Horst Hischer, Harald Scheid: "Grundbegriffe der Analysis, Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht" Spektrum Akad. Verlag Heidelberg 1994, ISBN 3-86025-498-7
Das Buch ist leider schon lange vergriffen.

Durch Verknüpfen stetiger Funktionen mit der auf $\mathbb{R}$ definierten *Signumfunktion* sgn mit

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 \text{ für } x < 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ 1 \text{ für } x > 0 \end{cases}$$

kann man beliebig komplizierte Funktionen mit Unstetigkeitsstellen 1. Art erzeugen.

(7) Beispiel: Die auf $\mathbb{R}^*$ definierte Funktion

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(\sin \frac{1}{x})$$

besitzt unendlich viele Sprungstellen in jeder Umgebung von 0 (Fig. 4).

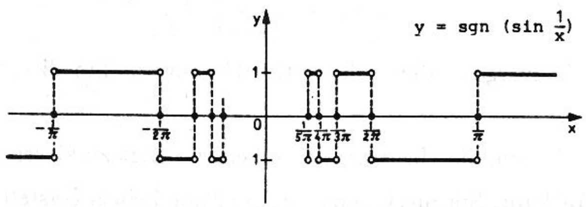

Fig. 4

(8) Beispiel: Auf $]0;1[$ sei die Funktion f wie folgt definiert: Für $x \in\,]0;1[$ betrachte man in der Dezimalbruchentwicklung (ohne Neunerperioden) die erste von 0 verschiedene Ziffer z_x und setze $f(x) := \frac{1}{z_x}$.

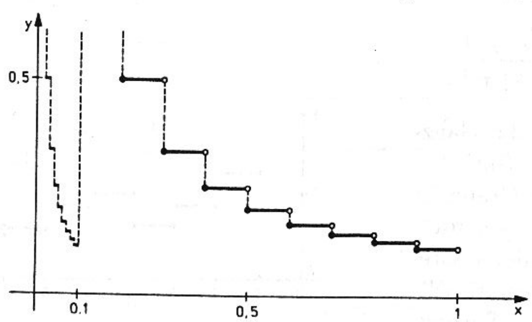

Fig. 5

In Fig. 5 ist der Graph von f angedeutet. Die Menge der Unstetigkeitsstellen ist die Menge der Zehnerbrüche $\frac{z}{10^n}$ mit $z \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Es handelt sich um Unstetigkeitstellen 1. Art. Sie häufen sich an der Stelle 0. Der Wertebereich ist $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}\}$.

Im folgenden Beispiel stellen wir eine Funktion dar, bei der sowohl die Stetigkeitsstellen als auch die Unstetigkeitsstellen dicht in sich liegen.

(9) Beispiel: Die Funktion f sei auf $]0;1[$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, \text{ falls } x \text{ irrational,} \\ \frac{1}{q}, \text{ falls } x = \frac{p}{q} \; (p, q \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{ggT}(p,q) = 1). \end{cases}$$

Der Graph von f ist in Fig. 6 angedeuetet.

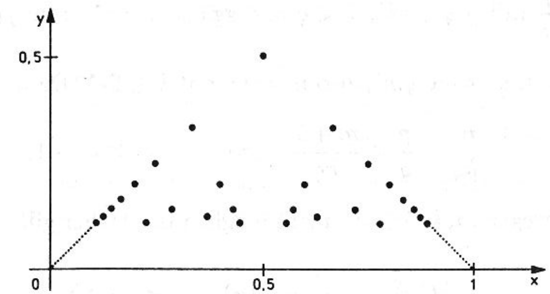

Fig. 6

1) An jeder rationalen Stelle ist f unstetig: Sei $a = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$ und $\operatorname{ggT}(p,q) = 1$, also $f(a) = \frac{1}{q}$. Wir setzen

$$a_n := a + \frac{1}{q^{n+1}} = \frac{q^n p + 1}{q^{n+1}}.$$

Wegen $\operatorname{ggT}(q^n p + 1, q^{n+1}) = 1$ ist $f(a_n) = \frac{1}{q^{n+1}}$ und damit

$$\lim\langle f(a_n)\rangle = \lim\langle \frac{1}{q^{n+1}}\rangle = 0 \neq f(a).$$

2) An jeder irrationalen Stelle ist f stetig: Sei $a \in\,]0;1[\, \setminus \mathbb{Q}$, also $f(a) = 0$, ferner sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Dann wähle man ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit

$n\varepsilon > 1$ (Archimedizität!) und bilde mit diesem die Zahl $m := [an!]$. Wegen $an! \notin \mathbb{Q}$ ist $m < an! < m+1$, also

$$\frac{m}{n!} < a < \frac{m+1}{n!}.$$

Wir setzen

$$\delta := \min\{\frac{m+1}{n!} - a; a - \frac{m}{n!}\}$$

und wählen ein beliebiges $x \in D_f \cap U_\delta(a)$. Es gilt dann

$$|f(x) - f(a)| = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{m}{n!} < x < \frac{m+1}{n!}.$$

Für $x \notin \mathbb{Q}$ ist $f(x) = 0$ und damit $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Für $x \in \mathbb{Q}$ ist

$$x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}^*,\ p < q \text{ und } \mathrm{ggT}(p,q) = 1, \text{ also } f(x) = \frac{1}{q}.$$

Wäre $q \leq n$, so wäre $q | n!$, also $n! = kq$ mit $k \in \mathbb{N}^*$. Dann wäre

$$\frac{m}{kq} < \frac{p}{q} < \frac{m+1}{kq}, \text{ also } m < kp < m+1,$$

was aber wegen $m, k, p \in \mathbb{N}^*$ nicht möglich ist. Daher gilt $q > n$. Daraus folgt

$$|f(x) - f(a)| = f(x) = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

3) Die Unstetigkeitsstellen von f sind alle von zweiter Art: Wir betrachten nochmals die Situation in 1) und bilden neben der dortigen Folge $\langle a_n \rangle$ eine Folge $\langle b_n \rangle$ mit

$$b_n := a - \frac{1}{q^{n+1}} = \frac{q^n p - 1}{q^{n+1}}.$$

Wegen

$$\lim\langle f(b_n)\rangle = 0 = \lim\langle f(a_n)\rangle \ (\neq f(a))$$

sind die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

gleich, falls sie existieren (was hier aber nicht interessiert). Es liegt damit keine Sprungstelle vor.

(10) Beispiel: Jedes Element aus $]0;1[$ sei eindeutig als Dualbruch geschrieben (ohne Einerperioden, also etwa $(0,0\overline{1})_2$ als $(0,1)_2$). Die Funktion f sei auf $]0;1[$ definiert durch

$$f((0,a_1a_2a_3\ldots)_2) := (0,a_1a_2a_3\ldots)_4,$$

der Dualbruch für $x \in]0;1[$ wird also als Bruch im Vierersystem gedeutet, z. B.:

$$f(\frac{9}{16}) = f((0,1001)_2) = (0,1001)_4 = \frac{129}{256},$$

$$f(\frac{2}{3}) = f((0,\overline{10})_2) = (0,\overline{10})_4 = \frac{4}{15}.$$

Unstetigkeitsstellen sind genau die Zahlen mit abbrechender Dualbruchentwicklung, also die Zahlen

$$\frac{m}{2^n} \text{ mit } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Die auf $]0;1[$ definierte Funktion in (10) ist monoton wachsend und besitzt abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, welche dicht in D_f liegen. Wir betrachten ein weiteres Beispiel einer Funktion mit diesen Eigenschaften.

(11) Beispiel: Es sei eine Abzählung (Numerierung) der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 gegeben, also

$$]0;1[\cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}.$$

Auf $]0;1[$ definieren wir f durch

$$f(x) := \sum_{r_i \leq x} \frac{1}{2^i},$$

die Summierung erstreckt sich also über alle $i \in \mathbb{N}^*$, für welche die rationale Zahl r_i nicht größer als x ist. Die Funktion f ist unstetig an jeder rationalen Stelle:

$$f(r_k) - f(x) \geq \frac{1}{2^k} \text{ für jedes } x \text{ mit } 0 < x < r_k$$

Die Funktion f ist stetig an jeder irrationalen Stelle: Es sei $a \in]0;1[\setminus \mathbb{Q}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$; dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$