von Wirtschaft, Verwaltung und Verkehr der Eroberer. Ein beschwerliches Zahlensystem dämpfte die mathematische Entwicklung.

Über die Seidenstraße lief ein reger Kulturaustausch: Auch mathematische Kostbarkeiten gingen zwischen China, Indien und Arabien hin und her. Die Europäer erbten später im Gefolge von Handel und Krieg die Früchte orientalischer mathematischer Hochkultur.

Das Zeitalter der geographischen Entdeckungen und Eroberungen begründete den europäischen Wohlstand, ermöglichte den Ausbau von Welthandel, bürgerlicher Bildung und Manufakturwirtschaft. Die Mathematik verließ die Klosterenge und ging über die Rechen- und Schulmeister auf See und in die Handwerksbetriebe.

Astronomie und Physik initiierten nun die Naturwissenschaften und ihren mathematischen Welterfolg, die Mechanik. Es schlug die Geburtsstunde der akademischen Berufsmathematiker wie Bernoulli, Euler und Gauß.

Unser geschichtliches Aufgaben-Abenteuer endet mit volkstümlichen Problemen der heutzutage hochdifferenzierten Mathematik. Leute wie Klein, Cantor, Steinhaus oder Einstein kommen zu Wort; sie waren die akademischen Lehrer einer neuen Generation mathematischer Talente. Unsere reich bebilderte historische Mathematikaufgabensammlung ist in Europa einmalig.
Und so heißen die sechs Bände:
So rechneten Ägypter und Babylonier
So rechneten Griechen und Römer
So rechneten Chinesen, Inder und Araber
So rechneten Mönche, Rechen- und Schulmeister
So rechneten Künstler und Gelehrte
So rechnete unser Jahrhundert