PI mit der 6-Eck-Familie und der 4-Eck-Familie

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4, Jan 08   Update Jan 08
http://haftendorn.uni-lueneburg.de   www.mathematik-verstehen.de

++

Ein wesentlicher Term bei der Herleitung des 2n-Ecks aus dem n-Eck ist

```
w:=x->sqrt(2+x)
```

$$x \to \sqrt{2+x}$$

Dieses ist jetzt zu schachteln

```
(w@@k)(x)  $ k=1..4
```

$$\sqrt{x+2},\ \sqrt{\sqrt{x+2}+2},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{x+2}+2}+2},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+2}+2}+2}+2}$$

Diese Rekursion strebt für jedes x gegen 2

```
solve(w(k)=k,k)
```

$$\{2\}$$

w tritt in jedem n-Eck-Verdoppelungsverfahren auf.
Hier werden zuerst die 6-Ecke,12-Ecke, 24-Ecke... betrachtet,
dann unten die 4-Ecke,8-Ecke, 16-Ecke.   .

$$s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^{\;2}}}$$

$$w_k(x) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{x}}}}$$

##

6-Eck-Familie

Beim 6-Eck muss innen eine 3 stehen

```
(w@@k)(1)  $ k=0..5
```

$$1,\ \sqrt{3},\ \sqrt{\sqrt{3}+2},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}+2}+2},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}+2}+2}+2},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}+2}+2}+2}+2}$$

Das ist der richtige Wurzelturm, (w@@k) hat k Wurzeln.

```
matrix([float((w@@k)(1))$ k=0..10])
```


$$\begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.7320508075688772935274463415 \\ 1.9318516525781365734994863994 \\ 1.9828897227476208222891150538 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.7320508075688772935274463415 1 \\ 1.93185165257813657349948639946 \\ 1.98288972274762082228911505386 \\ 1.99571784647720701347613958255 \\ 1.99892917495273128885967289249 \\ 1.99973227581912356572549429812 \\ 1.99993306783480220691520762116 \\ 1.99998326688870129829511724114 \\ 1.99999581671780036208332744865 \\ 1.99999895417917665522219647493 \end{pmatrix}$$

s(k) ist die Seitenlänge des einbeschriebenen 6*2^k-Ecks.

```
s:=k->sqrt(2-(w@@k)(1)):
[6*2^k,s(k)] $ k=0..3
```

$$[6, 1], \left[12, \sqrt{2-\sqrt{3}}\right], \left[24, \sqrt{2-\sqrt{\sqrt{3}+2}}\right], \left[48, \sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}+2}+2}}\right]$$

Nun muss man unbedingt die Rechengenauigkeit erhöhen,
sonst bricht die Rechnung nach etwa 15 Schritten auseinander.

```
DIGITS:=30:
float(PI);
matrix([[6*2^k,float(3*2^k*s(k)) ] $ k=0..20])
```

$$3.14159265358979323846264338328$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3.0 \\ 12 & 3.10582854123024914818678605149 \\ 24 & 3.13262861328123819716174946949 \\ 48 & 3.13935020304686720713514682121 \\ 96 & 3.14103195089050963811135292646 \\ 192 & 3.14145247228546207545060930896 \\ 384 & 3.14155760791185764551646334513 \\ 768 & 3.14158389214831840866896960372 \\ 1536 & 3.14159046322805009573845850593 \\ 3072 & 3.14159210599927155054477664061 \\ 6144 & 3.14159251669215744759287408477 \\ 12288 & 3.14159261936538395518954931207 \\ 24576 & 3.14159264503369089667214150892 \\ 49152 & 3.14159265145076765170425364049 \\ 98304 & 3.14159265305503684169112318042 \\ 196608 & 3.14159265345610413926464315963 \\ 393216 & 3.14159265355637096366282331 66 \\ 786432 & 3.14159265358143766976266836618 \\ 1572864 & 3.14159265358770434628764837919 \\ 3145728 & 3.14159265358927101541889455821 \\ 6291456 & 3.14159265358966268270170618569 \end{pmatrix}$$

```
abst:=matrix([[6*2^k,float(PI-3*2^k*s(k))] $ k=0..20])
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 0.14159265358979323846264338328 \\ 12 & 0.0357641123595440902758573317909 \\ 24 & 0.00896404030855504130089391378777 \\ 48 & 0.00224245054292603132749656207108 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0.1415926535897932384626433832 8 \\ 12 & 0.0357641123595440902758573317909 \\ 24 & 0.0089640403085550413008939137877 7 \\ 48 & 0.0022424505429260313274965620710 8 \\ 96 & 0.0005607026992836003512904568198 43 \\ 192 & 0.0001401813043311630120340743182 77 \\ 384 & 0.0000350456779355929461800381496 433 \\ 768 & 0.0000087614414748297936737795583 4932 \\ 1536 & 0.0000021903617431427241848773485 5083 \\ 3072 & 0.0000005475905216879178667426693 82673 \\ 6144 & 0.0000001368976357908697692985106 51692 \\ 12288 & 0.0000000342244092832730940712141 07622 \\ 24576 & 0.0000000085561023417905018743600 0556992 \\ 49152 & 0.0000000021390255867583897427866 1026371 \\ 98304 & 0.0000000005347563967715202028613 3244057 \\ 196608 & 0.0000000001336890991980002236447 21777056 \\ 393216 & 0.0000000000334222747998200666803 514839849 \\ 786432 & 0.0000000000083555686999750171008 321535843 \\ 1572864 & 0.0000000000020888921749950040908 7533445772 \\ 3145728 & 0.0000000000005222230437488250706 50228320943 \\ 6291456 & 0.0000000000001305557609371975870 37557527133 \end{pmatrix}$$

```
matrix([abst[k+1,2]/abst[k,2]^(1) $ k=1..20])
```

$$\begin{pmatrix} 0.2525845194140931068301187834 54 \\ 0.2506434444237752105222198595 72 \\ 0.2501606938096760073796753674 76 \\ 0.2500401630048772452327261074 43 \\ 0.2500100400983803304931700727 24 \\ 0.2500025099837947145771019199 46 \\ 0.2500006274933986879572174892 59 \\ 0.2500001568731902980762955295 11 \\ 0.2500000392182876136574003854 04 \\ 0.2500000098045712808606187435 59 \\ 0.2500000024511427813055478915 33 \\ 0.2500000006127856928945297327 3 \\ 0.2500000001531964230715723753 93 \\ 0.2500000000382991057572296966 8 \\ 0.2500000000095747764034252588 54 \\ 0.2500000000023936938096732016 38 \\ 0.2500000000005984162018915080 87 \\ 0.2500000000001495787674272606 43 \\ 0.2500000000000354484220301527 1 \\ 0.2499999999999833775527459714 24 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass das Verfahren recht langsam konvergiert. Mit Probieren an dem Exponenten
kann man sehen, dass es wirklich nur linear konvergiert.
++
Berechnung der umschreibenden n-Ecke aus der 6-Eck-Familie

g(k) ist die Seitenlänge des umbeschriebenen 6*2^k-Ecks.

```
g:=k->2*s(k)/(2-s(k+1)^2)
```

```
g:=k->2*s(k)/(2-s(k+1)^2)
```

$$k \to \frac{2 \cdot s(k)}{2 - s(k+1)^2}$$

```
g(k) $ k=0..3
```

$$\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}, \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{\sqrt{3} + 2}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3} + 2} + 2}}, \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{3} + 2} + 2}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3} + 2} + 2} + 2}}$$

Annäherung an PI von oben

```
float(PI);
matrix([[6*2^k,float(3*2^k*g(k))] $ k=0..20])
```

$$3.141592653589793238462643383 28$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3.464101615137754587054892683 01 \\ 12 & 3.215390309173472477670643901 93 \\ 24 & 3.159659942097500483316634977 83 \\ 48 & 3.146086215131434971098098794 24 \\ 96 & 3.142714599645368298168859093 77 \\ 192 & 3.141873049979823871745487093 69 \\ 384 & 3.141662747056848526224490813 89 \\ 768 & 3.141610176604689538763470360 66 \\ 1536 & 3.141597034321526151993218894 81 \\ 3072 & 3.141593748771352027975981135 63 \\ 6144 & 3.141592927385097033548008299 05 \\ 12288 & 3.141592722038613818342804671 5 \\ 24576 & 3.141592670701998047877018250 5 \\ 49152 & 3.141592657867844419844008529 34 \\ 98304 & 3.141592654659306032497220392 25 \\ 196608 & 3.141592653857171436889364868 32 \\ 393216 & 3.141592653656637778806420358 163 \\ 786432 & 3.141592653606504375862713422 3 \\ 1572864 & 3.141592653593971022812640892 59 \\ 3145728 & 3.141592653590837684550141514 64 \\ 6291456 & 3.141592653590054349984517851 56 \end{pmatrix}$$

##
########

4-Eck-Familie

Beim 4-Eck muss innen eine 2 stehen, aber es muss eine Wurzel mehr sein

```
(w@@k)(sqrt(2)) $ k=0..4
```

$$\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2} + 2}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2} + 2}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2} + 2} + 2}$$

Das ist der richtige Wurzelturm

```
matrix([float((w@@k)(sqrt(2)))$ k=0..10])
```

```
matrix([float((w@@k)(sqrt(2)))$ k=0..10])
```

$$\begin{pmatrix} 1.41421356237309504880168872421 \\ 1.84775906502257351225636637879 \\ 1.96157056080646089825236447227 \\ 1.99036945334439377248967390622 \\ 1.99759091241034478542954320952 \\ 1.99939763739240844023153129933 \\ 1.99984940367828908184329298239 \\ 1.99996235056520228531398087546 \\ 1.9999905876191523430231602514 \\ 1.99999764690340381985805142034 \\ 1.99999941172576443832045643548 \end{pmatrix}$$

s(k) ist die Seitenlänge des einbeschriebenen 4*2^k-Ecks.

```
s:=k->_if( k=0,sqrt(2),sqrt(2-(w@@(k-1))(sqrt(2)))):
s(k) $ k=0..4
```

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \sqrt{2-\sqrt{\sqrt{2}+2}},\ \sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}},\ \sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}+2}}$$

Nun muss man unbedingt die Rechengenauigkeit erhöhen,
sonst bricht die Rechnung nach etwa 15 Schritten auseinander.

```
DIGITS:=30:
float(PI);
matrix([[4*2^k,float(2*2^k*s(k))] $ k=0..20])
```

$$3.14159265358979323846264338328$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2.82842712474619009760337744842 \\ 8 & 3.06146745892071817382767987224 \\ 16 & 3.12144515225805228557255789563 \\ 32 & 3.13654849054593926381425804444 \\ 64 & 3.14033115695475291231711852433 \\ 128 & 3.14127725093277286806201977079 \\ 256 & 3.14151380114430107632851505946 \\ 512 & 3.14157294036709138413580011027 \\ 1024 & 3.1415877252771597006288542627 \\ 2048 & 3.14159142151119997399797176374 \\ 4096 & 3.14159234557011774234037599416 \\ 8192 & 3.14159257658487266568160609224 \\ 16384 & 3.14159263433856298909547826363 \\ 32768 & 3.14159264877698566948510796928 \\ 65536 & 3.14159265238659134580352552106 \\ 131072 & 3.14159265328899276527194304218 \\ 262144 & 3.14159265351459312016334824329 \\ 524288 & 3.14159265357099320888771834496 \\ 1048576 & 3.14159265358509323106890579551 \\ 2097152 & 3.14159265358861823661420859108 \\ 4194304 & 3.14159265358949948800053466873 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass das Verfahren recht langsam konvergiert.

Man sieht, dass das Verfahren recht langsam konvergiert.
##
Berechnung der umschreibenden n-Ecke aus der 4-Eck-Familie

g(k) ist die Seitenlänge des umbeschriebenen 4*2^k-Ecks.

```
g:=k->2*s(k)/(2-s(k+1)^2)
```

$$k \to \frac{2 \cdot s(k)}{2 - s(k+1)^2}$$

```
g(k) $ k=0..3
```

$$2, \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}, \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{\sqrt{2} + 2}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}}, \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2} + 2}}$$

Annäherung an PI von oben, halber Umfang

```
float(PI);
matrix([[4*2^k,float(2*2^k*g(k))] $ k=0..20])
```

3.141592653589793238462643383[2]8

$$\begin{pmatrix} 4 & 4.0 \\ 8 & 3.3137084989847603904135097936[8] \\ 16 & 3.182597878074528110585561962[31] \\ 32 & 3.151724907429256098470320681[32] \\ 64 & 3.144118385245904262741972561[36] \\ 128 & 3.142223629942456845386208507 \\ 256 & 3.141750369168966459107213627[97] \\ 512 & 3.141632080703181805718715187[87] \\ 1024 & 3.141602510256808946763689658[49] \\ 2048 & 3.141595117749589050353092235[98] \\ 4096 & 3.141593269629307310789458786[83] \\ 8192 & 3.141592807599644576528254435[96] \\ 16384 & 3.141592692092254374228419557[18] \\ 32768 & 3.141592663215408416232179190[09] \\ 65536 & 3.141592655996197026269283162[77] \\ 131072 & 3.141592654191394184999569318[84] \\ 262144 & 3.141592653740193475070953991[62] \\ 524288 & 3.141592653627393297613100980[74] \\ 1048576 & 3.141592653599193253250156529[37] \\ 2097152 & 3.141592653592143242159515341[73] \\ 4194304 & 3.141592653590380739386860985[59] \end{pmatrix}$$

###