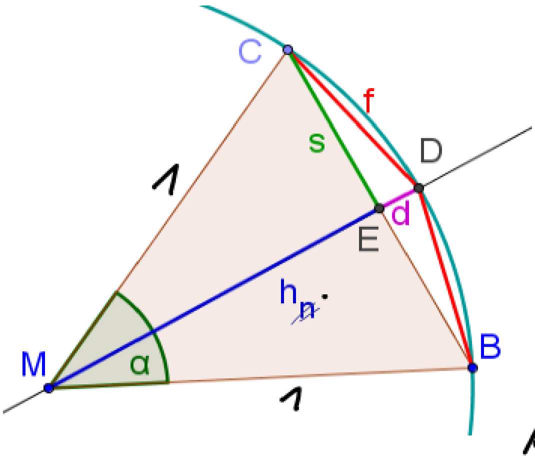
Approximation von PI

Durch fortgesetztes Verdoppeln der Eckenzahl einbeschriebener und umbeschriebener Vielecke kann man den halben Kreisumfang von unten und von oben approximieren. $\frac{1}{2}U = \pi$



t-Eck Familie $t\cdot 2^k$-Ecke

s_k Kante einbeschr. $t\cdot 2^k$-Eck

a_k " umbeschr. $t\,2^k$-Eck

Entwicklung einer Rekursion

$s = \frac{1}{2} s_k$ ‖ Es gilt offenbar (Pyth.)

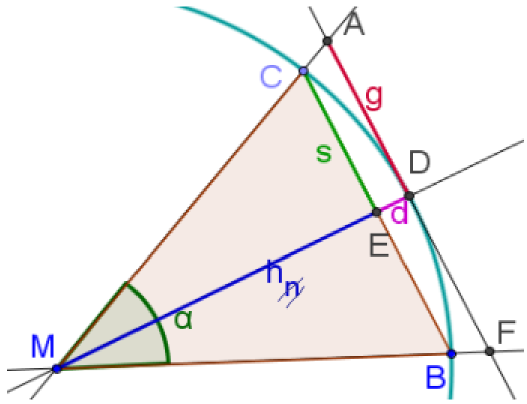
$f = s_{k+1}$ ‖ $h^2 + s^2 = 1$

$g = \frac{1}{2} a_k$ ‖ $s^2 + d^2 = f^2$ $\quad d = 1 - h$

Also $f^2 = s^2 + 1 - 2h + h^2 = s^2 + 1 - 2h + 1 - s^2$

$f^2 = 2 - 2h = 2 - 2\sqrt{1-s^2}$ $\Leftrightarrow$ $h = \frac{1}{2}(2 - f^2)$

Strahlensatz $\frac{g}{1} = \frac{s}{h} = \frac{2s}{2-f^2}$



Umschreiben auf s_k, a_k $\quad \sqrt{1-s^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}s_k^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-s_k^2}$

$s_{k+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_k^2}}$;

$a_k = \frac{2 s_k}{2 - s_{k+1}^2}$ oder $a_k = \frac{2 s_k}{\sqrt{4 - s_k^2}}$

6-Eck-Familie

6-Eck	12-Eck	$24 = 6\cdot 2^2$	$48 = 6\cdot 2^3$
$s_0 = 1$	$s_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$	$s_2 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$s_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

pro Schritt eine √ mehr

4-Eck-Familie

4-Eck	8-Eck	$16 = 4\cdot 2^2$	$32 = 4\cdot 2^3$
$s_0 = \sqrt{2}$	$s_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$	$s_2 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$s_3 = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}_{3\text{ innere }\sqrt{}}}$

Allgemein explizit

$6\cdot 2^k$-Eck $\quad w_k := \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{k\text{ Wurzeln}}$

$4\cdot 2^k$-Eck $\quad q_k := \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

$$a_k = \frac{2\sqrt{2-w_k}}{w_{k+1}} \qquad s_k = \sqrt{2-w_k}$$

$$a_k = \frac{2\sqrt{2-q_k}}{q_{k+1}} \qquad s_k = \sqrt{2-q_k}$$