

b

Bernhard Riemann

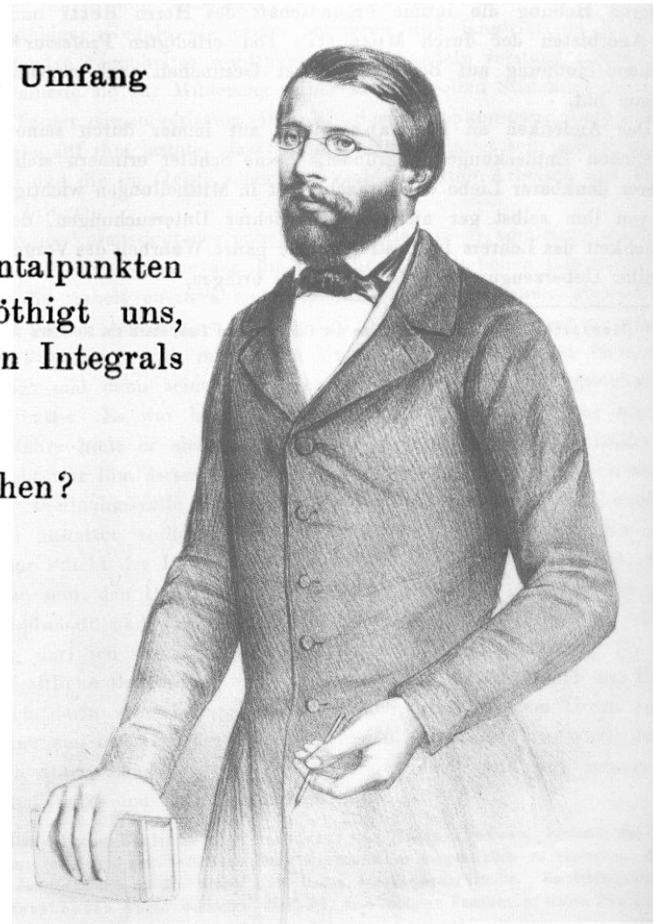
Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?

und sein Integral



a

b

Riemanns Integralbegriff

$\int_a^b f(x) dx$ Was war der Anlass für seine
Neudefinition des Integrals?

$\int_a^b f(x) dx$ Wie hat er das Integral definiert?

$\int_a^b f(x) dx$ Wie ist seine Definition in Schule
und in Software verwirklicht?

$\int_a^b f(x) dx$ Was kann mit seiner Definition nun
bewältigt werden?

$\int_a^b f(x) dx$ Fazit

a

b

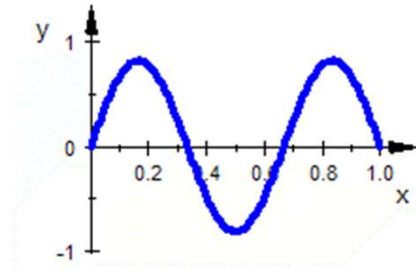
Über die Darstellbarkeit einer Function durch ein trigonometrische Reihe

Habilitationsschrift 1854

∫

Der erste Teil gibt einen Überblick über die Geschichte
der Wellen-Differentialgleichung,

$$\ddot{y} = \alpha^2 y''$$



mit der sich d'Alembert, Euler und D. Bernoulli
um die Mitte des 18. Jh. befassten.

a

$$f_k(x, t) = \sin(k\pi x) \cos(k\pi\alpha(t - \beta))$$

ist eine Lösung.

b

Über die Darstellbarkeit einer Function durch ein trigonometrische Reihe

Habilitationsschrift 1854

J

Damit sind aber auch Summen $\sum_k f_k(x, t)$

Lösung von $\ddot{y} = \alpha^2 y''$

So entsteht der Zusammenhang mit den
trigonometrischen Reihen:

a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \omega x) + b_k \sin(k \omega x))$$

b

Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe

Habilitationsschrift 1854

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \omega x) + b_k \sin(k \omega x))$$



Es geht also um Fourier-Reihen.

Fourier entwickelte die Theorie zur
Darstellung periodischer Funktionen 1807
im Zusammenhang mit einer
Untersuchung zur Wärmeleitung.

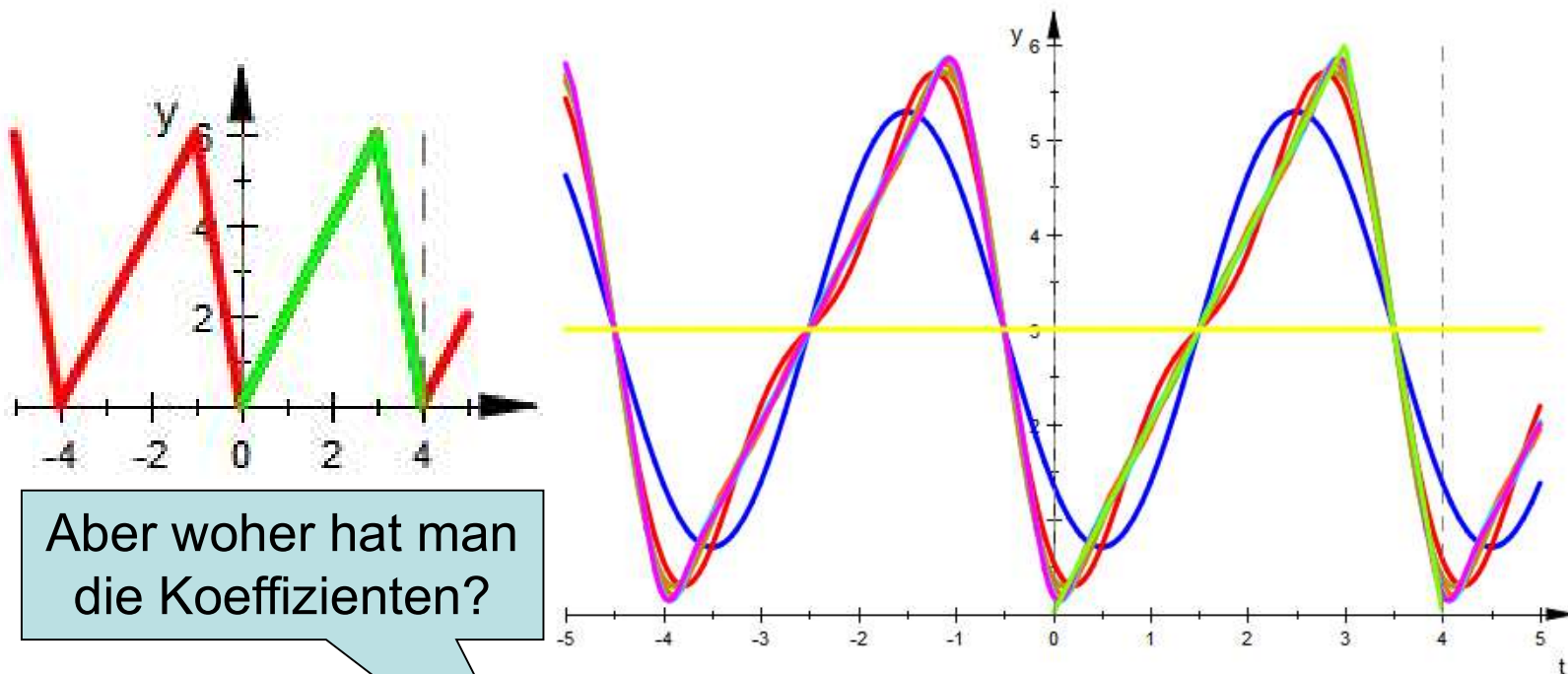
a

Fourier, Jean Baptist Joseph

1768-1830

Exkurs Fourier-Reihen

Mit ihnen können gewisse periodische Funktionen durch trigonometrische Reihen angenähert werden.



Aber woher hat man die Koeffizienten?

7 Näherungsfunktionen sind für diese Zackenfunktion gezeichnet.

$$\left[-\frac{16}{\pi^2}, -\frac{16}{\pi^2}\right], \left[-\frac{8}{\pi^2}, 0\right], \left[-\frac{16}{9 \cdot \pi^2}, \frac{16}{9 \cdot \pi^2}\right], [0, 0], \left[-\frac{16}{25 \cdot \pi^2}, -\frac{16}{25 \cdot \pi^2}\right], \left[-\frac{8}{9 \cdot \pi^2}, 0\right], \left[-\frac{16}{49 \cdot \pi^2}, \frac{16}{49 \cdot \pi^2}\right],$$

Exkurs Fourier-Reihen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x)$$

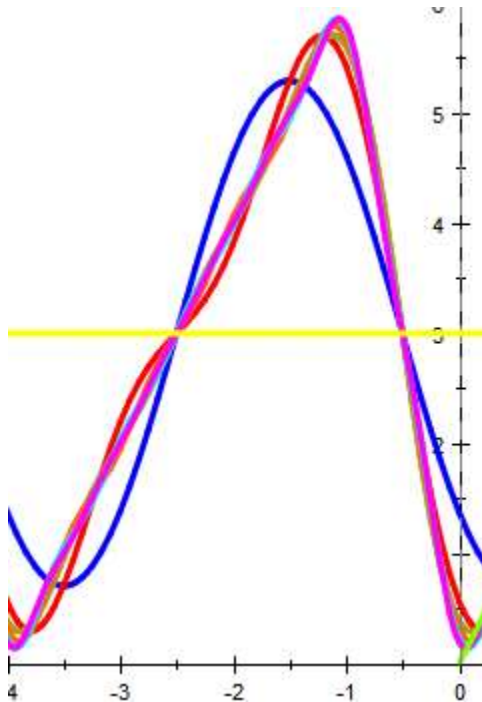
$$a_2 \cos(2\omega x) + b_2 \sin(2\omega x)$$

$$a_3 \cos(3\omega x) + b_3 \sin(3\omega x) + \dots$$

Also: woher hat man die Koeffizienten?

$$a_k := \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(k\omega x) dx$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin(k\omega x) dx$$



Also dazu!!!!!!!!!!!!!! braucht man die **Integrale**.

b

Über die Darstellbarkeit einer Function durch ein trigonometrische Reihe Habilitationsschrift 1854

Riemann zieht das Fazit:

Die Frage über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ist also bis jetzt nur unter den beiden Voraussetzungen entschieden, dass die Function durchgehends eine Integration zulässt und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat. Wenn die letztere Voraussetzung nicht gemacht wird, so sind die beiden Integraltheoreme Dirichlet's zur Entscheidung der Frage unzulänglich; wenn aber die erstere wegfällt, so ist schon die Fourier'sche Coefficienten-

Gegeben sei eine periodische Funktion f , Periode T . bestimmung nicht anwendbar.

Wenn • f durchgehend integrierbar ist (im Dirichletschen Sinne)

und

es gibt eine Stammfunktion

• f nicht unendlich viele Extrema im T -Intervall hat,

dann kann f in eine Fourierreihe entwickelt werden.

a

b

Riemann und sein Integral

Also schiebt Riemann ein
Kapitel in seine Arbeit ein:

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang
seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten
der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns,
Einiges voranzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals
und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?

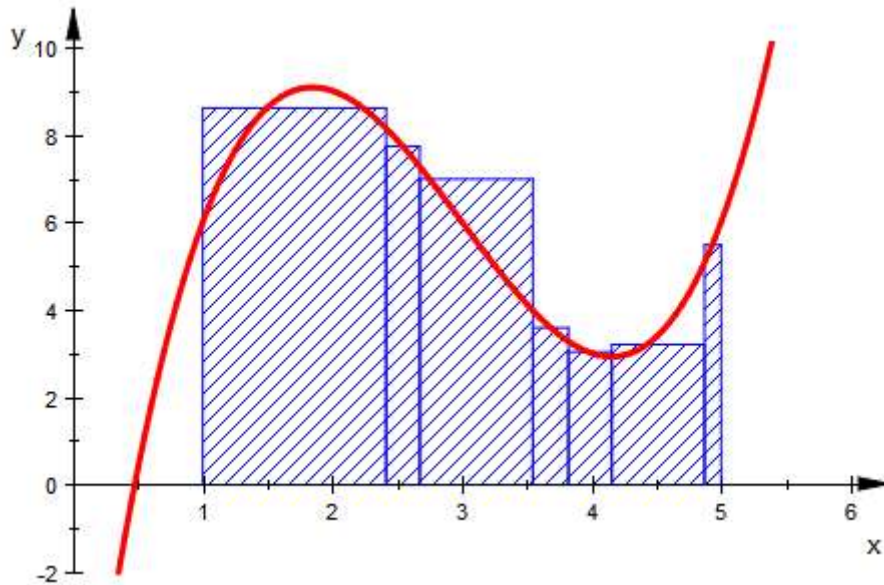


a

b

Über den Begriff des bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit Habilitationsschrift 1854

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?



Riemann wählt eine **beliebige Zerlegung** D des Intervalls $[a, b]$.

Dann bildet er mit der Ordinate je einer **beliebigen Zwischenstelle** jedes Teilintervalls ein Rechteck und summiert über alle diese Rechtecke.

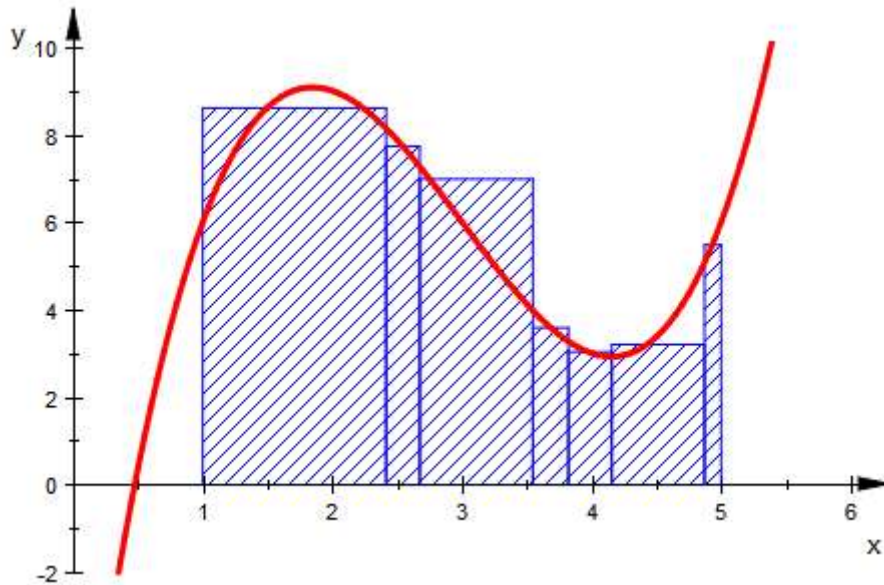
a

Diese Summe heißt **Riemann-Summe der Zerlegung D** und der Zwischenstellen.

b

Über den Begriff des bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit Habilitationsschrift 1854

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?



Dann wird die Zerlegung **verfeinert**, so dass die maximale Teilintervalllänge gegen 0 geht.

Wenn dann **unabhängig** von der Wahl der Zerlegung und der Zwischenstellen die **Riemann-Summe** einen **Grenzwert** hat, so heißt dieser

$$\int_a^b f(x) dx$$

a Anderenfalls hat das Symbol keine Bedeutung.

Originaler Riemann-Text: Habilitationsschrift 1854

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1 , $x_2 - x_1$ durch δ_2 , $\dots$, $b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

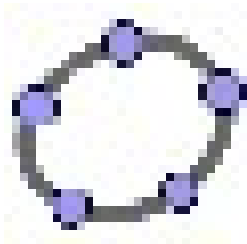
$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \dots \\ + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämtliche δ un-

endlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x) dx$.

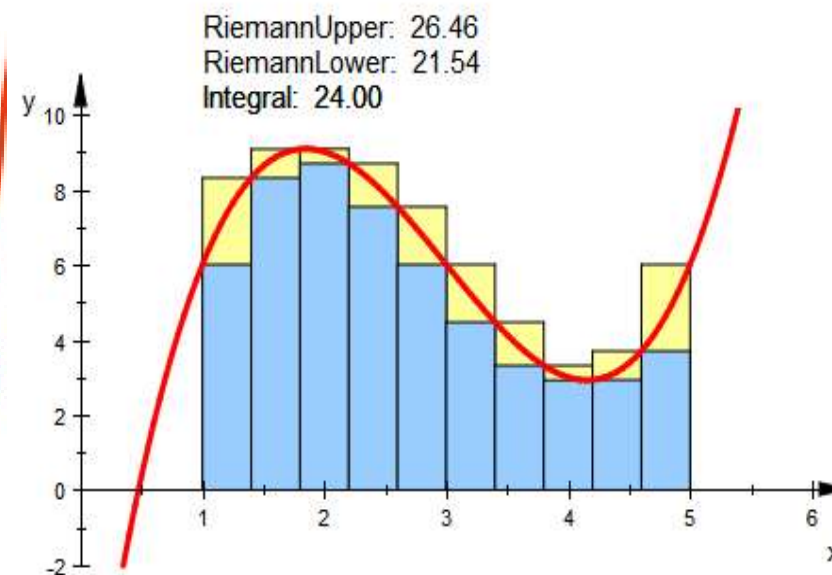
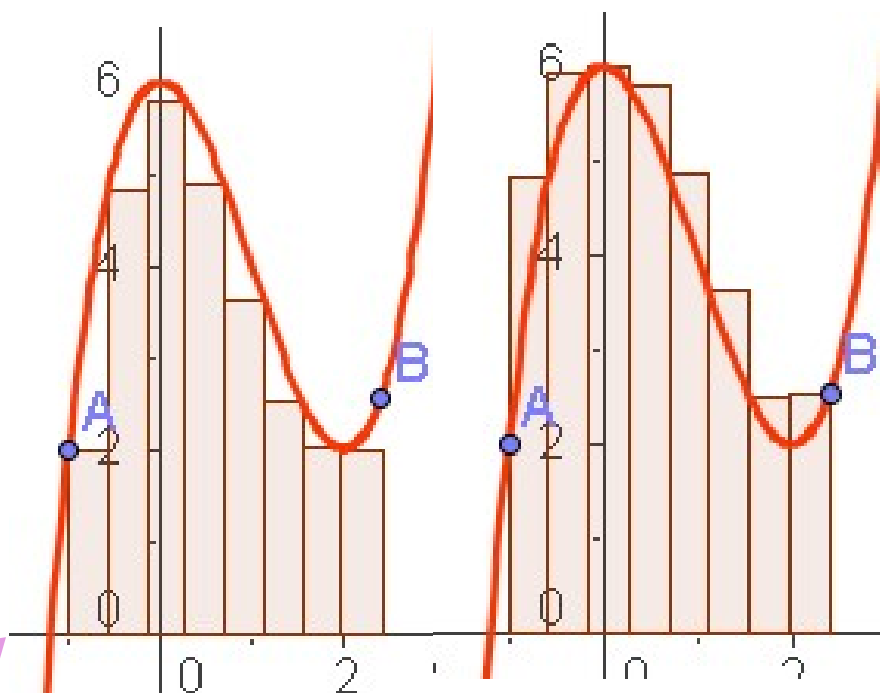
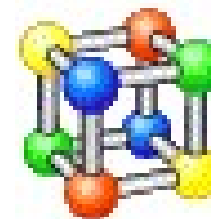
Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int_a^b f(x) dx$ keine Bedeutung.

Riemannsche Summen in der Lehre



GeoGebra

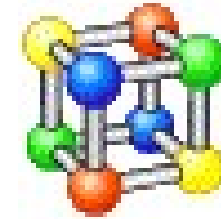
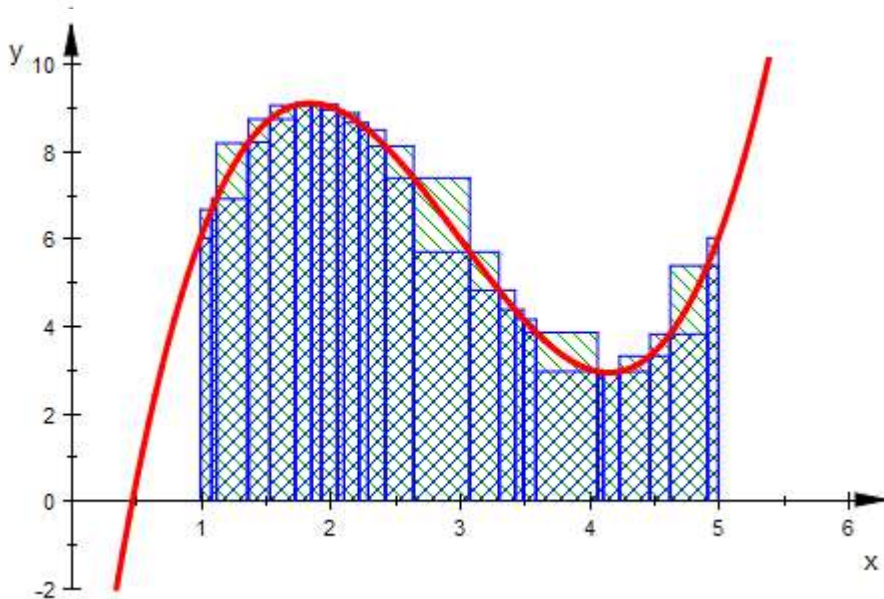
MuPAD



Die eben definierte
Riemann-Summe

liegt sicher zwischen der Untersumme und der Obersumme

Riemannsche Summen in der Lehre



MuPAD

Man bestimmt bei fortschreitender Verfeinerung die Riemann-Summe.

Strebt sie keinem Wert zu, ist die Funktion nicht Riemann-integrierbar.

Strebt sie aber einem Wert zu, muss man noch irgendwie absichern, dass derselbe Wert auch für alle anderen Zerlegungen und für alle Zwischenwert-Auswahlen Grenzwert der Riemann-Summe ist.

ein harter Anspruch!

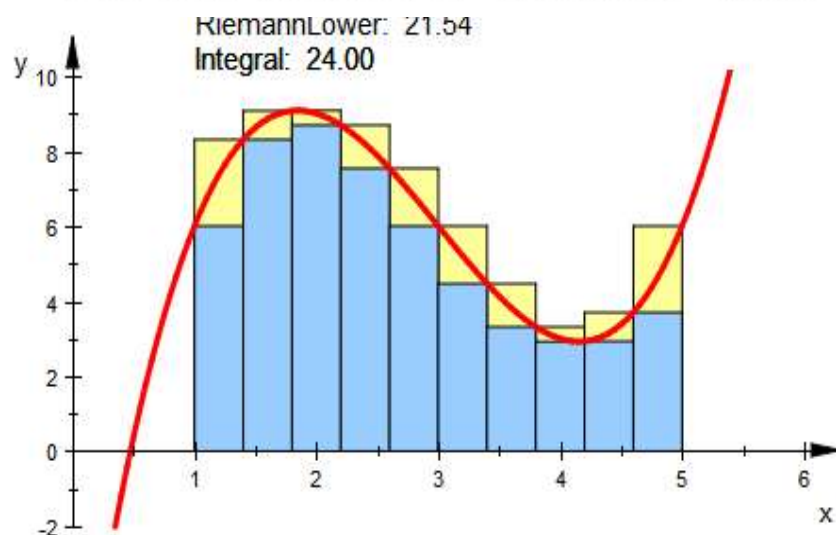
Notwendiges und hinreichendes Kriterium

Bei gegebener Zerlegung betrachtet Riemann:

endlich klein werden, convergirt. Bezeichnen wir also die grösste Schwankung der Function zwischen a und x_1 , d. h. den Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes in diesem Intervalle, durch D_1 , zwischen x_1 und x_2 durch $D_2 \dots$, zwischen x_{n-1} und b durch D_n , so muss

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n$$

mit den Grössen δ unendlich klein werden. Wir nehmen ferner an,



die größte Schwankung
jedem Streifen....

die hier gelb sichtbaren
Rechtecke sind zusammen
gerade der Unterschied
zwischen Obersumme und
Untersumme.

Notwendiges und hinreichendes Kriterium

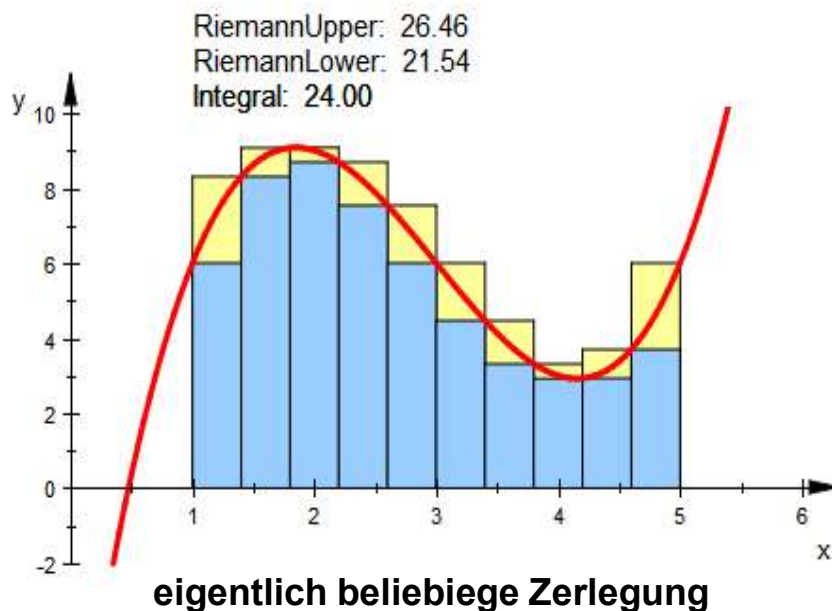
f sei beschränkt, dann gilt: Das Integral existiert genau dann, wenn sich der Unterschied der Ober und Untersummen durch Verfeinerung der Zerlegung unter jede Schranke drücken lässt.

Bei stetigen Funktionen werden auch die Höhen der gelben Rechtecke beliebig klein.

Liegen aber (endliche) Sprünge vor, wird die Flächengröße durch kleine Breite der Rechtecke unter jede Schranke gedrückt.

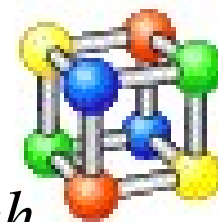
Also ist es nun doch gerechtfertigt zu sagen:

Riemannsche Ober- und Untersummen

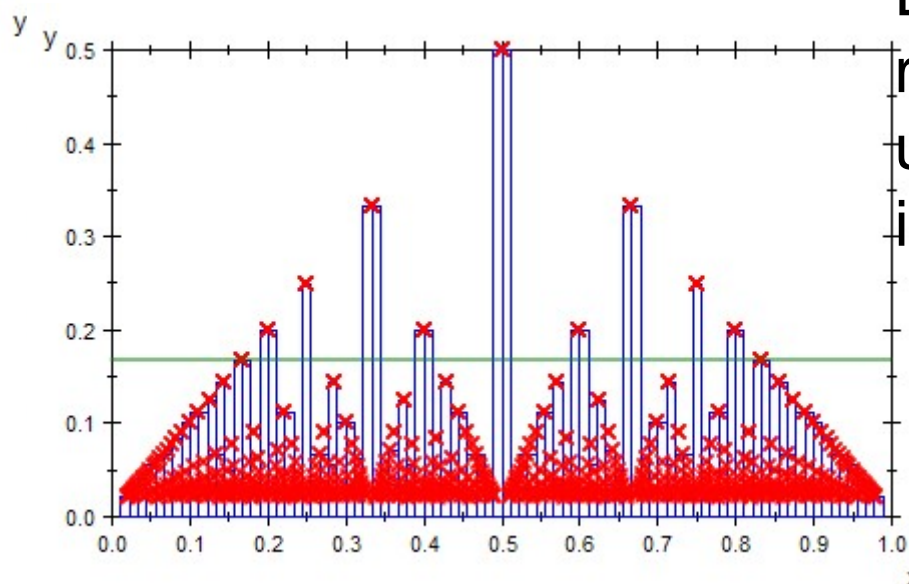


Besondere Funktionen vom Dirichlet-Typ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0,1\} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ als gekürzter Bruch} \end{cases}$$



MuPAD



Die Funktion ist an allen rationalen Stellen unstetig und an allen irrationalen Stellen stetig.

Für das letztere gibt Hischer (->Lit.) ein schlaues Beweis.

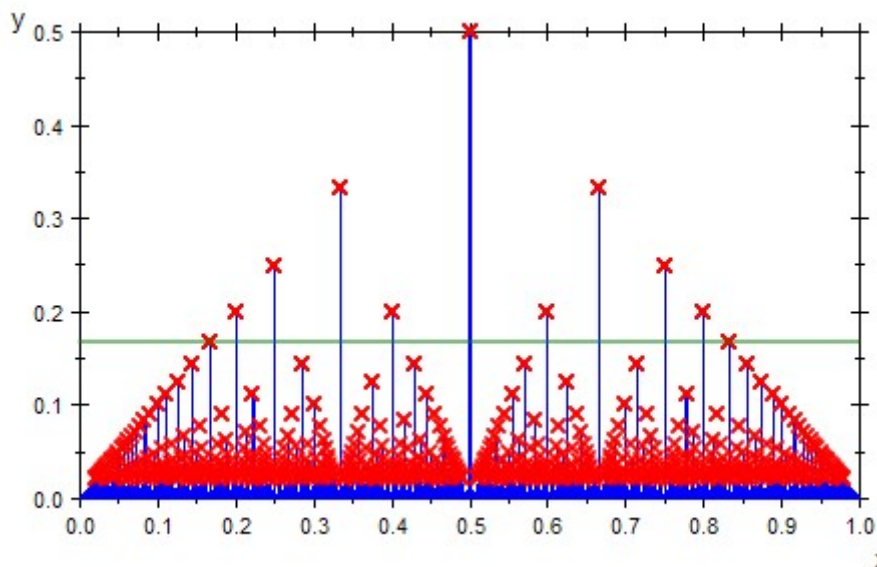
Riemann-integrierbar.

b

Satz, hinreichendes Kriterium

Das mündet in dem Satz:

Ist f beschränkt und die Menge der Unstetigkeitsstellen vom Maße 0, dann ist f Riemann-integrierbar



Riemann-integrierbar.

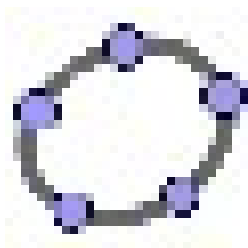
a

b

Was das Riemann-Integral leistet

Zitat: „...Da diese Funktionen noch nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem bestimmten Beispiele auszugehen.“

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - \text{round}(nx)}{n^2}$$

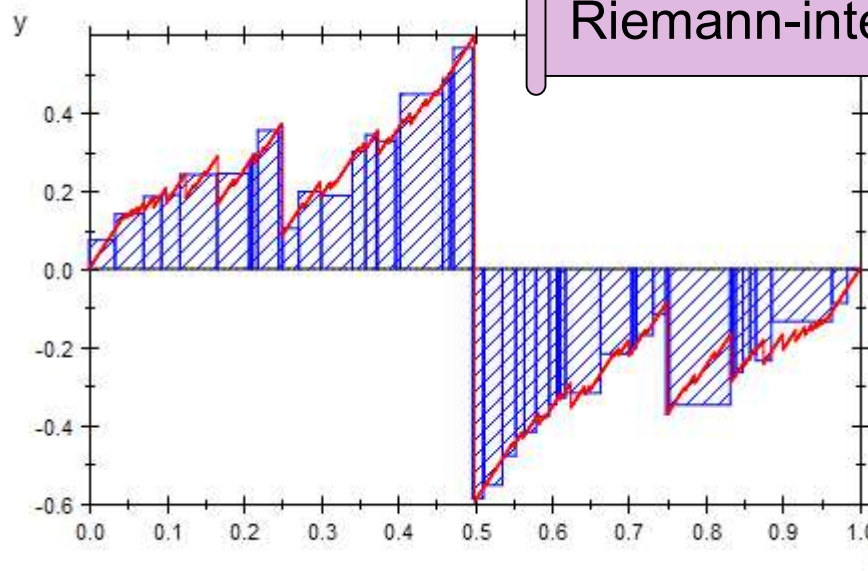


GeoGebra

MuPAD



a



Riemann-integrierbar.

Welche Funktionen werden durch trigonometrischen Reihen definiert?

zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden. Während also die bisherigen Arbeiten zeigten: wenn eine Function diese und jene Eigenschaften hat, so ist sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar; müssen wir von der umgekehrten Frage ausgehen: Wenn eine Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, was folgt daraus über ihren Gang, über die Aenderung ihres Werthes bei stetiger Aenderung des Arguments?

Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \left(F(t) - C't - A_0 \frac{tt}{2} \right) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{dt^2} \varphi(t) dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Man überzeugt sich aber leicht durch partielle Integration, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \left(C't + A_0 \frac{tt}{2} \right) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{dt^2} \varphi(t) dt,$$

wenn n unendlich gross wird, gegen A_0 convergirt, wodurch man obigen Satz erhält.

jetzt wird's wild!



b

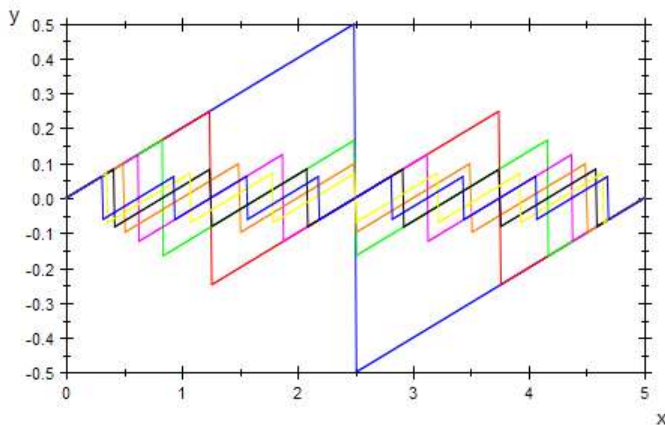
Was ist da für die Mathematik-Lehre sinnvoll?

Lohnend sind Beispiele, die ähnlich aussehen und dennoch ganz andere Resultate haben

a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - \text{round}(nx)}{n}$$

eben war im Nenner ein
Quadrat

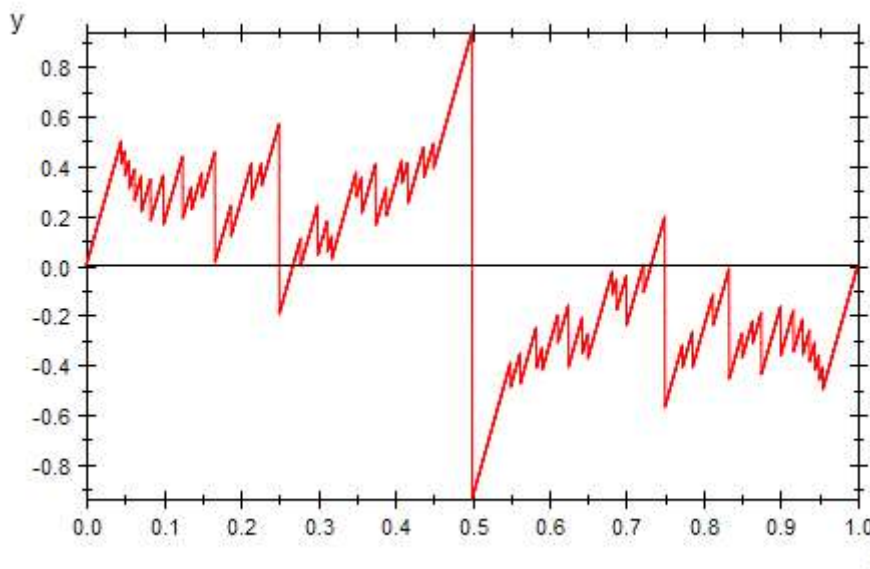


nun haben die
Reihenglieder alle die
Steigung 1

die Sprunghöhen
sind $1/n$



Die Unvollständigkeit des Computers erzwingt Theorie

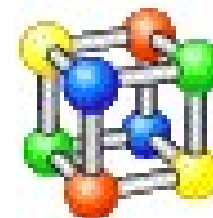


Die Summe der Sprunghöhen divergiert also mit der harmonische Reihe.

Die Sprungstellen liegen dicht.

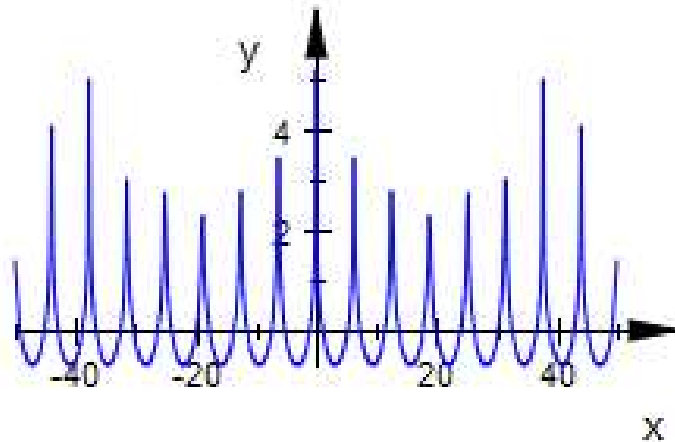
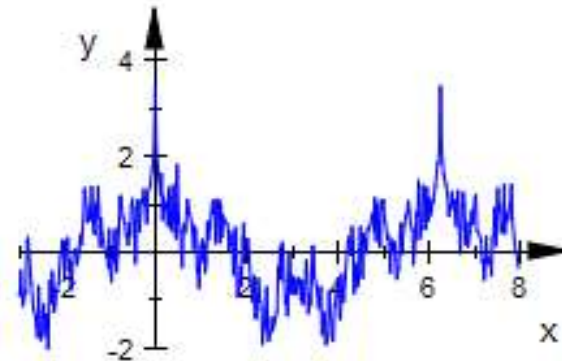
Nur weil diese so langsam divergiert, kann man hier überhaupt noch etwas sehen. (7000 Summanden)
Die Funktion ist in jedem noch so kleinen Intervall unbeschränkt und daher nicht integrierbar.

Bspl. von Riemann

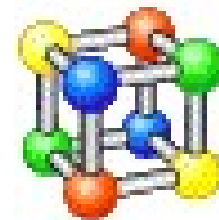


Wirklich frei gegebene trigonometrische Reihen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

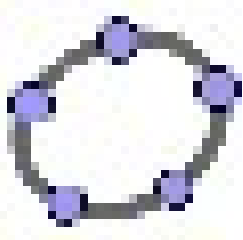


$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$



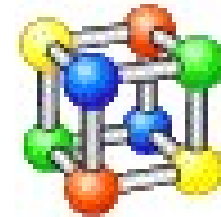
Who is Who?

Potential für das Lernen



GeoGebra

MuPAD



$\int_a^b f(x) dx$ Erfinden, Finden oder Variieren

$\int_a^b f(x) dx$ Erkunden mit Werkzeug

$\int_a^b f(x) dx$ Fragen stellen

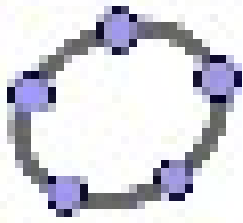
$\int_a^b f(x) dx$ Theoretische Überlegungen nach Kräften

$\int_a^b f(x) dx$ Dieses wieder mit Werkzeug prüfen

$\int_a^b f(x) dx$ Ergebnis und Weg dahin dokumentieren

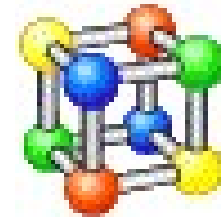
$\int_a^b f(x) dx$ Anschlussfragen stellen, weiter forschen

Lehren für Lehrer



GeoGebra

MuPAD



$\int_a^b f(x) dx$ Auch selber kreativ sein

$\int_a^b f(x) dx$ Visualisierungen mit Werkzeug herstellen

$\int_a^b f(x) dx$ Nicht Unproblematisches problematisieren

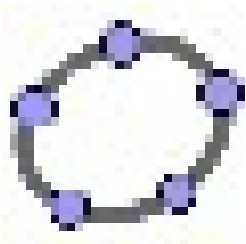
$\int_a^b f(x) dx$ Notwendigkeit von Argumenten aus der Sache erwachsen lassen

$\int_a^b f(x) dx$ Mathematik nicht als ehernes Gebäude darstellen sondern als Prozess erleben lassen

$\int_a^b f(x) dx$ Unvollkommenheiten bei sich und den Lernenden zulassen.

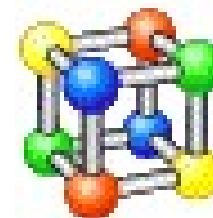
b

Hilfen für Lehrer



GeoGebra

MuPAD



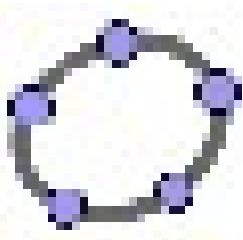
$$\int_a^b f(x) dx$$

Seite worüber man in Analysis reden kann

c. → nicht-differenzierbar... an abzählbar vielen Stellen
d. → nicht-differenzierbar... für eine dichte / nicht-dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$
e. → nirgends-differenzierbar... in $\mathbb{R}$
6. → integrierbar / nicht-integrierbar... in $\mathbb{R}$
a. → es existiert eine Stammfunktion F mit $F(x) = f'(x)$
i. → in geschlossener Form / nicht in geschlossener Form
b. → Riemann-integrierbar, aber es existiert keine Stammfunktion
c. → nicht-Riemann-integrierbar, aber mit weiterreichenden maßtheoretischen Konzepten (Lebesgue, Kurzweil) integrierbar

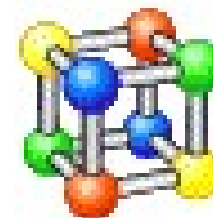
a

Hilfen für Lehrer



GeoGebra

MuPAD



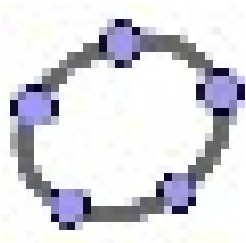
$\int_a^b f(x) dx$ Seite worüber man in Analysis reden kann

$\int_a^b f(x) dx$ Seite mit Sätzen zu diesem Thema i.w.S.

- III
- [8] → In $\mathfrak{I}$ stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar in $\mathfrak{I}$. ¶
 - [9] → Es gibt Riemann-integrierbare Funktionen, die nicht stetig sind. Fkt. (4), (7) ¶
 - [10] → f sei beschränkt in $\mathfrak{I}$. Dann gilt: f ist genau dann Riemann-integrierbar in $\mathfrak{I}$, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen vom Maße 0 ist. Fkt. (4), (7) ¶
 - [11] → f sei beschränkt und monoton in $\mathfrak{I}$. Dann ist f Riemann-integrierbar in $\mathfrak{I}$. ¶
 - [12] → f sei beschränkt und habe nicht unendlich viele Extrema in $\mathfrak{I}$. Dann ist f Riemann-integrierbar in $\mathfrak{I}$. ¶
 - [13] → Es gibt Funktionen, bei denen sowohl die Stetigkeitsstellen als auch die Unstetigkeitsstellen dicht liegen, die dennoch Riemann-integrierbar sind. Fkt. (4), (7) ¶
 - [14] → Es gibt Funktionen mit unendlich vielen Maxima und Minima in $\mathfrak{I}$, die dennoch Riemann-integrierbar sind. Fkt. (4), (7) ¶
 - [15] → Es gibt Funktionen mit in $\mathfrak{I}$ stetiger Stammfunktion, die dennoch nicht in $\mathfrak{I}$ integrierbar sind. Fkt. (12) ¶

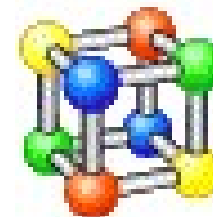
b

Hilfen für Lehrer



GeoGebra

MuPAD



$\int_a^b f(x) dx$ Seite worüber man in Analysis reden kann

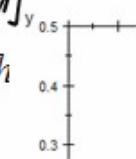
$\int_a^b f(x) dx$ Seite mit Sätzen zu diesem Thema i.w.S.

$\int_a^b f(x) dx$ Seite mit Beispielen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$, allgemein

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ h(x) & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}, \text{ mit } g \text{ und } h \text{ zwei Funktionen,}$$

haben g und h Berührstellen, dann ist f dort sogar diff

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0,1\} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ als gekürzter Bruch} \end{cases}$$

$\mathcal{J} = [0,1]$ 

$\mathcal{I} = [9],[10],[13],[14]$ Bild

a

b

∫

a

Hilfen für Lehrer

www.mathematik-verstehen.de

The screenshot displays the website's interface. On the left is a navigation menu with expandable folders: 'Fraktale Geometrie', 'Geometrie', 'Geschichte' (expanded), 'Graphentheorie', 'Ingenieurmathematik', 'Knotentheorie', 'Kryptographie', and 'Kurven, Analytische Geometrie'. Under 'Geschichte', there are links to 'Leitseite', 'Alte Völker', 'Griechen', 'Mittelalter-Präsentation', 'Mittelalter, mehr....', 'Abakus', 'Wurzel schriftlich', 'Pi, Überblick', 'Pi, mehr dazu', 'Goldenener Schnitt', 'Cardano, Gleichungen 3', and 'Riemann'. The main content area is divided into two sections. The top section, 'Biografisches', lists links for 'Kindheit und Schulzeit am Johanneum', 'Abitur am Johanneum', 'Wissenschaftliche Entwicklung', 'Privates Leben und früher Tod', and a PDF document 'Das hier Folgende ist als Aufsatz'. The bottom section, 'Das Riemannsche Integral', includes links for 'Erste Hinführung', 'Zweiter Schritt der Hinführung', 'Dritter Schritt der Hinführung (evt. weglassen)', 'Vollständige Funktion (mit Rechteck)', and 'Riemannsche Funktion Typ 1'. Each link in the bottom section is accompanied by icons for HTML, PDF, and Mnemonic formats.

Biografisches

- [Kindheit und Schulzeit am Johanneum](#)
- [Abitur am Johanneum](#)
- [Wissenschaftliche Entwicklung](#)
- [Privates Leben und früher Tod](#)
- [Das hier Folgende ist als Aufsatz pdf](#)

♦ [Das Riemannsche Integral](#) [html](#) [pdf](#) [mn](#) Einfü

♦ Weiteres zur [Integralrechnung](#)

♦ [Erste Hinführung](#) [A](#) [*ggü](#)

♦ [Zweiter Schritt der Hinführung](#) [A](#) [*ggü](#)

♦ [Dritter Schritt der Hinführung \(evt. weglassen\)](#) [A](#) [*ggü](#)

♦ [Vollständige Funktion \(mit Rechteck\)](#) [A](#) [*ggü](#)

♦ [Riemannsche Funktion Typ 1](#) [html](#) [pdf](#) [mn](#)

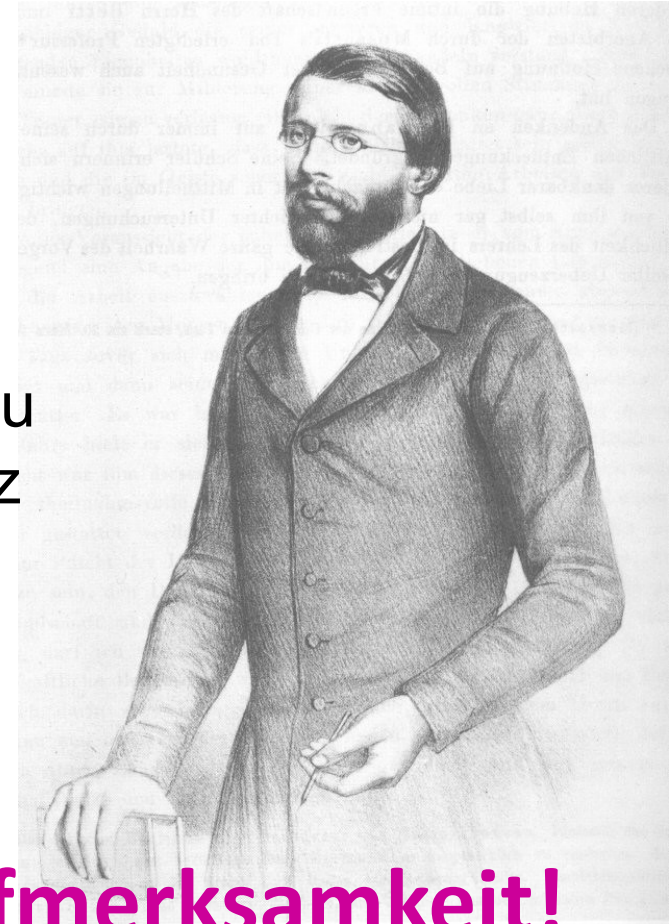
b

Bernhard Riemann

∫



hatte den
Mut, die
Kraft und
die
Fähigkeit zu
einem ganz
eigenen
kreativen
Weg.



a

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!