

Bernhard Riemann

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voranzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?

und sein Integral



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 1

Riemanns Integralbegriff

$\int_a^b f(x) dx$ Was war der Anlass für seine Neudefinition des Integrals?

$\int_a^b f(x) dx$ Wie hat er das Integral definiert?

$\int_a^b f(x) dx$ Wie ist seine Definition in Schule und in Software verwirklicht?

$\int_a^b f(x) dx$ Was kann mit seiner Definition nun bewältigt werden?

$\int_a^b f(x) dx$ Fazit

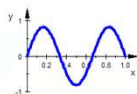
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 2

Über die Darstellbarkeit einer Function durch ein trigonometrische Reihe

Habilitationsschrift 1854

Der erste Teil gibt einen Überblick über die Geschichte der Wellen-Differentialgleichung,

$$\ddot{y} = \alpha^2 y''$$



mit der sich d'Alembert, Euler und D. Bernoulli um die Mitte des 18. Jh. befassten.

$$f_k(x, t) = \sin(k\pi x) \cos(k\pi\alpha(t - \beta))$$

ist eine Lösung.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 3

Über die Darstellbarkeit einer Function durch ein trigonometrische Reihe

Habilitationsschrift 1854

Damit sind aber auch Summen $\sum_k f_k(x, t)$

Lösung von $\ddot{y} = \alpha^2 y''$

So entsteht der Zusammenhang mit den trigonometrischen Reihen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 4

Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe

Habilitationsschrift 1854

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$



Fourier, Jean Baptiste Joseph

1768-1830

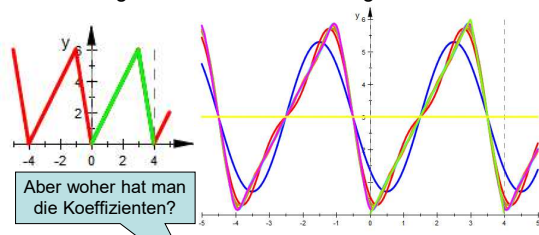
Es geht also um Fourier-Reihen.

Fourier entwickelte die Theorie zur Darstellung periodischer Funktionen 1807 im Zusammenhang mit einer Untersuchung zur Wärmeleitung.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 5

Exkurs Fourier-Reihen

Mit ihnen können gewisse periodische Funktionen durch trigonometrische Reihen angenähert werden.



Aber woher hat man die Koeffizienten?

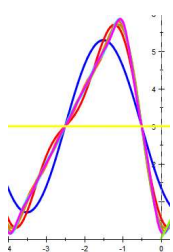
7 Näherungsfunktionen sind für diese Zackenfunktion gezeichnet.

$$\left[-\frac{16}{\pi^2}, \frac{16}{\pi^2}\right], \left[-\frac{8}{\pi^2}, 0\right], \left[-\frac{16}{9\pi^2}, \frac{16}{9\pi^2}\right], [0, 0], \left[-\frac{16}{25\pi^2}, -\frac{16}{25\pi^2}\right], \left[-\frac{8}{9\pi^2}, 0\right], \left[-\frac{16}{49\pi^2}, \frac{16}{49\pi^2}\right]$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 6

Exkurs Fourier-Reihen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x)$$



$$a_2 \cos(2\omega x) + b_2 \sin(2\omega x) \\ a_3 \cos(3\omega x) + b_3 \sin(3\omega x) + \dots$$

Also: woher hat man die Koeffizienten?

$$a_k := \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(k\omega x) dx$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin(k\omega x) dx$$

Also dazu!!!!!!!!!!!! braucht man die **Integrale**.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 7

Über die Darstellbarkeit einer Function durch ein trigonometrische Reihe Habilitationsschrift 1854

Riemann zieht das Fazit:

Die Frage über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ist also bis jetzt nur unter den beiden Voraussetzungen entschieden, dass die Function durchgehends eine Integration zulässt und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat. Wenn die letztere Voraussetzung nicht gemacht wird, so sind die beiden Integraltheorie Dirichlet's zur Entscheidung der Frage unzulänglich; wenn aber die erstere wegfällt, so ist schon die Fourier'sche Coefficientenbestimmung nicht anwendbar.

Gegeben sei eine periodische Function f , Periode T .

Wenn f durchgehend integrierbar ist (im Dirichlet'schen Sinne) und

es gibt eine Stammfunktion

f nicht unendlich viele Extrema im T -Intervall hat,

dann kann f in eine Fourierreihe entwickelt werden.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 8

Riemann und sein Integral

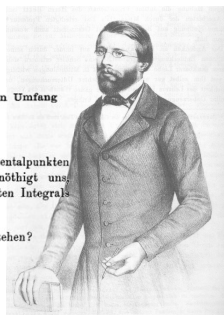
Also schiebt Riemann ein Kapitel in seine Arbeit ein:

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voranzuschieken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

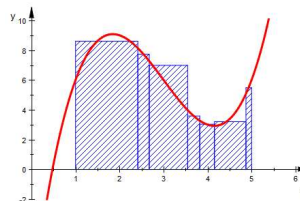
Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 9

Über den Begriff des bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit Habilitationsschrift 1854

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?



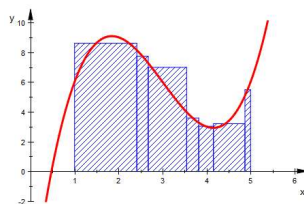
Riemann wählt eine beliebige Zerlegung D des Intervalls $[a, b]$. Dann bildet er mit der Ordinate je einer beliebigen Zwischenstelle jedes Teilintervalls ein Rechteck und summiert über alle diese Rechtecke.

Diese Summe heißt **Riemann-Summe der Zerlegung D** und der Zwischenstellen.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 10

Über den Begriff des bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit Habilitationsschrift 1854

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?



Dann wird die Zerlegung **verfeinert**, so dass die maximale Teilintervalllänge gegen 0 geht. Wenn dann **unabhängig** von der Wahl der Zerlegung und der Zwischenstellen die **Riemann-Summe** einen Grenzwert hat, so heißt dieser

$$\int_a^b f(x) dx$$

Anderenfalls hat das Symbol keine Bedeutung.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 11

Originaler Riemann-Text: Habilitationsschrift 1854

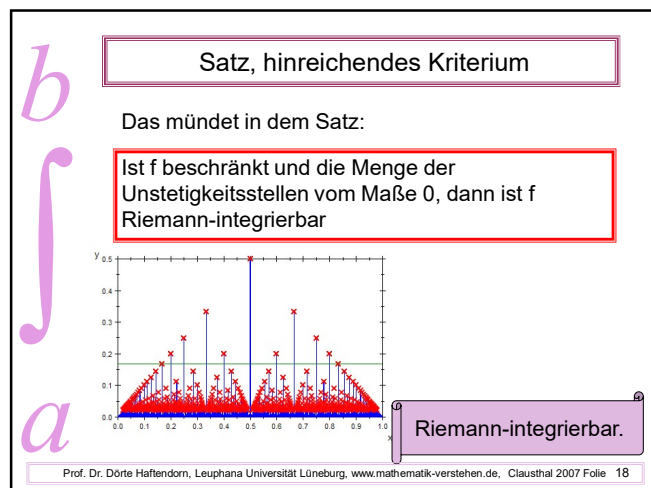
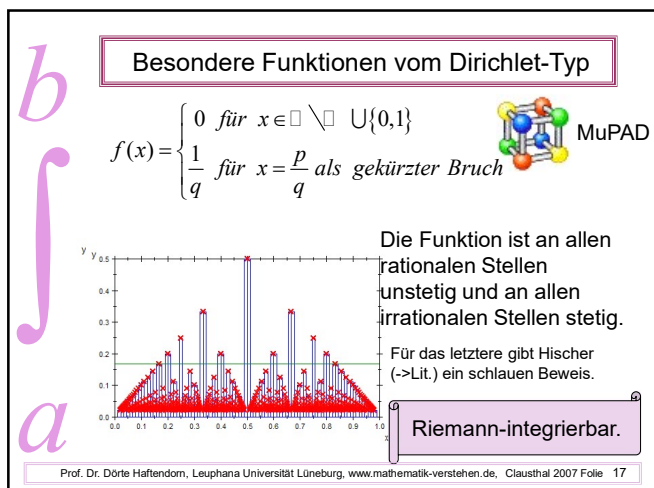
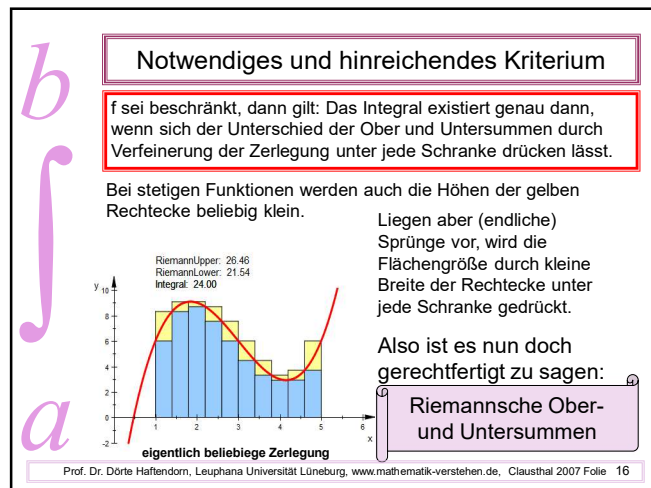
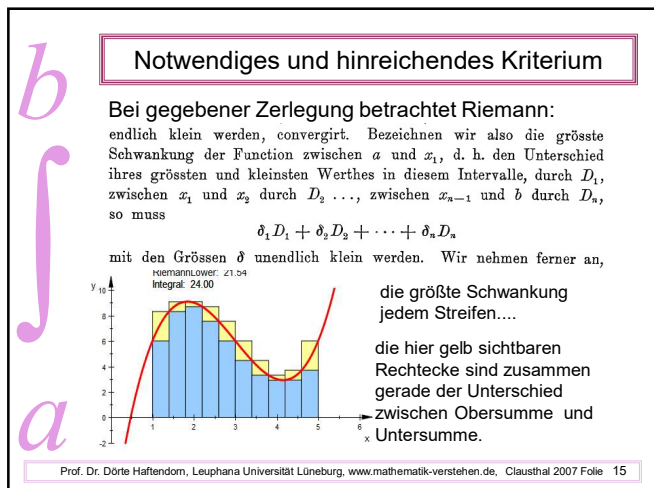
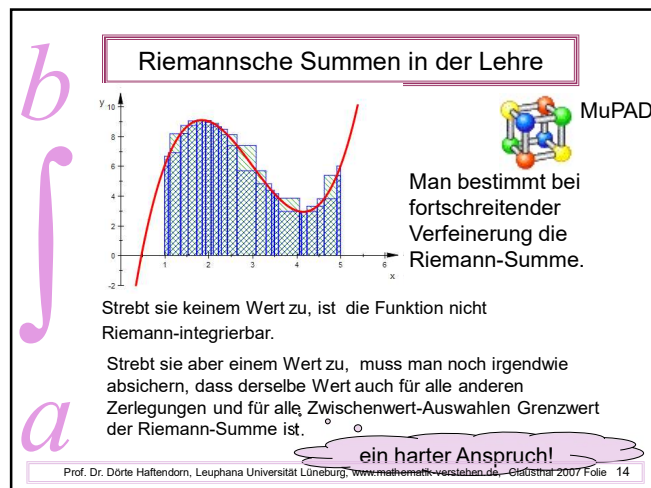
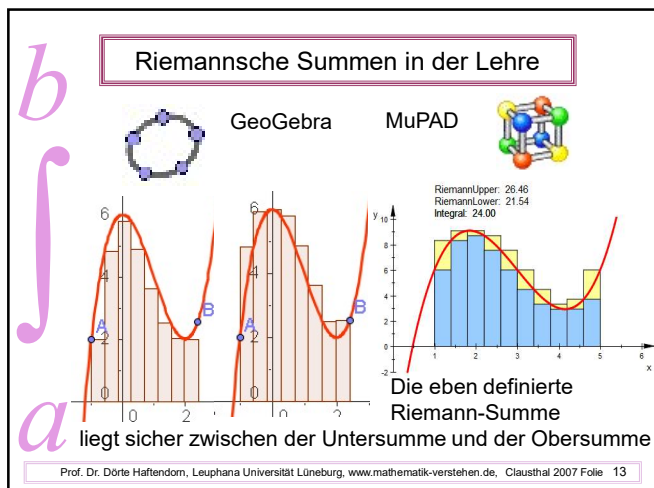
Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch $\delta_1, x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \dots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven achten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x) dx$.

Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int_a^b f(x) dx$ keine Bedeutung.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 12

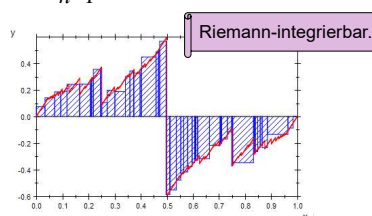


Was das Riemann-Integral leistet

Zitat: „...Da diese Funktionen noch nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem bestimmten Beispiele auszugehen.“

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - \text{round}(nx)}{n^2}$$

GeoGebra
MuPAD



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 19

Welche Funktionen werden durch trigonometrischen Reihen definiert?

zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden. Während also die bisherigen Arbeiten zeigten: wenn eine Funktion diese und jene Eigenschaften hat, so ist sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar; müssen wir von der umgekehrten Frage ausgehen: Wenn eine Funktion durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, was folgt daraus über ihren Gang, über die Änderung ihres Werthes bei stetiger Änderung des Arguments?

Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F(t) - G(t) - A_n \frac{t}{2}) \frac{\sin \frac{n}{2}(x-t)}{d} dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Man überzeugt sich aber leicht durch partielle Integration, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(t) + A_n \frac{t}{2}) \frac{\sin \frac{n}{2}(x-t)}{d} dt = \phi(x) dt,$$

wenn n unendlich gross wird, gegen A_n convergirt, wodurch man obigen Satz erhält.

jetzt wird's wild!



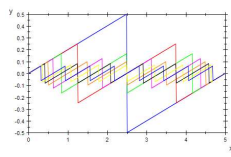
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 20

Was ist da für die Mathematik-Lehre sinnvoll?

Lohnend sind Beispiele, die ähnlich aussehen und dennoch ganz andere Resultate haben

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - \text{round}(nx)}{n}$$

eben war im Nenner ein Quadrat



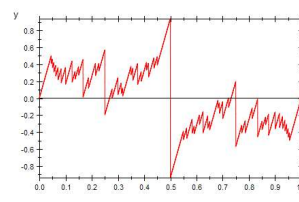
nun haben die Reihenglieder alle die Steigung 1

die Sprunghöhen sind 1/n



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 21

Die Unvollständigkeit des Computers erzwingt Theorie



Die Summe der Sprunghöhen divergiert also mit der harmonische Reihe.

Die Sprunghöhen liegen dicht.

Nur weil diese so langsam divergiert, kann man hier überhaupt noch etwas sehen. (7000 Summanden)
Die Funktion ist in jedem noch so kleinen Intervall unbeschränkt und daher nicht integrierbar.

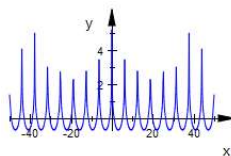
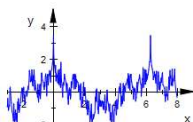
Bspl. von Riemann



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 22

Wirklich frei gegebene trigonometrische Reihen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$

Who is Who?



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 23

Potential für das Lernen



GeoGebra

MuPAD



- $\int_{a,b} f(x) dx$ Erfinden, Finden oder Variieren
- $\int_{a,b} f(x) dx$ Erkunden mit Werkzeug
- $\int_{a,b} f(x) dx$ Fragen stellen
- $\int_{a,b} f(x) dx$ Theoretische Überlegungen nach Kräften
- $\int_{a,b} f(x) dx$ Dieses wieder mit Werkzeug prüfen
- $\int_{a,b} f(x) dx$ Ergebnis und Weg dahin dokumentieren
- $\int_{a,b} f(x) dx$ Anschlussfragen stellen, weiter forschen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Clausthal 2007 Folie 24

