# Einige Sätze, die Analysisbegriffe in Beziehung setzen

$f$ sei eine in einem Intervall $\mathfrak{I}_f$ aus $\mathbb{R}$ definierte Funktion von x

$g$ sei eine in einem Intervall $\mathfrak{I}_g$ aus $\mathbb{R}$ definierte Funktion von x , $r \in \mathbb{R}$

Diese Seite soll etwas plakativ die Zusammenhänge hervorheben. Auf die Betrachtung der Definitionsbereiche wird verzichtet. Auf Besonderheiten wie rechtsseitig stetig.... wird nicht eingegangen.

[1] Sind $f$ und $g$ stetig, dann sind auch $r \cdot f,\ \ f+g,\ f \cdot g,\ \ f \circ g,\ \frac{1}{f}$ stetig, natürlich bei passenden Definitionsbereichen, die letzte nicht bei den Nullstellen von $f$

[2] Ist $f$ gleichmäßig stetig in $\mathfrak{I}$, dann ist $f$ auch stetig i.a.S.

[3] Es gibt Funktionen, die stetig sind, aber nicht gleichmäßig stetig. Fkt. (1), (11)

[4] Es gibt Funktionen, die überall unstetig sind. Fkt. (2), (7)

[5] Zu jeder Zahl n gibt es Funktionen, die an genau n Stellen stetig sind. Fkt. (7),auch Weierstraß

[6] Ist $f$ differenzierbar, dann ist $f$ auch stetig.

[7] Es gibt stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind. Fkt. (4)

[8] In $\mathfrak{I}$ stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar in $\mathfrak{I}$.

[9] Es gibt Riemann-integrierbare Funktionen, die nicht stetig sind. Fkt. (4), (7)

[10] $f$ sei beschränkt in $\mathfrak{I}$. Dann gilt: $f$ ist genau dann Riemann-integrierbar in $\mathfrak{I}$, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen vom Maße 0 ist. Fkt. (4), (7)

[11] $f$ sei beschränkt und monoton in $\mathfrak{I}$. Dann ist $f$ Riemann-integrierbar in $\mathfrak{I}$.

[12] $f$ sei beschränkt und habe nicht unendlich viele Extrema in $\mathfrak{I}$. Dann ist $f$ Riemann-integrierbar in $\mathfrak{I}$.

[13] Es gibt Funktionen, bei denen sowohl die Stetigkeitsstellen als auch die Unstetigkeits-stellen dicht liegen, die dennoch Riemann-integrierbar sind. Fkt. (4), (7)

[14] Es gibt Funktionen mit unendlich vielen Maxima und Minima in $\mathfrak{I}$, die dennoch Riemann-integrierbar sind. . Fkt. (4), (7)

[15] Es gibt Funktionen mit in $\mathfrak{I}$ stetiger Stammfunktion, die dennoch nicht in $\mathfrak{I}$ integrierbar sind. Fkt. (12)

[16] Notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, dass ihre Glieder eine Nullfolge bilden.

[17] Ein Reihe mit positiven und negativen Gliedern darf genau dann umgeordnet werden, wenn sie "absout konvergiert", d.h. wenn die Reihe aus den Absolutwerten der Glieder auch konvergiert. Anderen falls kann man durch Umordnen jeden beliebigen Wert mit der Reihe darstellen. ( Riemann, auch in der Habilitationsschrift)

[18] Dirichlet-Bedingungen für die Dartstellbarkeit einer gegebenen periodischen Funktion $f$ durch eine trigonometrische Reihe: a) $f$ ist integrierbar im Periodenintervall $\mathfrak{I}$

b) $f$ hat nicht unendliche viele Extrema, c) an Sprungstellen wird der mittlere Wert angenommen

[19] Riemann ersetzt in [18] a) Riemann-Integrierbarkeit voraus und kann daher auf b) verzichten. Er dreht die Fragestellung um und betrachtet Funktionen, die durch eine trigonometrische Reihe definiert werden. Sie bieten überraschende Eigenschaften.

[20] z.B. Es gibt solche Funktionen, bei denen die Glieder der Reihe für jedes x eine Nullfolge bilden und die Reihe dennoch in jedem Intervall unendlich oft divergiert und konvergiert. . Fkt. (8), (9), nach Umschreiben auch (5)