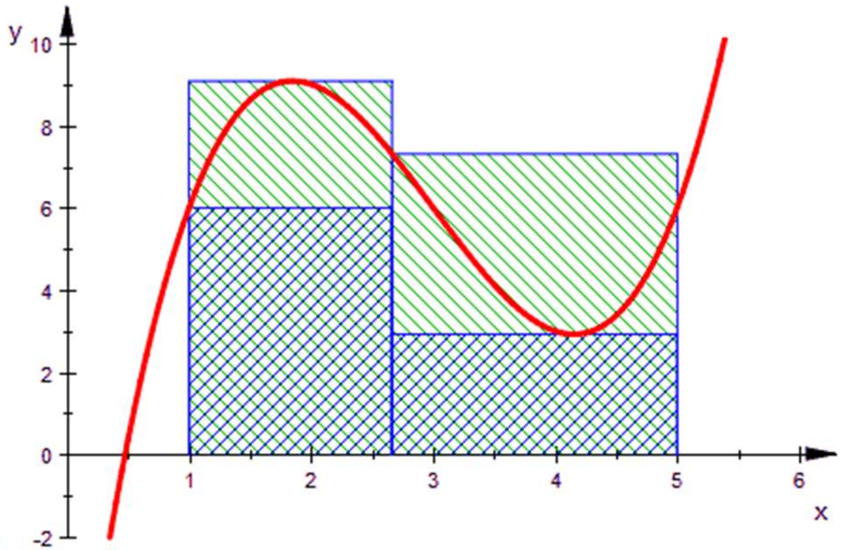
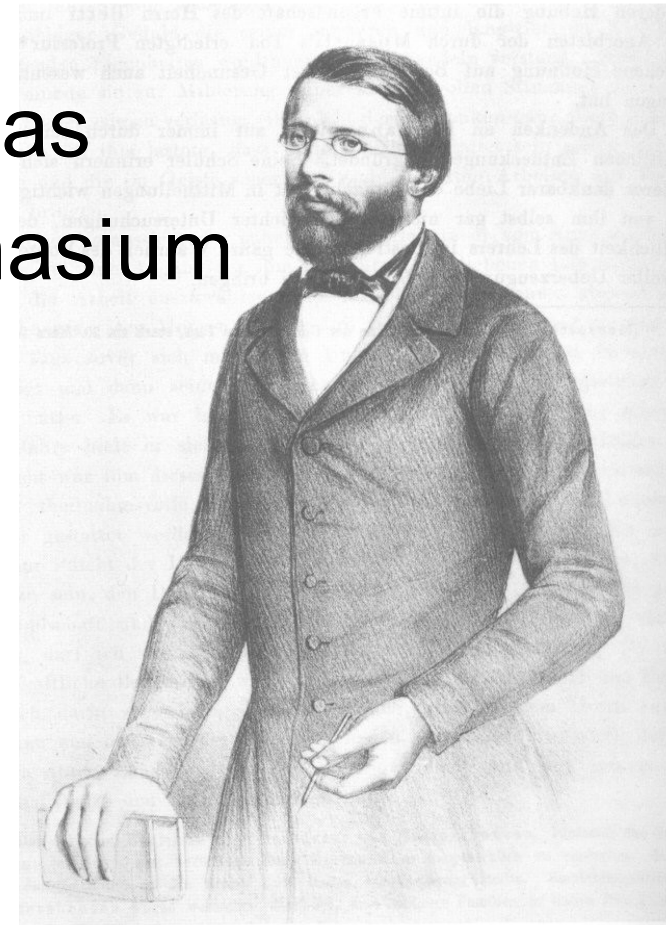
Bernhard Riemann

Seinen Namen trägt das
Bernhard-Riemann-Gymnasium
Scharnebeck

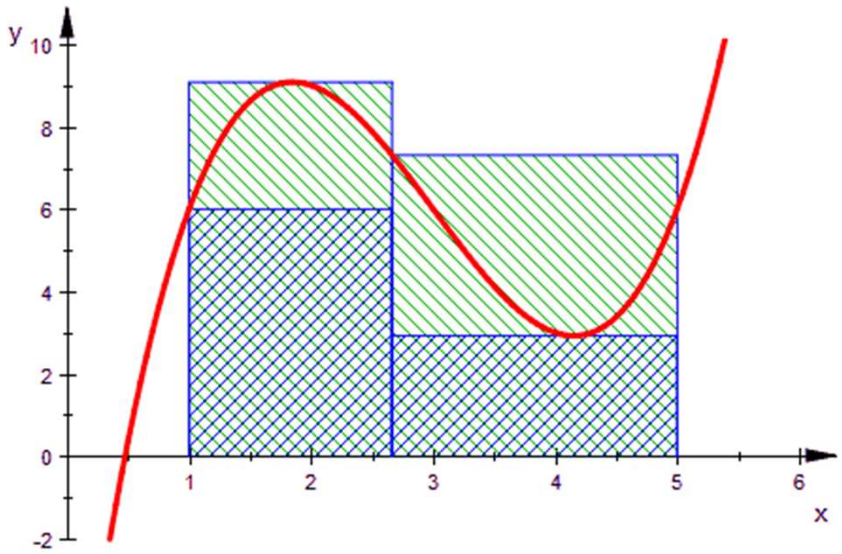




Bernhard Riemann

schon 1846 als
Abiturient am
Johanneum ein
Mathematik-Genie

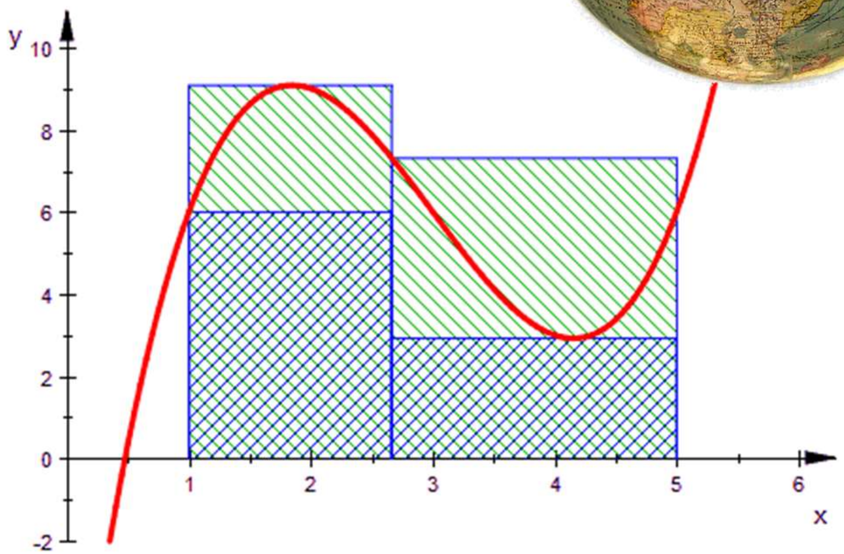
2006 DOCTRINAE VIRTUTI HUMANITATI
JOHANNEUM LÜNEBURG
600 Jahre!



Bernhard Riemann

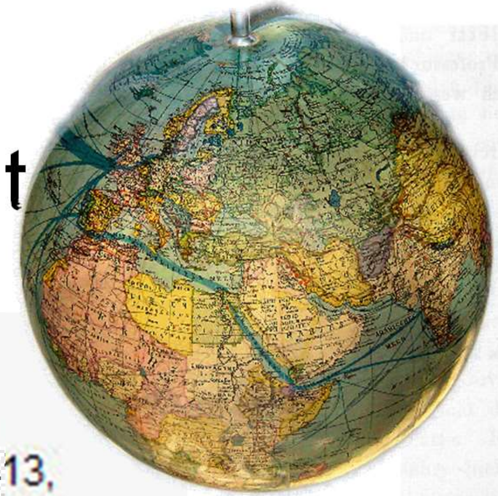
Weltweite
Berühmtheit

Genie



Bernhard Riemann Genie

Weltweite Berühmtheit



Georg Friedrich

Bernhard Riemann

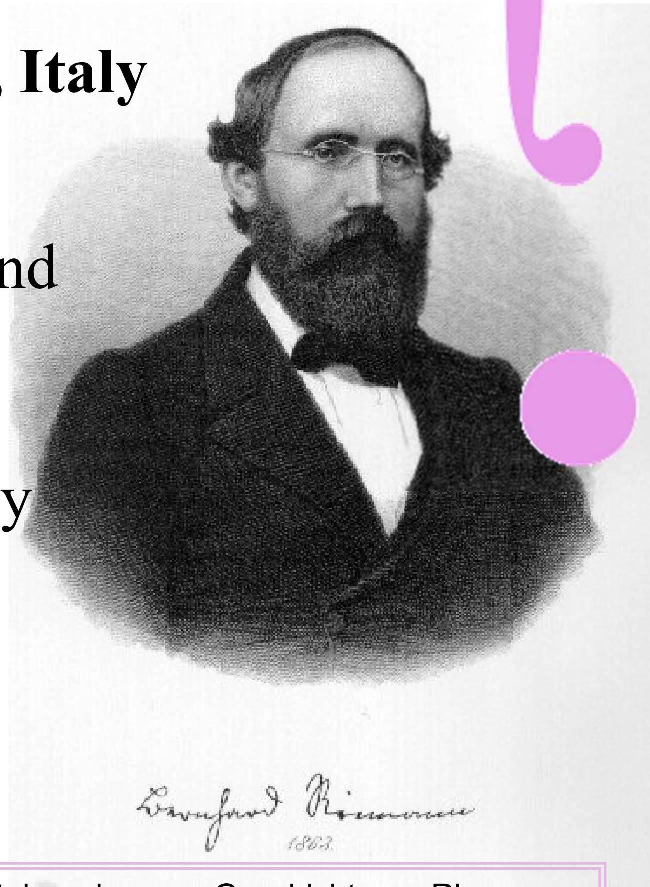
Genie

Born: 17 sept 1826 in Breselenz, Hannover (now Germany)

Died: 20 July 1866 in Selasca, Italy

University of St Andrews
St Andrews, Fife, KY16 9AJ, Scotland

Riemann's ideas concerning geometry of space had a profound effect on the development of modern theoretical physics. He clarified the notion of integral by defining what we now call the Riemann integral.



Georg Friedrich

Bernhard Riemann

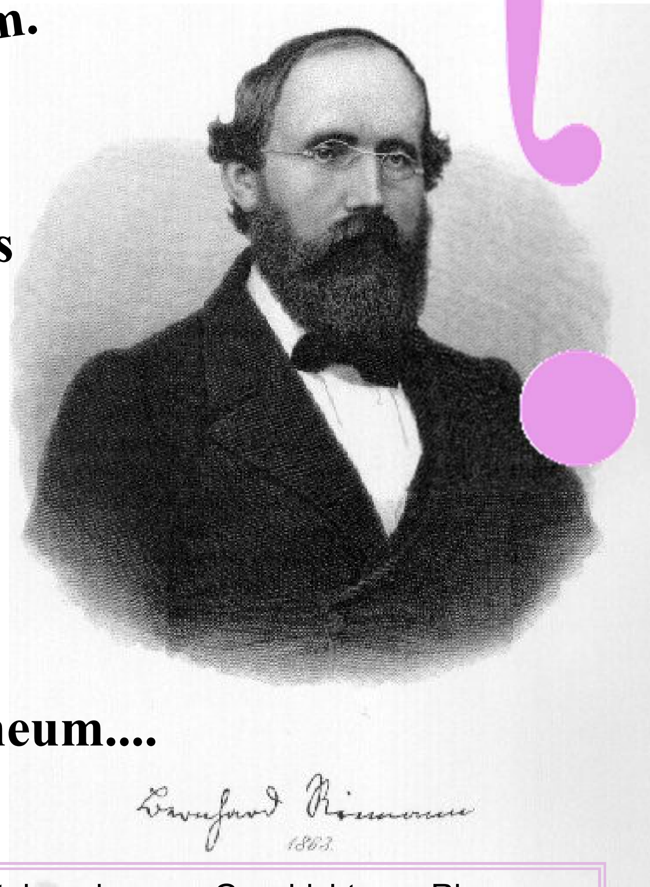
Genie

University of St Andrews
St Andrews, Fife, KY16 9AJ, Scotland

... He was an original thinker... and a host of methods, theorems and concepts are named after him.

...provided the concepts an methods used later in relativity Theory

5 Seiten Biografie
und Würdigung



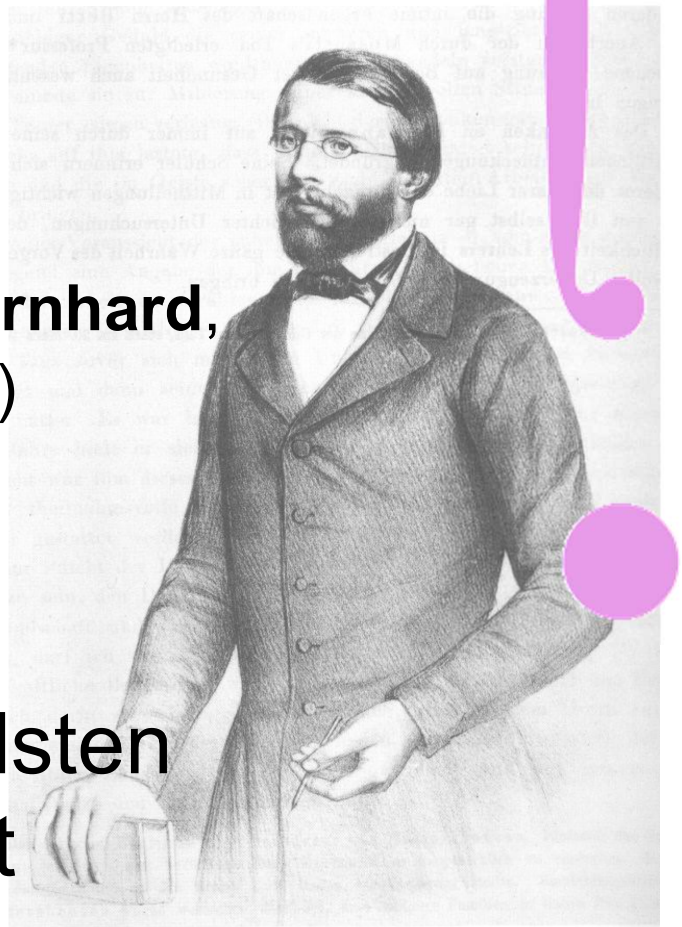
....moved to the Gymnasium Johanneum....

Bernhard Riemann Genie

Weltweite Berühmtheit

Brockhaus Band 18 (1992)

Riemann, 1) Georg Friedrich **Bernhard**,
Mathematiker, *Dannenberg (Elbe)
......
ab 1859 Prof. in Göttingen;



... zählt zu den bedeutendsten
Mathematikern seiner Zeit

Bernhard Riemann Genie

Weltweite Berühmtheit

Brockhaus Band 18 (1992)

... Definition des **Riemann-Integrals** und die Behandlung >pathologischer< Funktionen, die

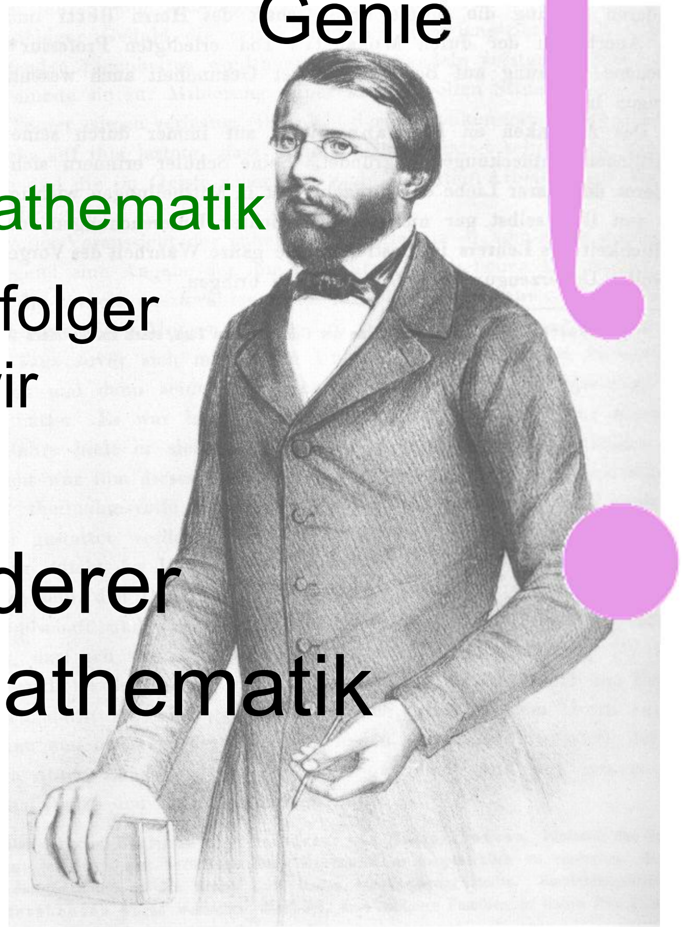
Riemann zu einem Wegbereiter des modernen mathematischen Denkens machten...

Bernhard Riemann

Genie

Weltweite Berühmtheit

Struik: Abriss der Geschichte der Mathematik

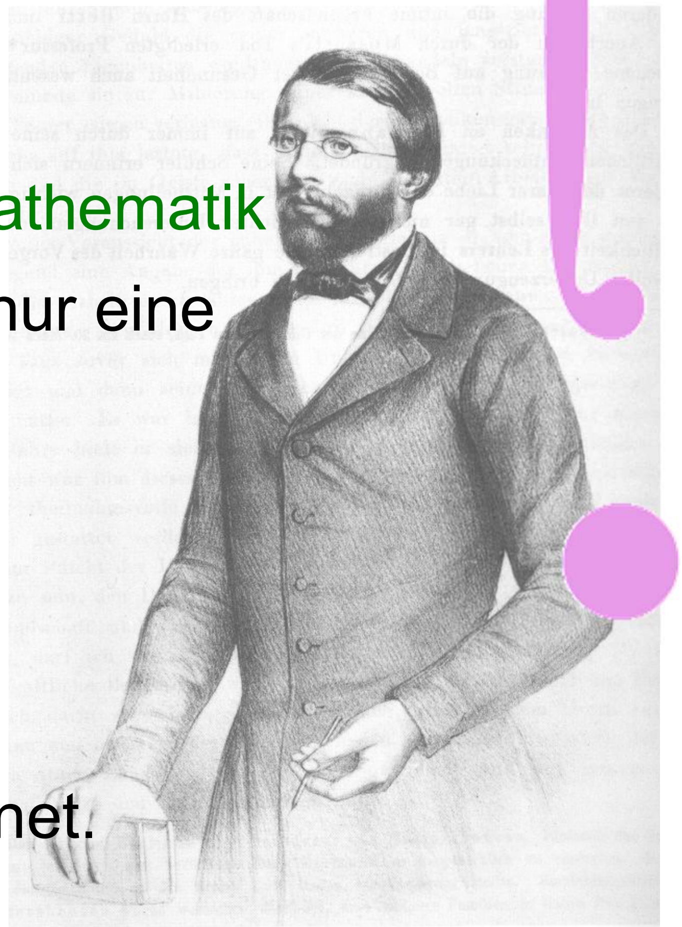


Mit Bernhard Riemann ,dem Nachfolger Dirichlets in Göttingen, kommen wir zu dem Mann,

der mehr als irgendein anderer den Weg der modernen Mathematik beeinflusst hat.

Bernhard Riemann Genie

Weltweite Berühmtheit



Struik: Abriss der Geschichte der Mathematik

... In seinem kurzen Leben hat er nur eine verhältnismäßig kleine Anzahl von Arbeiten veröffentlicht, aber

jede von ihnen war
-und ist es noch- bedeutend
und einige von ihnen haben ganz neue und fruchtbare Gebiete eröffnet.

Bernhard Riemann Genie

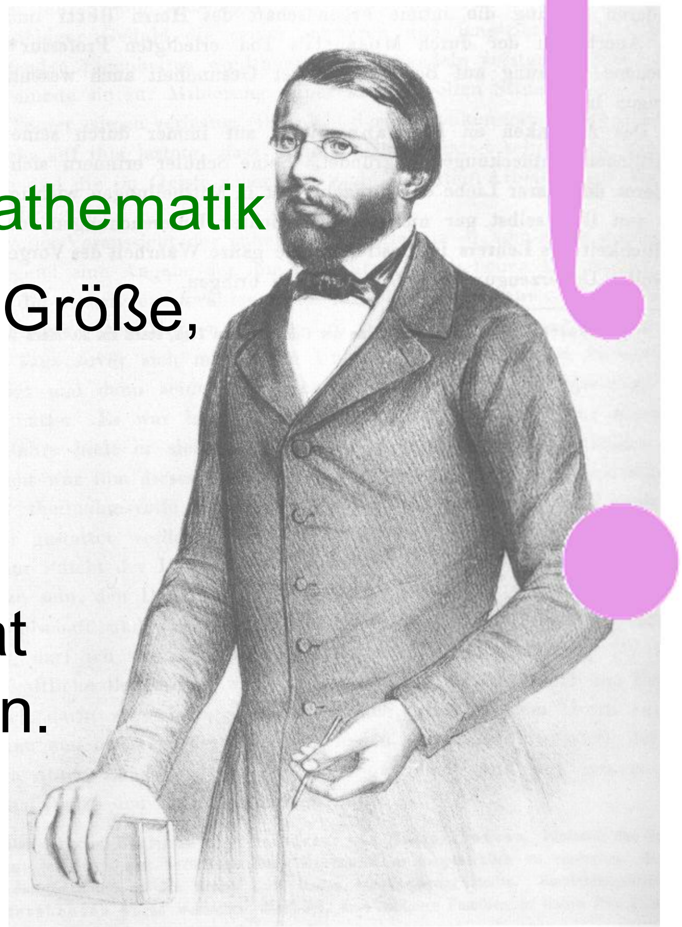
Weltweite Berühmtheit

Struik: Abriss der Geschichte der Mathematik

Felix Klein, selbst ein Stern erster Größe, charakterisiert:

Riemann ist der Mann der glänzenden Intuition.
Durch seine umfassende Genialität überragt er alle seine Zeitgenossen.

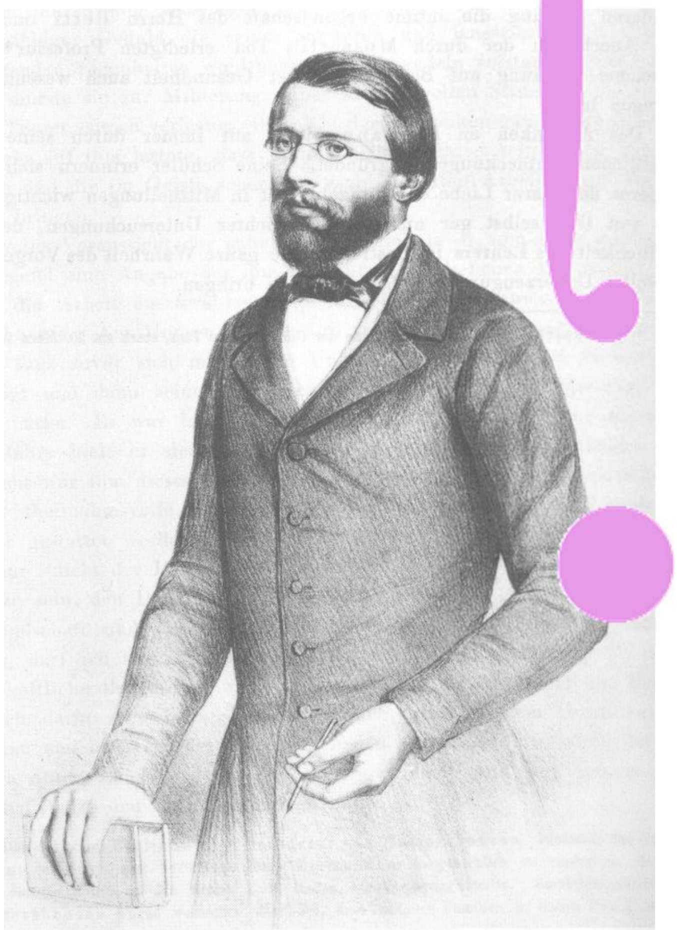
Wo sein Interesse geweckt ist, beginnt er neu, ohne sich durch Traditionen beirren zu lassen.



Bernhard Riemann Genie

Weltweite Berühmtheit

ja



Gliederung

- Bedeutung – ausgedrückt in Worten
- Bedeutung – gemessen und bewiesen
- Kindheit und Schulzeit am Johanneum
- Seine wissenschaftliche Laufbahn
- Privates Leben und Tod
- Nachwort

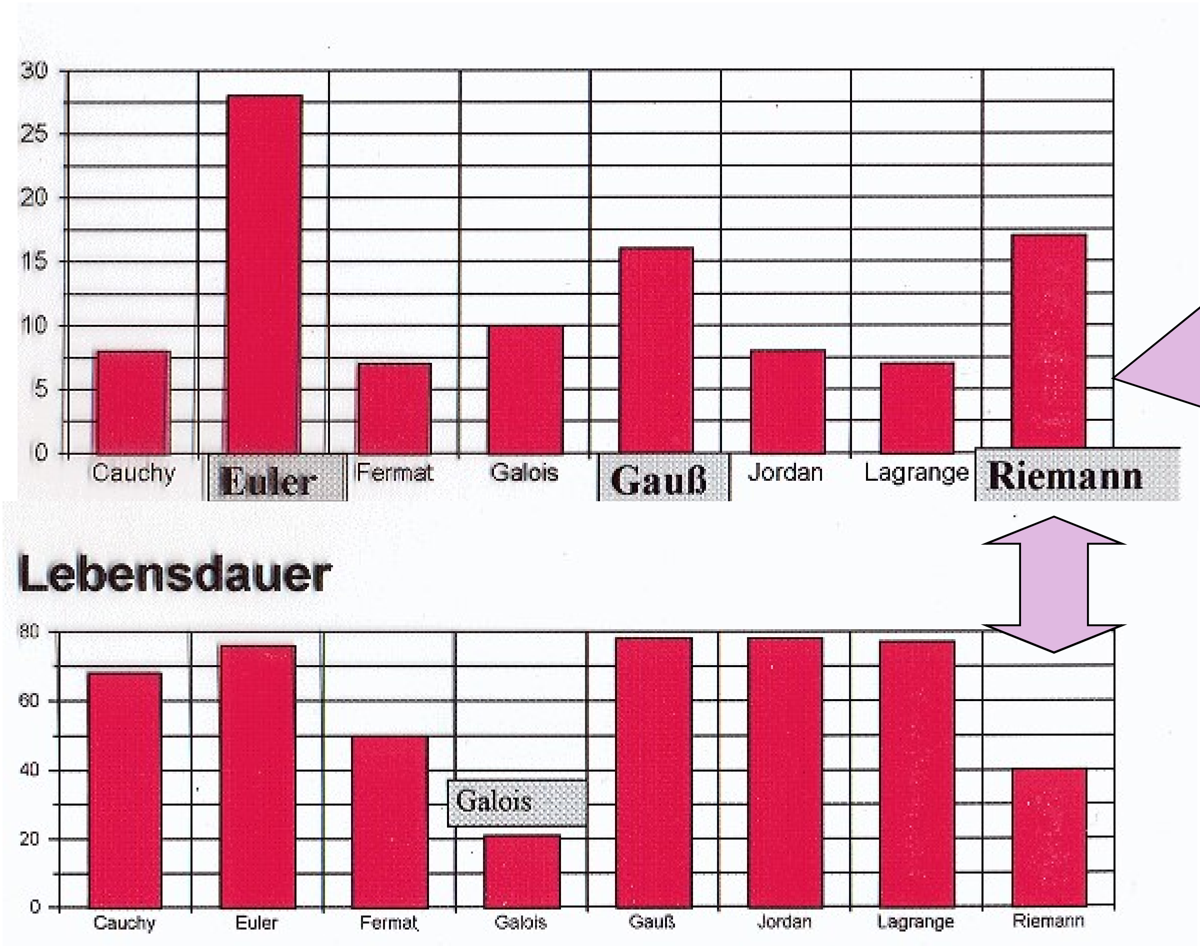
Geschichte der Mathematik

Egmont Colerus: Von Pythagoras bis Hilbert

dargestellt
in 17
Biographien

dtv-Atlas der Mathematik

Benannte Objekte im Inhaltsverzeichnis



Das sind die 8 häufigsten, andere Mathematiker haben weniger „eigene" Objekte

Artikel mit eigenem Absatz

Brockhaus Band 18 (1992)

Riemannsche Zahlenkugel

Riemannsche Flächen

Riemannscher Abbildungssatz ... zentraler Satz der Funktionentheorie und der Topologie

Riemannsches Integral ....

Riemannsche Zetafunktion

Riemannsche Vermutung

Riemannsche Geometrie

Riemannsche Mannigfaltigkeit ->Riemannscher Raum.

Riemannscher Raum

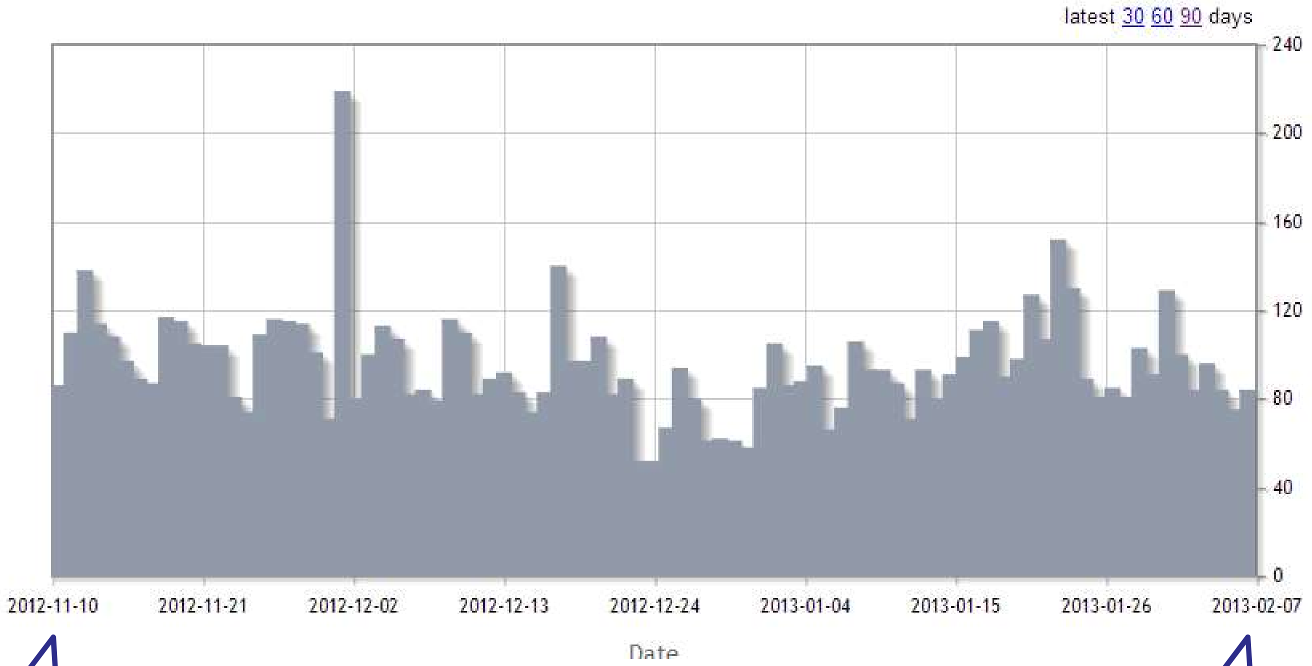
Riemannscher Krümmungstensor

Wikipedia: Bernhard Riemann

Wikipedia article traffic statistics

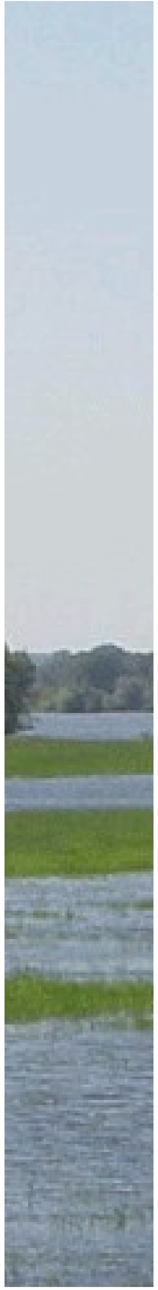
8474

bernhard Riemann has been viewed 8474 times in the last 90 days.



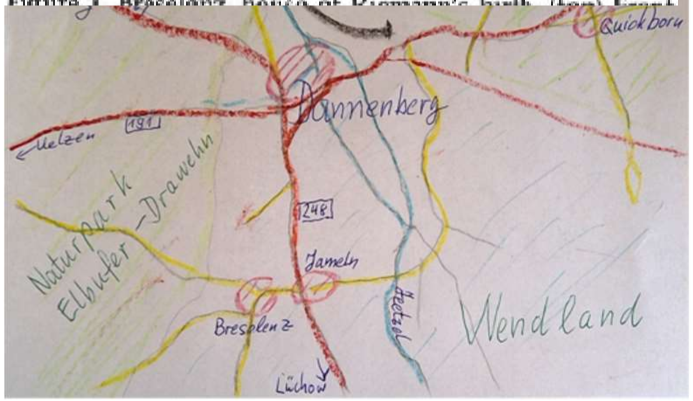
10.Okt.
2012

7.Feb.
2013



Kindheit

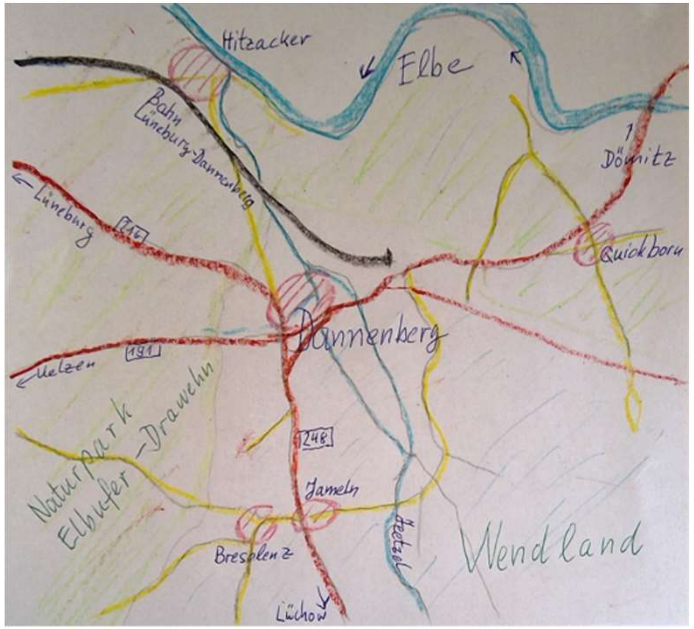
Bernhard Riemann
wurde 17. September 1826
in Breselenz bei
Dannenberg geboren.
Sein Vater war dort Pastor.



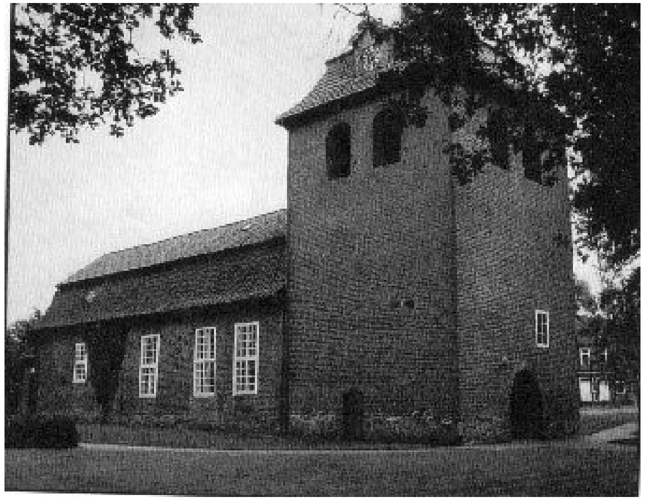
Das Pastorat, fotografiert von einem Mathematiker, vor dem Abriss

Kindheit

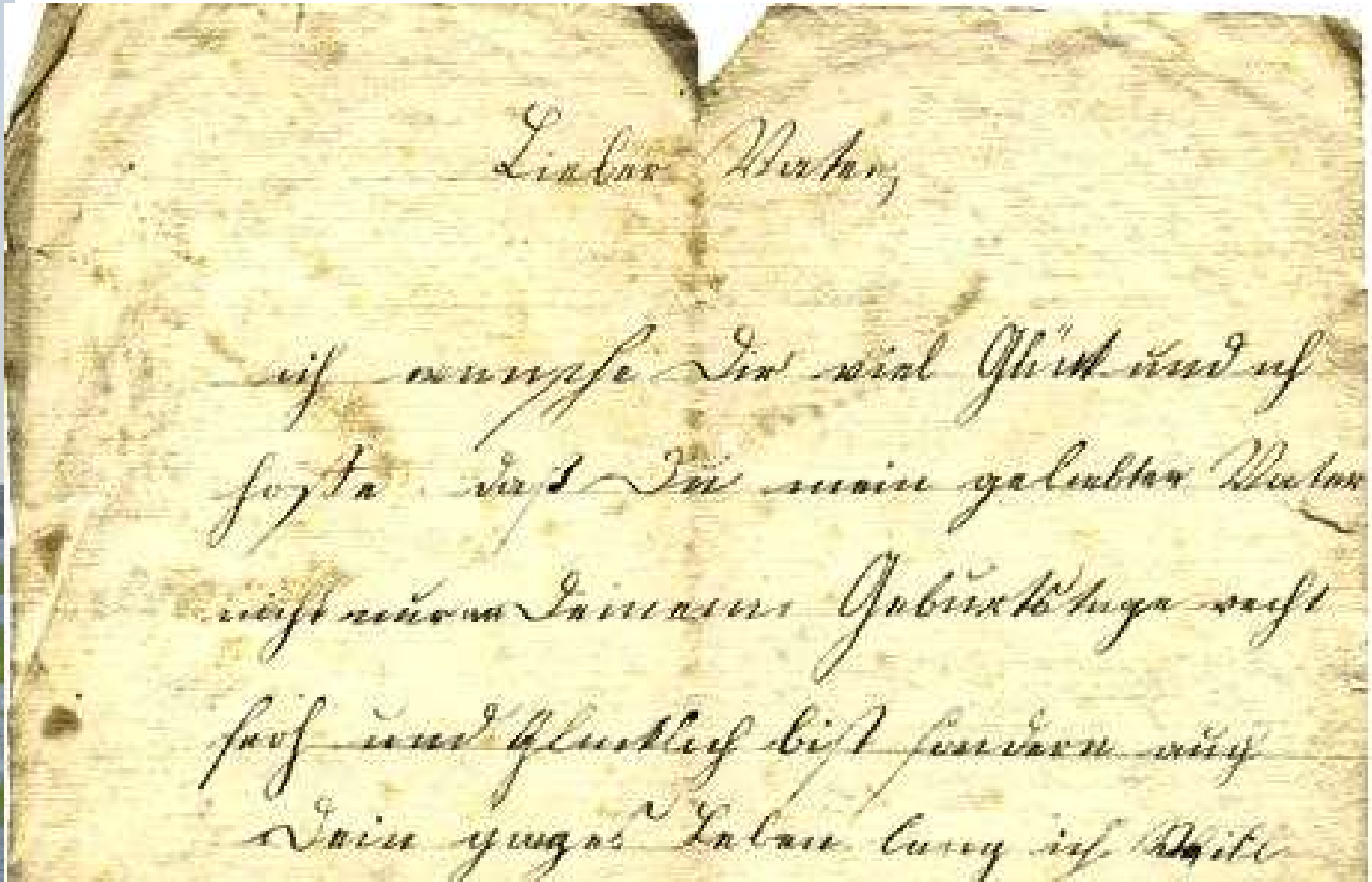
später zog die Familie nach Quickborn.



Bernhard verlebte eine glückliche Kindheit mit einem Bruder und vier Schwestern.

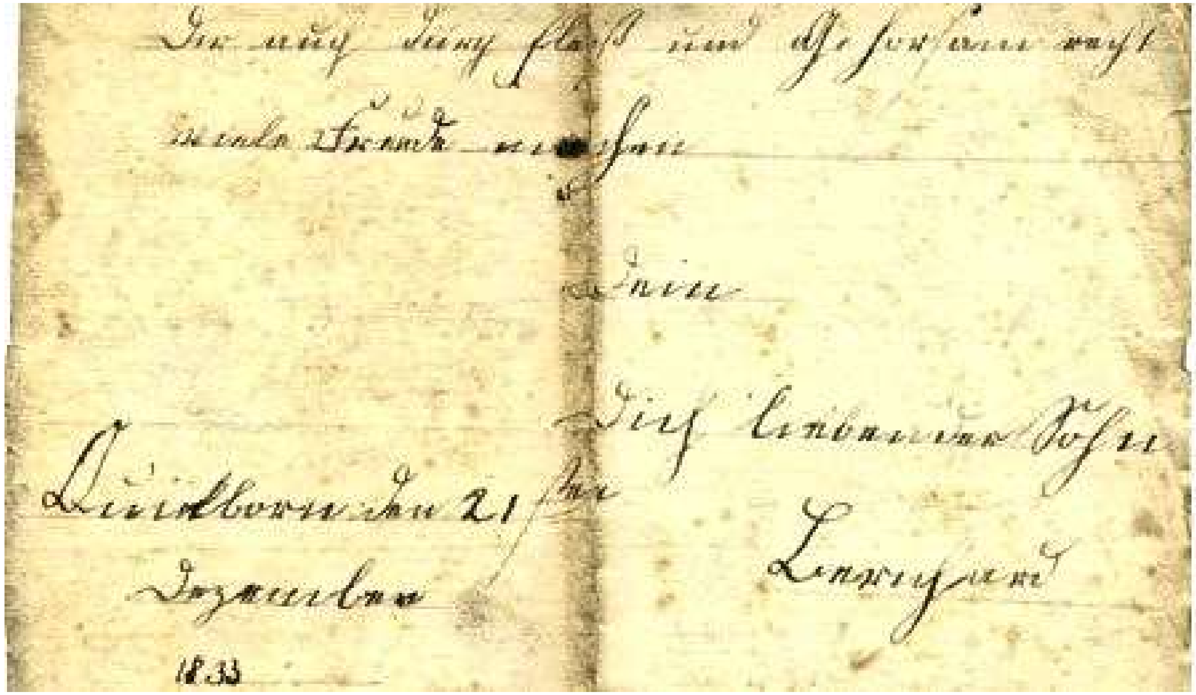


Riemann mit 7 Jahren



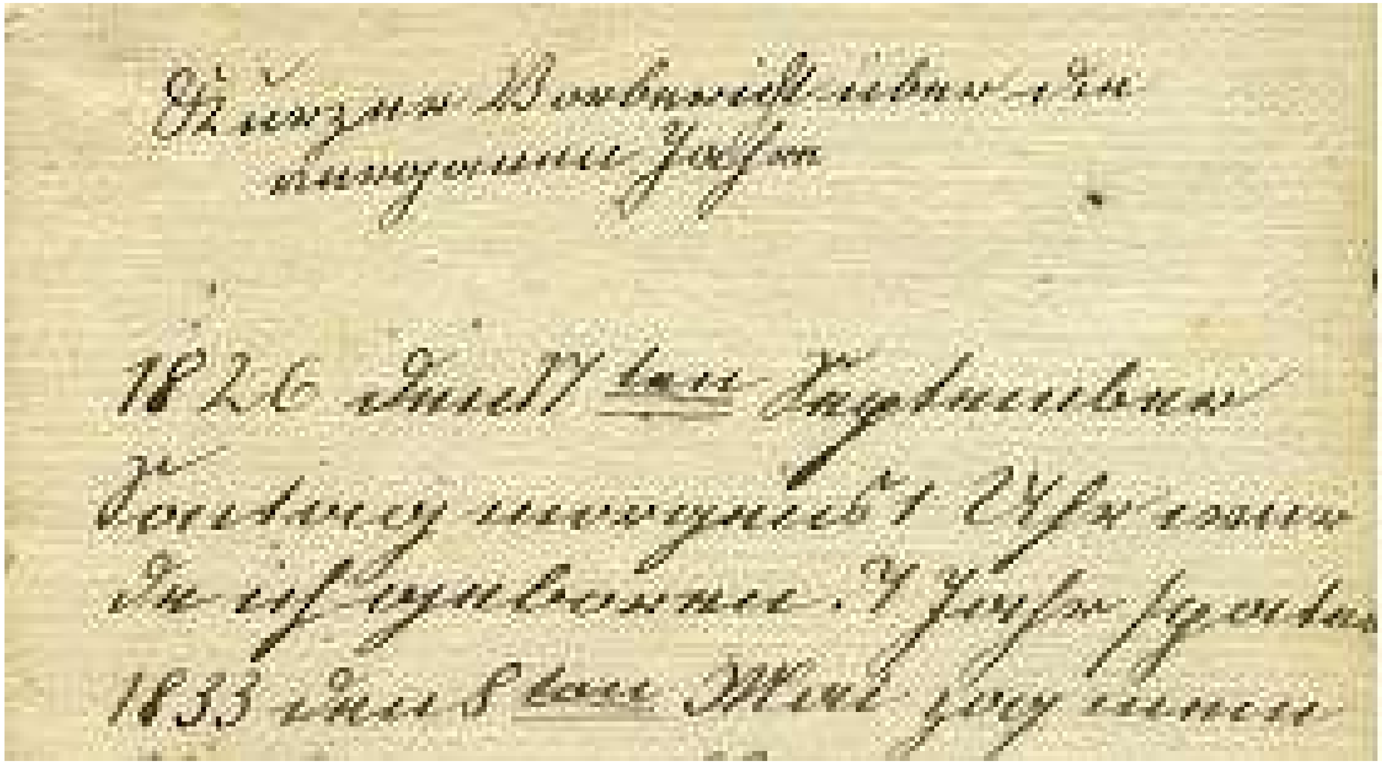
Lieber Vater, ich wünsche Dir viel Glück und ich hoffe, dass Du mein geliebter Vater nicht nur an Deinem Geburtstage recht froh und glucklich bist, sondern Dein ganzes Leben lang ich will

Riemann mit 7 Jahren



Dir auch durch Fleiß und Gehorsam recht viel Freude machen
Dein
Dich liebender Sohn
Quickborn den 21 ten Bernhard
Dezember
1833

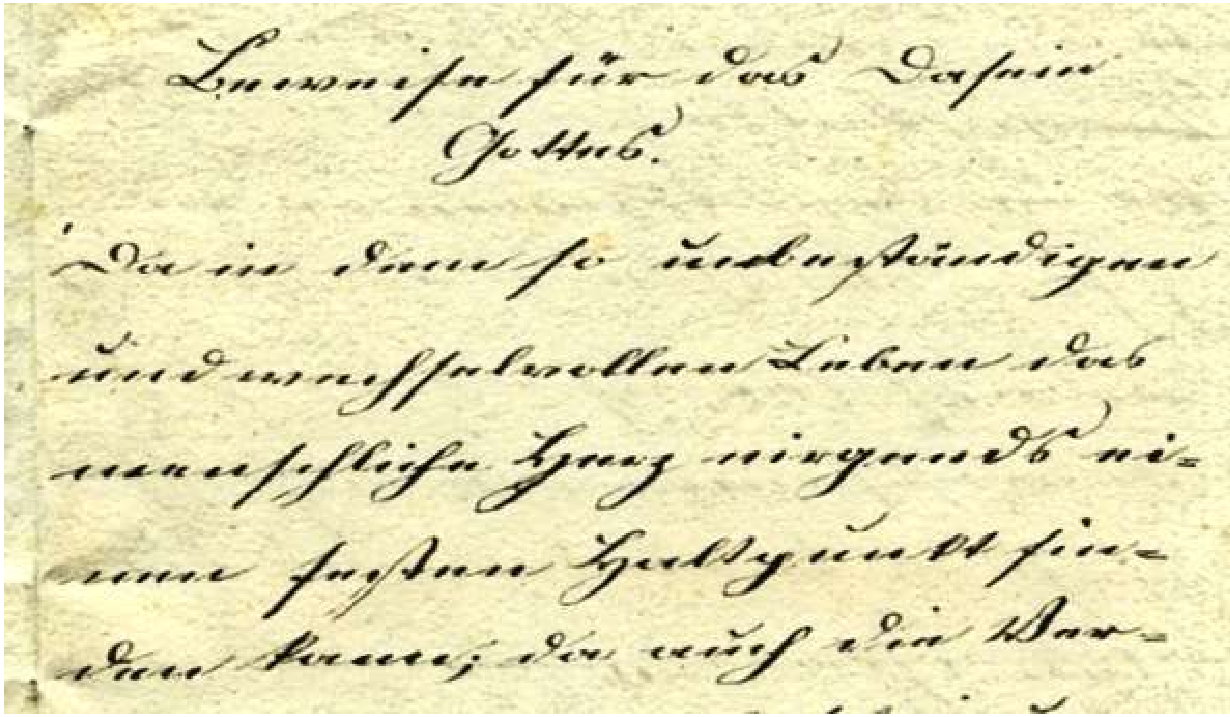
Riemann mit 9 Jahren



Kurzer Vorbericht über die vergangenen Jahre
1826 den 17 ten September Sonntag morgens 1 Uhr
wurde ich geboren. 7 Jahre spater 1833 den 8 ten Mai zog
mein
Vater von Breselenz nach Quickborn

Riemann mit $13\frac{1}{2}$ Jahren

Zur Konfirmation schreibt er ein Heft mit dem Titel: **Beweise für das Dasein Gottes**


Beweise für das Dasein
Gottes.
Da in dem so unbeständigen
und wechselvollen Leben das
menschliche Herz nirgends ei-
nen festen Haltepunkt fin-
den kann, da auch die Ver-

Da in dem so unbeständigen und wechselvollen Leben das menschliche Herz nirgends einen festen Haltepunkt finden kann, da auch die Vernunft ……

Hannover

Nach der Konfirmation wohnte er in Hannover bei seiner Großmutter – einer Hofratswitwe-, damit er dort das Lyzeum besuchen konnte.

Untertertia
Obertertia

Er war 15 Jahre alt, als er wegen des Todes der Großmutter Hannover verlassen musste

Johanneum Lüneburg

Von Ostern 1842
an geht
Bernhard
Riemann
hier zur Schule

ab Untersekunda

1829 ist dieses
Gebäude neben der
Johanniskirche
errichtet worden.

Direktor Dr. Karl Haage 1801-42

- mit 13 J. in Klasse 12 in Gotha
- mit 16 Theologie + Philologie Jena und Göttingen
- mit 23 Lehrer und Subdirektor, dann Direktor am Johanneum,
- Initiator des neuen Gebäudes
- er beruft ausgezeichnete Lehrer
- hat ungewöhnliche pädagogische Begabung
- zeigt Tatkraft und Durchsetzungsvermögen
- sorgt für die Einrichtung der „Realklassen“ (mehr Deutsch, Mathematik, Naturwissenschaften, moderne Sprachen)

Direktor Dr. Karl Haage 1801-42

- sorgt für eine sehr gute Ausbildung

So erklärte der
Oberschulrat Kohlrausch
aus Hannover 1829
"daß unser Johanneum
nicht bloß die beste Schule
im Hannoverschen sei,
sondern auch unter den dreißig
Schulanstalten, die ich zuvor
als preußischer Schulrat
kennen gelernt habe."

Karl Haages plötzlicher Tod durch einen Gehirnschlag Ende 1842 löste große Trauer aus.

Direktor F.Constantin Schmalfuß 1806-71

- der erste studierte Mathematiker am Johanneum (1829-49)
- Er war auch aus Thüringen.
- der nächste war erst Haages Sohn 1860 !!!

Nach Haages plötzlichem Tod wurde mit Schmalfuß zum ersten Mal ein Mathematiker Direktor. Er hat es verstanden, die Bedenken, “**ob ein Mathematiker für diesen Posten wohl recht geeignet sei**”, gründlich zu zerstreuen.

Zitate aus Nebe: Geschichte des Johanneums (1906):

Direktor F. Constantin Schmalfuß 1806-71

Zitat aus Nebe: Geschichte des Johanneums (1906):

- ....seine feine, gewandte, offene und heitere Art sich zu geben,......
- ....idealster Auffassung des Lehrerberufes.....
- ....war durchaus nicht einseitig, hätte ohne weiteres Latein in Sekunda unterrichten können......

- ... daß unter Schmalfuß' verständnisvoller Leitung ein Genie seines Faches, der Mathematik, auf dem Johanneum sich heranbildete, **Bernhard Riemann, der wohl berühmteste Schüler der Anstalt, den die Mathematiker unmittelbar nach oder neben Gauß stellen.**

Hebräisch und Theologie

Lehrer Dr. Seffer 1816-76

Brief an Prof. Schering nach Riemanns Tod

- .... daß er mit seinen deutschen und lateinischen Aufsätzen immer im Rückstande blieb,...,
- .... daß die Lehrer-Conferenz den Schulgesetzen gegenüber seinetwegen in Verzweiflung war.
- .... nahm ich ihn gegen ein ermäßigtes Kostgeld in mein Haus und verpflichtete mich gegen die Lehrer-Conferenz für prompte Ablieferung seiner Aufsätze von nun an sorgen zu wollen.
- .... manchen Abend bis in die Nacht bei ihm gesessen....

Seffer war da noch keine 30 Jahre alt.

Hebräisch und Theologie

Lehrer Dr. Seffer 1816-76

Brief an Prof. Schering nach Riemanns Tod

Seffer berichtet von der Abfassung seines Elementarbuchs der hebräischen Sprache, das jetzt auf den Gymnasien Deutschlands und der Schweiz viel gebraucht wird....

Das Werk sollte zu allen Kapiteln genau passende Übungsstücke enthalten. Diese aus der Bibel herauszusuchen, war eine schwierige Aufgabe, für die sich Riemann lebhaft interessierte. .....

....daß mein Elementarbuch mehrere seiner Übungsstücke zum großen Theil dem großen Mathematiker Riemann zu verdanken hat.

Hebräisch und Theologie

Lehrer Dr. Seffer 1816-76

Brief an Prof. Schering nach Riemanns Tod

.... später... hat er mir viel von seiner philosophischen Arbeit erzählt. ....
Ich muß freilich gestehen, daß ich ihm keineswegs folgen konnte,....,
aber doch die Großartigkeit seiner Ziele bewundern mußte.
Riemann war still, bescheiden und anspruchslos,.....
namentlich im Verkehr mit Damen leicht verlegen....
.....Ich habe ihn immer lieb gehabt und behalten.

Seffer ging 1846 als Pastor nach Alfeld und wurde später Schulrat in Hannover

Mathematik bei Schmalfuß

Brief an Prof. Schering nach Riemanns Tod

... Die Fassungskraft für mathematische Gegenstände gab sich mir sofort kund und es bedurfte bei Riemann nur der Andeutung eines mathematischen Gesetzes, um dasselbe mit den **weitesten Consequenzen und in feste Form gebracht zu sehen, und zwar in größter Allgemeinheit.**

Alles, was ich besitze an Euklidischen Dingen mit den Kommentaren ...; was ich von der Archimedischen Literatur besaß, Apollonios etcr alles dies las er, und unter dem Lesen ward es sein sicheres Eigenthum. Newtons Arithmetica universalis und des Cartesius Geometria interessierten ihn nicht minder. ...

Mathematik bei Schmalfuß

Brief an Prof. Schering nach Riemanns Tod

Schmalfuß lässt ihn zwar am normalen Mathematikunterricht teilnehmen,

aber.... vielmehr sann ich darauf, ihm in jeder Stunde etwas zu bieten, was seinen Kräften angemessen war, und **jedesmal ist er über die Grenze, die ich als seine Schranke und wohl auch als meine** betrachtete, hinausgegangen und brachte regelmäßig eine **Fülle von Ergebnissen**, **die ich nicht in solchem Maße erwartet hatte.**

Mathematatik bei Schmalfuß

Brief an Prof. Schering nach Riemanns Tod

... wie schwer es ihm wurde, in fließendem Vortrage seine Gedanken zu entwickeln.
Dazu kam, daß kein Ausdruck ihm genügte, der nicht **alles umfaßte**,
und daß er ungemein zaghaft war, eine Darstellung, die nicht, ... , von **untadeliger Präcision** war, als richtig anzuerkennen. ...

Hier hat wohl das „Aufsatzproblem“ seine Wurzeln

Aber da liegt auch seine überragende Kraft.

Abitur bei Schmalfuß

Brief an Prof. Schering nach Riemanns Tod

Pfingsten 1845 leiht Schmalfuß seinem Schüler das neueste Buch von Legendre aus

and Bernhard read the 900 page book in six days

aus St. Andrews

Im Abitur Ostern 46 prüft er ihn über diese, weit über den Schulunterricht hinausgehende

***Zahlentheorie von Legendre*.**

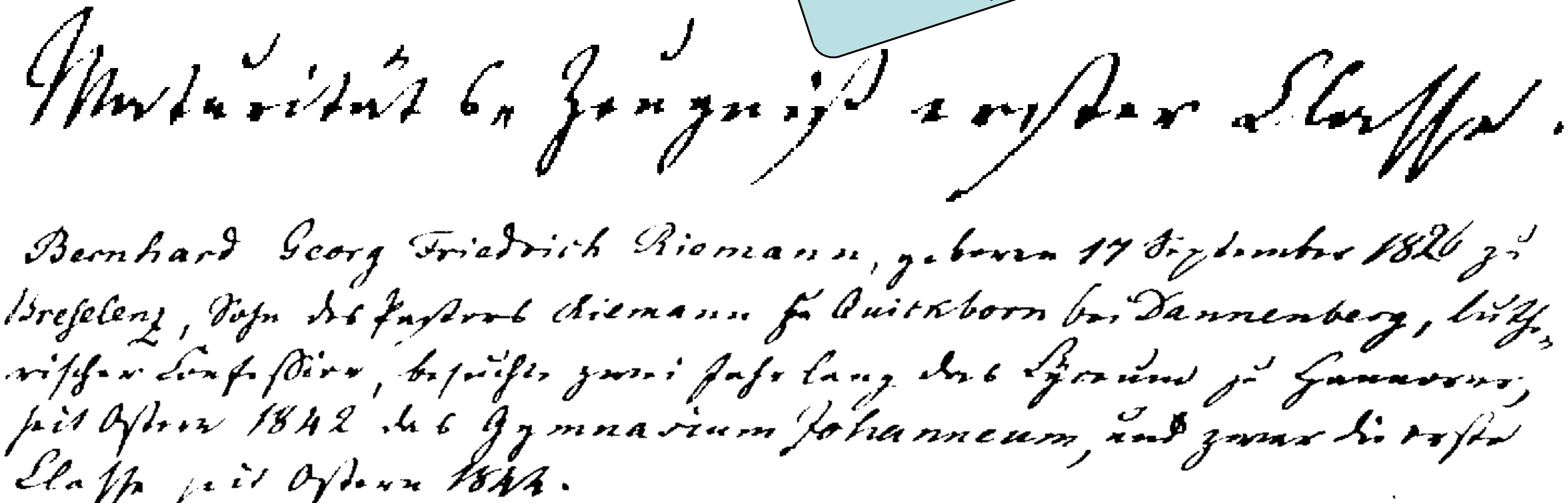
Er stellt fest, **daß ihm alles**,

worauf ich als Examinator mich nicht ohne Mühe vorbereitet hatte, …, **geläufig war.**

Abitur bei Schmalfuß

So überzeugt Schmalfuß die Lehrer-Conferenz von Bernhard Riemanns Fähigkeiten

Zumal der Abituraufsatz nicht fertig wurde



Maturitäts Zeugniß erster Classe.

Bernhard Georg Friedrich Riemann, geboren 17 September 1826 zu Breselenz, Sohn des Pastors Riemann zu Quickborn bei Dannenberg, lutherischer Confession, besuchte zwei Jahr lang das Lyceum zu Hannover, seit Ostern 1842 das Gymnasium Johanneum, und zwar die erste Classe seit Ostern 1844.

das Gymnasium Johanneum, und zwar die erste Klasse seit Ostern 1844.

Abiturzeugnis „Erster Klasse“

Maturitäts Zeugniß erster Klasse.

... Seine **sittliche Aufführung** in und außerhalb der Schule war sehr gut. Sein **Schulbesuch** war regelmäßig, doch in letzterem Jahre mehrmal anhaltend durch Krankheit unterbrochen, seine **Aufmerksamkeit** recht gut, doch nicht in allen Unterrichtsgegenständen gleichmäßig, sein **häuslicher Fleiß** zwar angestrengt, aber durch eigene Neigung bedingt und deshalb den Forderungen der Schule nicht immer entsprechend, namentlich wurde die Ablieferung der freien Aufsätze häufig verspätet. Allgemeines Prädikat des Fleißes **gut.**

Abiturzeugnis „Erster Klasse“

Kenntnisse

1. Religion. Er ist bekannt mit den Grundwahrheiten der christlichen Glaubens- und Sittenlehre mit den wesentlichen Unterscheidungspunkten der wichtigsten Konfessionen mit den Hauptmomenten der Kirchengeschichte und dem Inhalte der biblischen Bücher.

Allgemeines Prädikat **recht gut**.

2. Deutsche Sprache. Er ist wohlbekannt mit den Regeln der Grammatik und des Stils und hat sich durch Lektüre mit einer bedeutenden Anzahl Klassiker bekannt gemacht. Seine Aufsätze wurden mit großer Mühsamkeit und peinlicher Langsamkeit gearbeitet. **Die Prüfungsarbeit ist unvollendet geblieben.** Seine Aufsätze empfehlen sich durch logisch richtige Anordnung und Verbindung der Gedanken, durch Richtigkeit des Urtheils und durch eine zusammenhängende, schlichte, meist fließende und gewandte Darstellung, lassen jedoch Fülle des Inhalts und lebendigen Erguß der Phantasie vermißen. Sein mündlicher Ausdruck ist **gut**.

Allgemeines Prädikat **gut**.

3. Lateinische Sprache. Bei der Lektüre vermag er, wenn auch nicht rasch, in den Sinn und Zusammenhang auch der schwierigen Stellen einzudringen. Seine grammatischen Kenntnisse sind gut, seine stilistischen Arbeiten begründen ein günstiges Urtheil über die logische Durchdringung und Handhabung des lateinischen Sprachschatzes, wiewohl ihm ein reicher Vorrath an Redensarten und Wendungen(?) nicht zu Gebote zu stehen scheint. Sein Ausdruck empfiehlt sich durch Präcision und richtige Erfassung der Proprietät (?) , entbehrt aber des leichten Flusses. Im Sprechen ist er nur wenig geübt. Allgemeines Prädikat **gut.**

4. Griechische Sprache. Von dem Verständniß der griechischen Schriftsteller gilt dasselbe, wie von den lateinischen. Seine Kenntnisse in der Grammatik sind gut. Allgem.Prädikat **gut.**

5. Hebräische Sprache. Er liest mit hinreichender Geläufigkeit, besitzt gründliche Kenntnisse in der Grammatik und übersetzt mit Fertigkeit die leichten alttestamentlichen Schriften.
Allgemeines Prädikat **Sehr gut.**

6. Französische Sprache. Er übersetzt mit Leichtigkeit selbst die schweren Schriftsteller der neueren Zeit und schreibt beinahe frei von grammatischen Verstößen. Allgem.Prädikat **gut.**

7. Englische Sprache. In der Aussprache und in der Grammatik wird noch Sicherheit vermißt, im Verstehen und Übersetzen der Schriftsteller besitzt er eine ziemliche Fertigkeit.
Allgemeines Prädikat **gut.**

8. Geschichte und Geographie. Seine Kenntnisse in allen Theilen der Geschichte haben das Prädikat **recht gut** erhalten, in der Geographie **gut.**

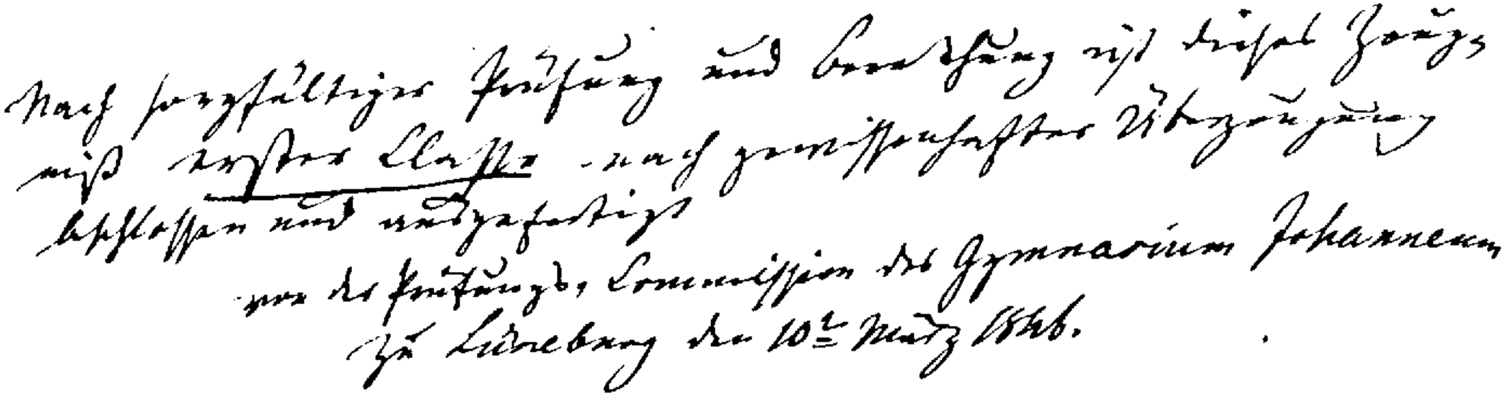
Abiturzeugnis „Erster Klasse"

9. Mathematik. Seine Kenntnisse sind durchaus gründlich und sicher und gehen an Umfang und Tiefe **weit über das Maß hinaus, das der Mathematik an Schulen eingeräumt werden** kann, in Auffaßung mathematischer Lehren (?) besitzt er **Scharfblick, Raschheit und Klarheit in seltenem Grade.** Er wird unterstützt durch ein zuverlässiges Gedächtniß, eine ausgezeichnete Kombinationsgabe und Behendigkeit einer konstruierenden Phantasie. **Überhaupt ist er durch seine Anlagen entschieden auf das Studium der mathematischen Wissenschaften hingewiesen.**

Allgemeines Prädikat **vorzüglich.**

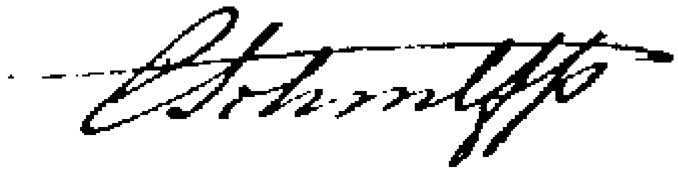
10. Physik. Dasselbe Urtheil, welches über seine Leistungen in der Mathematik gilt, findet Anwendung auf diejenigen Theile der Physik, welche eine mathematische Begründung und Behandlung zulassen.

Abiturzeugnis „Erster Klasse“



Nach sorgfältiger Prüfung und Berathung ist dieses Zeugniß
<u>erster Klasse</u> nach gewissenhafter Überzeugung
beschlossen und ausgefertigt
von der Prüfungs Commission des Gymnasiums Johanneum
zu Lüneburg den 10ten März 1846

C. Schmalfuß

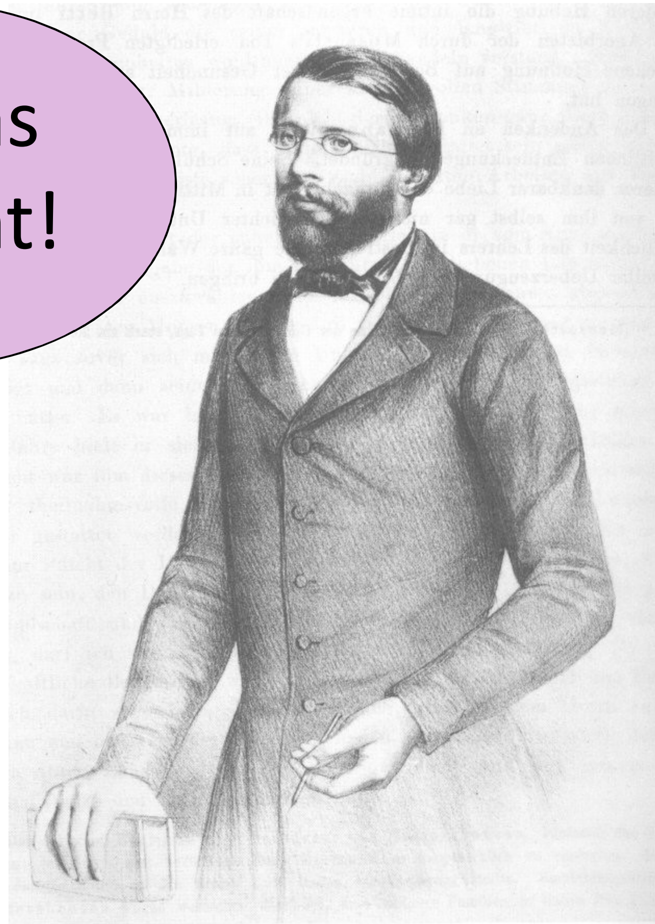


Bernhard Riemann

schon 1846 als Abiturient am Johanneum ein Mathematik-Genie

Ja, das stimmt!

und es kann als glückliche Fügung angesehen werden, dass er so engagierte Lehrer hatte.



2006 VIRTUTI HUMANITATI ... JOHANNEUM LÜNEBURG 600 Jahre!

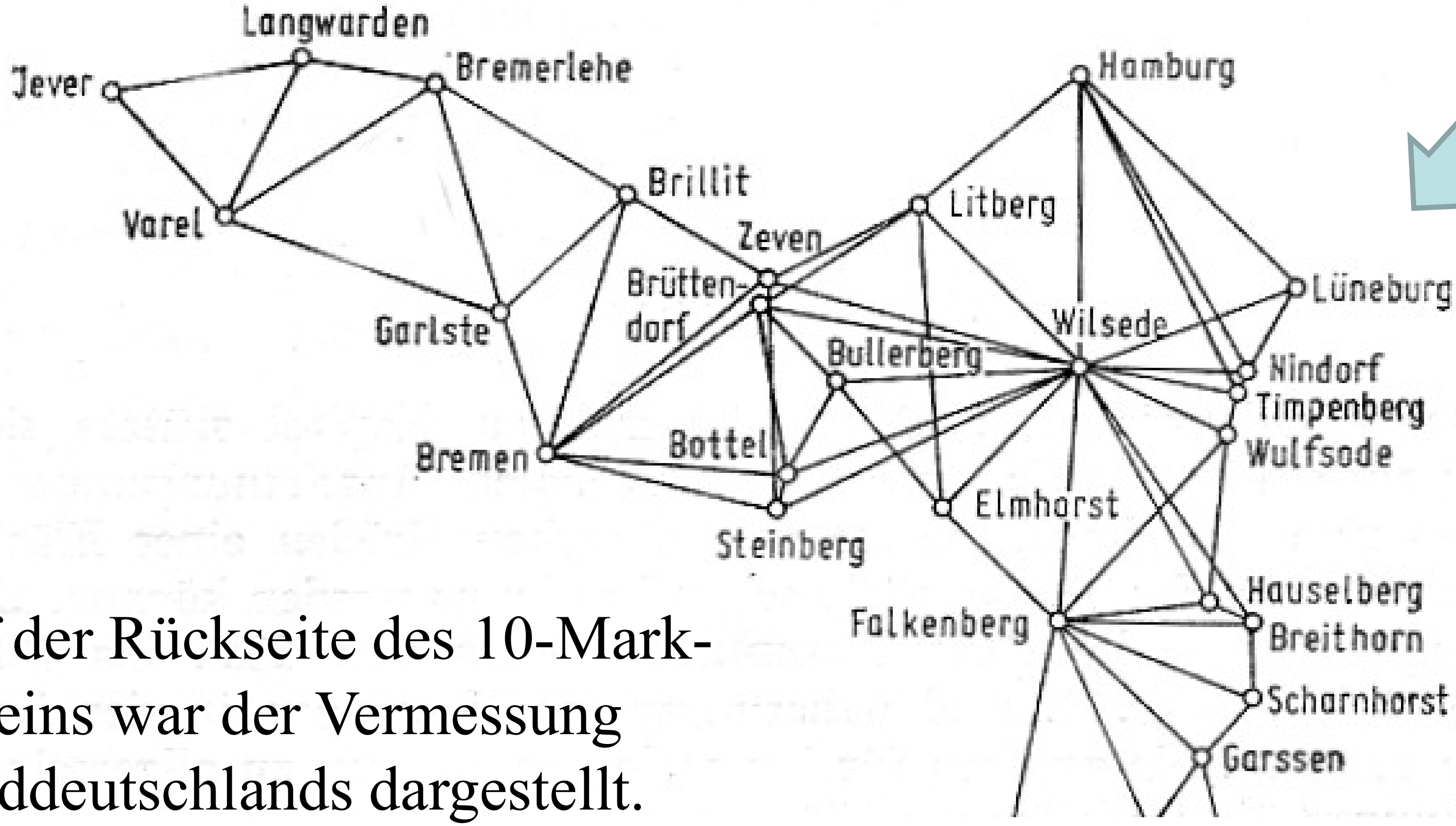
Studium und Mathematik

Göttingen

Carl Friedrich Gauß, „Fürst der Mathematik", 1777-1855

neu zitiert von Daniel Kehlmann 2005

Studium und Mathematik



Auf der Rückseite des 10-Mark-Scheins war der Vermessung Norddeutschlands dargestellt.

Carl Friedrich Gauß, „Fürst der Mathematik“, 1777-1855

neu zitiert von Daniel Kehlmann 2005

Über die Darstellbarkeit einer Function durch ein trigonometrische Reihe Habilitationsschrift 1854

Riemann stellt die Geschichte der Fourierreihen dar und zieht das Fazit:

> Die Frage über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ist also bis jetzt nur unter den beiden Voraussetzungen entschieden, dass die Function durchgehends eine Integration zulässt und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat. Wenn die letztere Voraussetzung nicht gemacht wird, so sind die beiden Integraltheoreme Dirichlet's zur Entscheidung der Frage unzulänglich; wenn aber die erstere wegfällt, so ist schon die Fourier'sche Coefficientenbestimmung nicht anwendbar.

Gegeben sei eine periodische Funktion f, Periode T.

Wenn

- f durchgehend integrierbar ist (im Dirichletschen Sinne)

und

- f nicht unendlich viele Extrema im T-Intervall hat,

dann kann f in eine Fourierreihe entwickelt werden.

es gibt eine Stammfunktion

Riemann und sein Integral

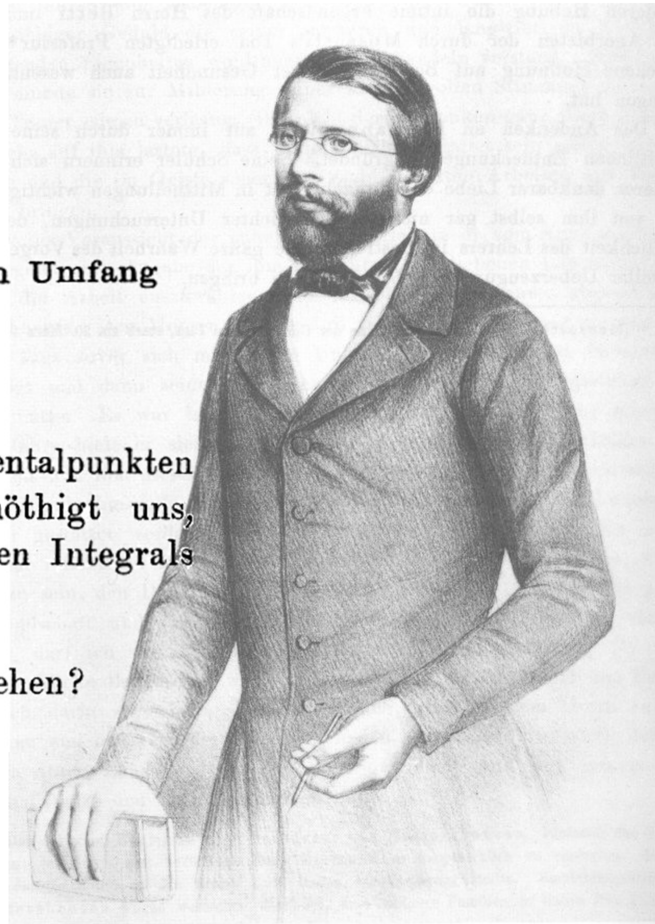
Also schiebt Riemann ein
Kapitel in seine Arbeit ein:

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

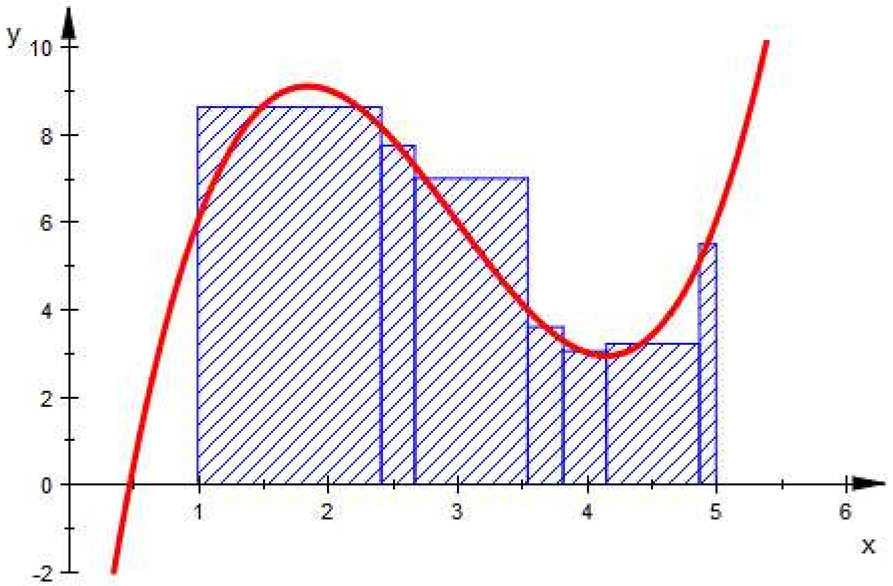
Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?



Über den Begriff des bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit Habilitationsschrift 1854

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

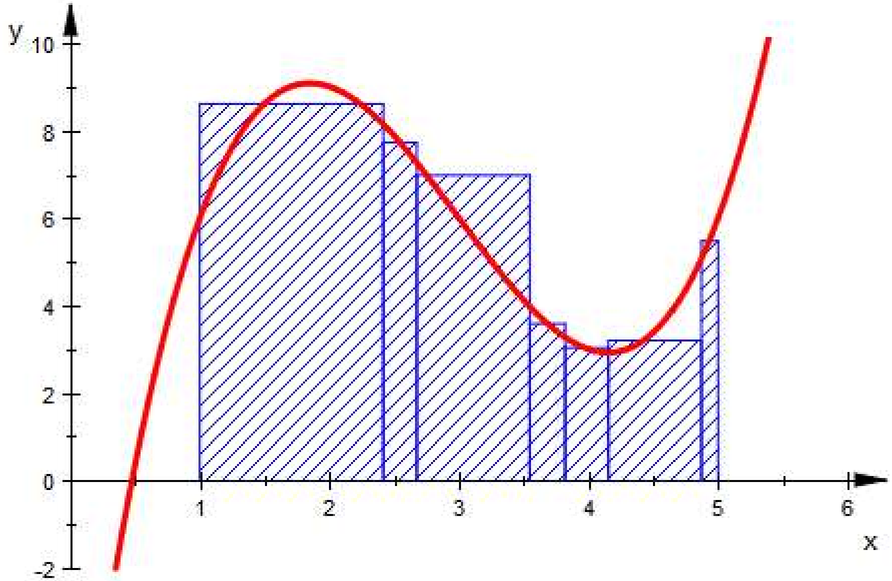


Riemann wählt eine **beliebige Zerlegung** D des Intervalls [a,b].
Dann bildet er mit der Ordinate je einer **beliebigen Zwischenstelle** jedes Teilintervalls ein Rechteck und summiert über alle diese Rechtecke.

Diese Summe heißt **Riemann-Summe der Zerlegung D** und der Zwischenstellen.

Über den Begriff des bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit Habilitationsschrift 1854

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?



Dann wird die Zerlegung **verfeinert**, so dass die maximale Teilintervalllänge gegen 0 geht.
Wenn dann **unabhängig** von der Wahl der Zerlegung und der Zwischenstellen die **Riemann-Summe einen Grenzwert hat**, so heißt dieser

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Anderenfalls hat das Symbol keine Bedeutung.

Originaler Riemann-Text: Habilitationsschrift 1854

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

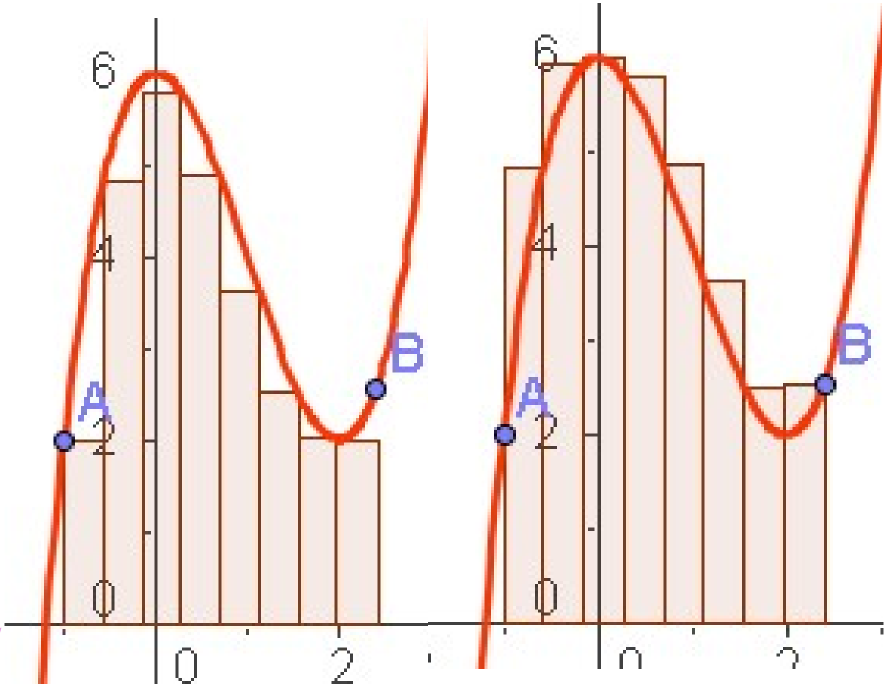
$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

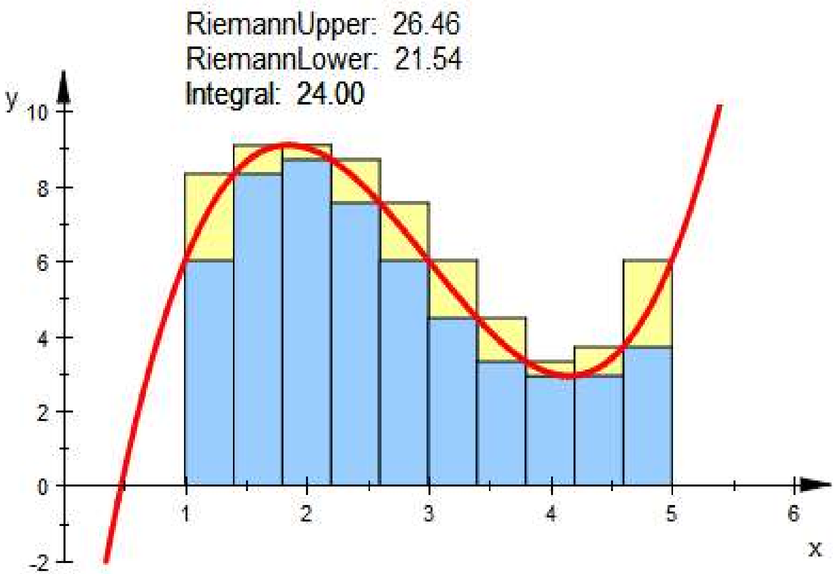
von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\,dx$.

Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int_a^b f(x)\,dx$ keine Bedeutung.

Riemannsche Summen in der Lehre

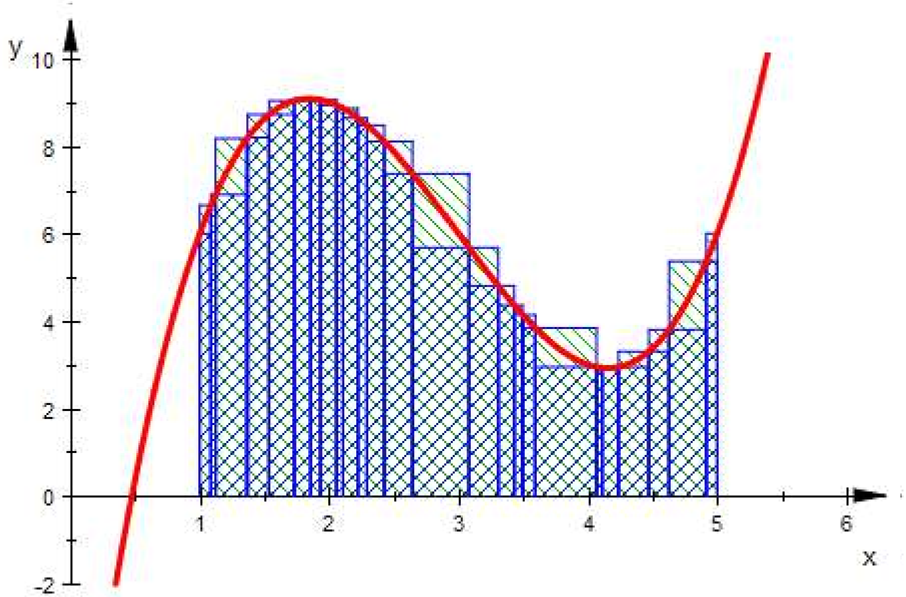
GeoGebra MuPAD





Die eben definierte Riemann-Summe liegt sicher zwischen der Untersumme und der Obersumme

Riemannsche Summen in der Lehre



MuPAD

Man bestimmt bei fortschreitender Verfeinerung die Riemann-Summe.

Strebt sie keinem Wert zu, ist die Funktion nicht Riemann-integrierbar.

Strebt sie aber einem Wert zu, muss man noch irgendwie absichern, dass derselbe Wert auch für alle anderen Zerlegungen und für alle Zwischenwert-Auswahlen Grenzwert der Riemann-Summe ist.

ein harter Anspruch!

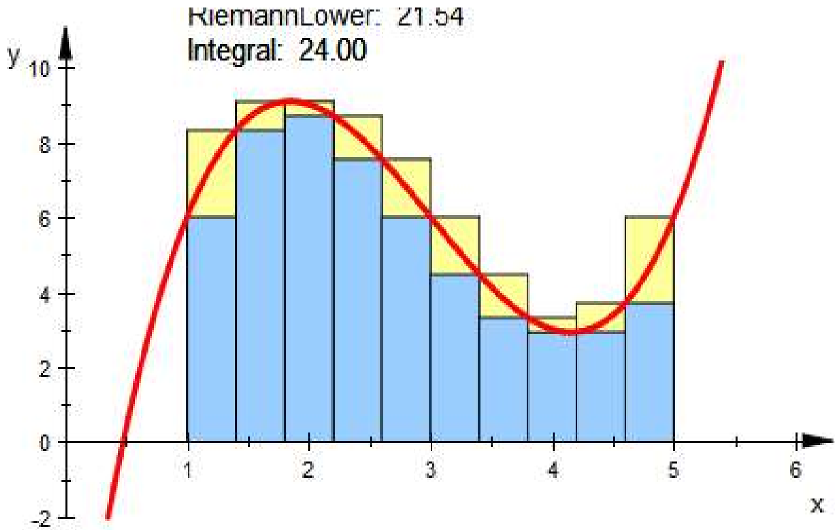
Notwendiges und hinreichendes Kriterium

Bei gegebener Zerlegung betrachtet Riemann:

endlich klein werden, convergirt. Bezeichnen wir also die grösste Schwankung der Function zwischen a und x_1, d. h. den Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes in diesem Intervalle, durch D_1, zwischen x_1 und x_2 durch D_2 ..., zwischen x_{n-1} und b durch D_n, so muss

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

mit den Grössen δ unendlich klein werden. Wir nehmen ferner an,



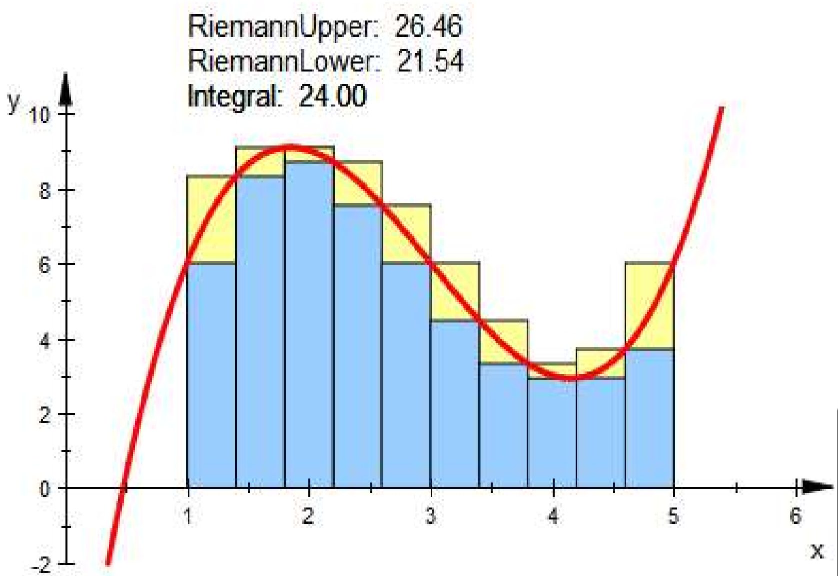
die größte Schwankung jedem Streifen....

die hier gelb sichtbaren Rechtecke sind zusammen gerade der Unterschied zwischen Obersumme und Untersumme.

Notwendiges und hinreichendes Kriterium

f sei beschränkt, dann gilt: Das Integral existiert genau dann, wenn sich der Unterschied der Ober und Untersummen durch Verfeinerung der Zerlegung unter jede Schranke drücken lässt.

Bei stetigen Funktionen werden auch die Höhen der gelben Rechtecke beliebig klein.



eigentlich beliebige Zerlegung

Liegen aber (endliche) Sprünge vor, wird die Flächengröße durch kleine Breite der Rechtecke unter jede Schranke gedrückt.

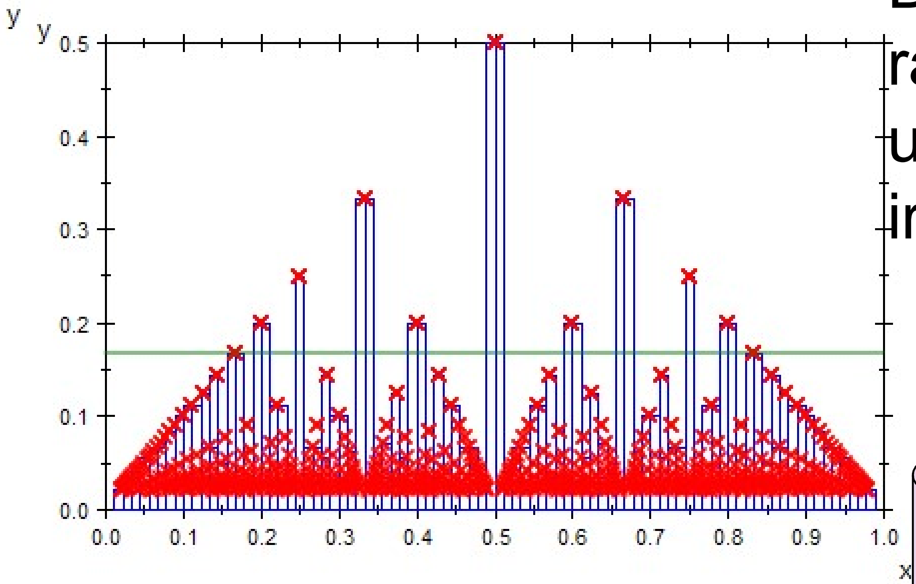
Also ist es nun doch gerechtfertigt zu sagen:

Riemannsche Ober- und Untersummen

Besondere Funktionen vom Dirichlet-Typ

$$f(x)=\begin{cases} 0 \;\; \textit{für} \;\; x\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \;\cup\{0,1\} \\ \dfrac{1}{q} \;\; \textit{für} \;\; x=\dfrac{p}{q} \;\textit{als gekürzter Bruch} \end{cases}$$

MuPAD



Die Funktion ist an allen rationalen Stellen unstetig und an allen irrationalen Stellen stetig.

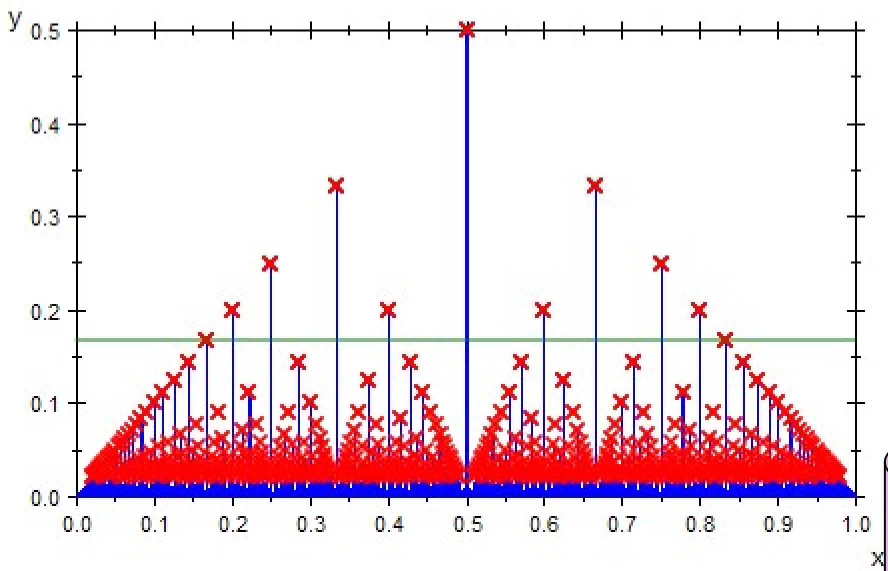
Für das letztere gibt Hischer (->Lit.) ein schlauen Beweis.

Riemann-integrierbar.

Satz, hinreichendes Kriterium

Das mündet in dem Satz:

Ist f beschränkt und die Menge der Unstetigkeitsstellen vom Maße 0, dann ist f Riemann-integrierbar



Riemann-integrierbar.

Was das Riemann-Integral leistet

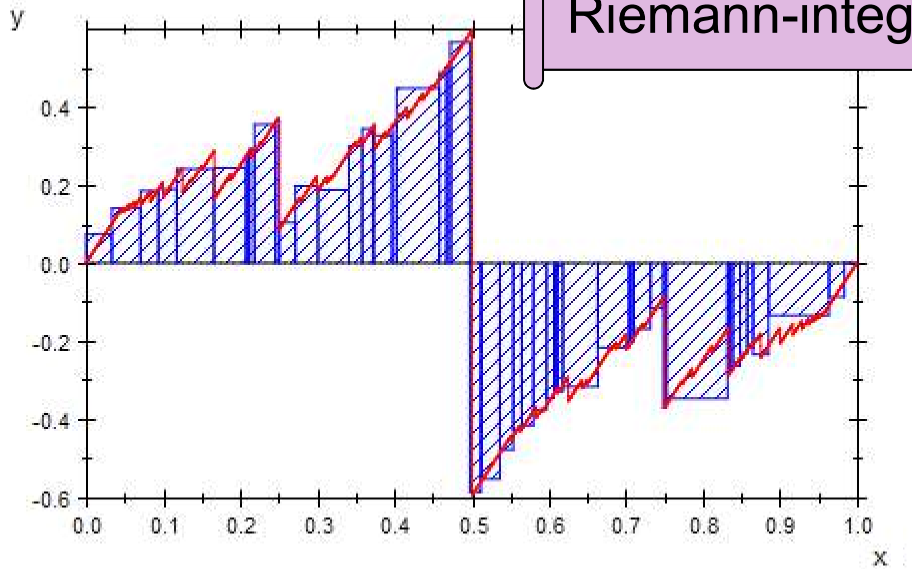
Zitat: „...Da diese Funktionen noch nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem bestimmten Beispiele auszugehen.“

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x - round(n\,x)}{n^2}$$

GeoGebra

MuPAD

Riemann-integrierbar.



Welche Funktionen werden durch trigonometrischen Reihen definiert?

zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden. Während also die bisherigen Arbeiten zeigten: wenn eine Function diese und jene Eigenschaften hat, so ist sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar; müssen wir von der umgekehrten Frage ausgehen: Wenn eine Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, was folgt daraus über ihren Gang, über die Aenderung ihres Werthes bei stetiger Aenderung des Arguments?

Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c \left(F(t) - C'\,t - A_0\,\frac{tt}{2}\right) \frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Man überzeugt sich aber leicht durch partielle Integration, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c \left(C'\,t + A^0\,\frac{tt}{2}\right) \frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt,$$

wenn n unendlich gross wird, gegen A_0 convergirt, wodurch man obigen Satz erhält.

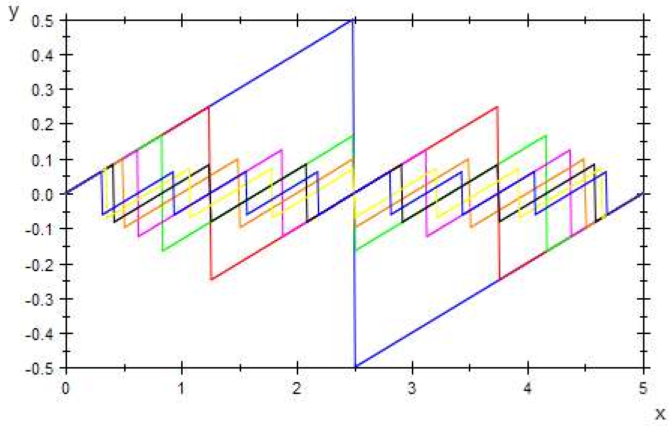
jetzt wird's wild!

Was ist da für die Mathematik-Lehre sinnvoll?

Lohnend sind Beispiele, die ähnlich aussehen und dennoch ganz andere Resultate haben

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - round(nx)}{n}$$

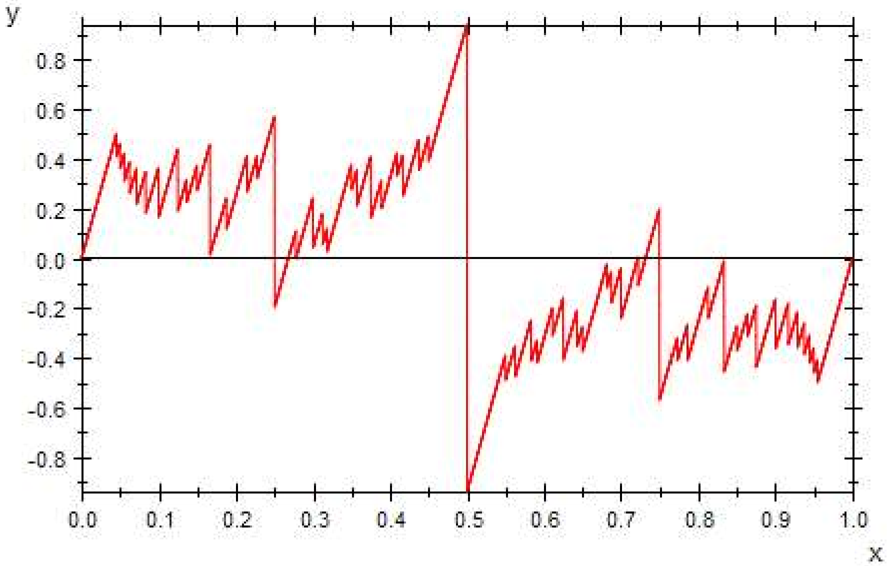
eben war im Nenner ein Quadrat



nun haben die Reihenglieder alle die Steigung 1

die Sprunghöhen sind 1/n

Die Unvollständigkeit des Computers erzwingt Theorie



Die Summe der Sprunghöhen divergiert also mit der harmonische Reihe.

Die Sprungstellen liegen dicht.

Nur weil diese so langsam divergiert, kann man hier überhaupt noch etwas sehen. (7000 Summanden)
Die Funktion ist in jedem noch so kleinen Intervall unbeschränkt und daher nicht integrierbar.

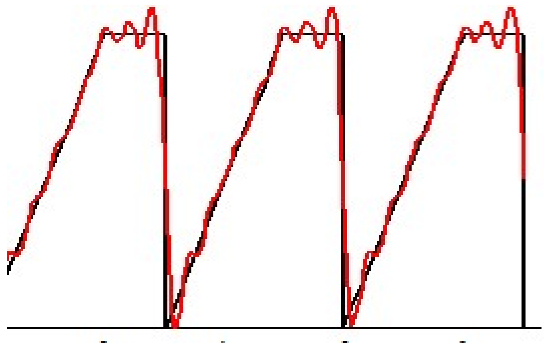
Bspl. von Riemann

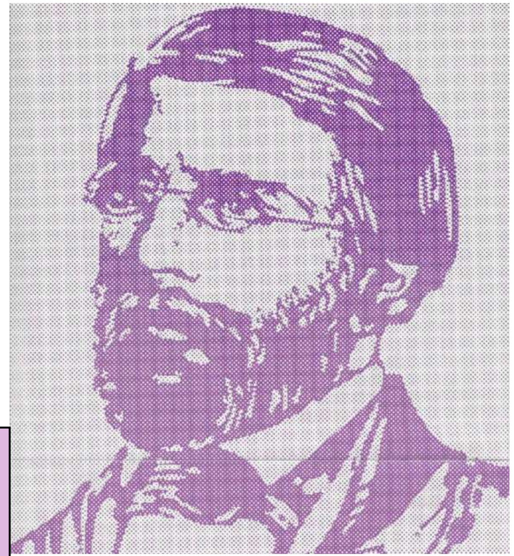
Studium und Mathematik

Berlin

1847-49

- Steiner
- Jacobi
- Dirichlet



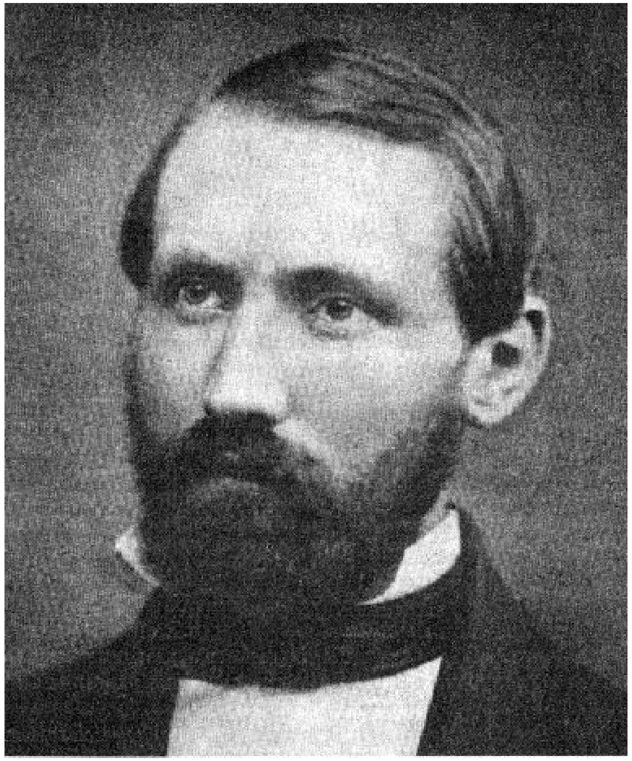


dieser folgt 1855 Gauß nach, ihm folgt 1859 Riemann auf den Lehrstuhl in Göttingen

Studium und Mathematik

für Promotion und Habilitation
kehrt Riemann 1849 zu Gauß zurück

Carl Friedrich Gauß
„Fürst der Mathematik“, 1777-1855



Bernhard Riemann
undatiert, um 1850

Gaus schreibt das Gutachten für Riemanns Dissertation

Die von Herrn Riemann eingereichte Schrift legt ein bündiges Zeugniß ab von den gründlichen und tief eindringenden Studien des Verf. in demjenigen Gebiete, welchem der darin behandelte Gegenstand angehört; von einem strebsamen ächt mathematischen Forschungsgeiste, und von einer rühmlichen productiven Selbstthätigkeit. Der Vortrag ist umsichtig und concis, theilweise selbst elegant: der größte Theil der Leser möchte indeß wohl in einigen Theilen noch eine größere Durchsichtigkeit der Anordnung wünschen. Das Ganze ist eine gediegene werthvolle Arbeit, das Maaß der Anforderungen, welche man gewöhnlich an Probeschriften zur Erlangung der Doctorwürde stellt, nicht bloß erfüllend, sondern weit überragend.

Das Examen in der Mathematik werde ich übernehmen. ~~Unter~~ den Wochentagen ist ~~mir~~ Sonnabend oder Freitag am ~~gelegensten~~ und, wenn eine Nachmittags~~stunde~~stunde gewählt werden soll, um 5 oder 5½ Uhr. Ich würde aber auch nichts gegen die Vormittagsstunde 11 Uhr zu erinnern haben. Ich setze übrigens voraus, daß das Examen nicht vor der nächsten Woche statt finden wird.

Gauß.

Gaus schreibt das Gutachten für Riemanns Dissertation

Die von Herrn Riemann eingereichte Schrift legt ein bündiges Zeugniß ab von den **gründlichen und tief eindringenden Studien** des Verf. in demjenigen Gebiete, welchem der darin behandelte Gegenstand angehört; von einem **strebsamen ächt mathematischen Forschungsgeiste, und von einer rühmlichen productiven Selbstthätigkeit. Der Vortrag ist umsichtig und concis, theilweise selbst elegant:** der größte Theil der Leser möchte indeß wohl in einigen Theilen noch eine größere Durchsichtigkeit der Anordnung wünschen. **Das Ganze ist eine gediegene werthvolle Arbeit, das Maaß der Anforderungen, welche man gewöhnlich an Probeschriften zur Erlangung der Doctorwürde stellt, nicht bloß erfüllend, sondern weit überragend.**

Das Examen in der Mathematik werde ich übe

Weg zum Professor

Wissenschaftliche Arbeiten bei Gauß

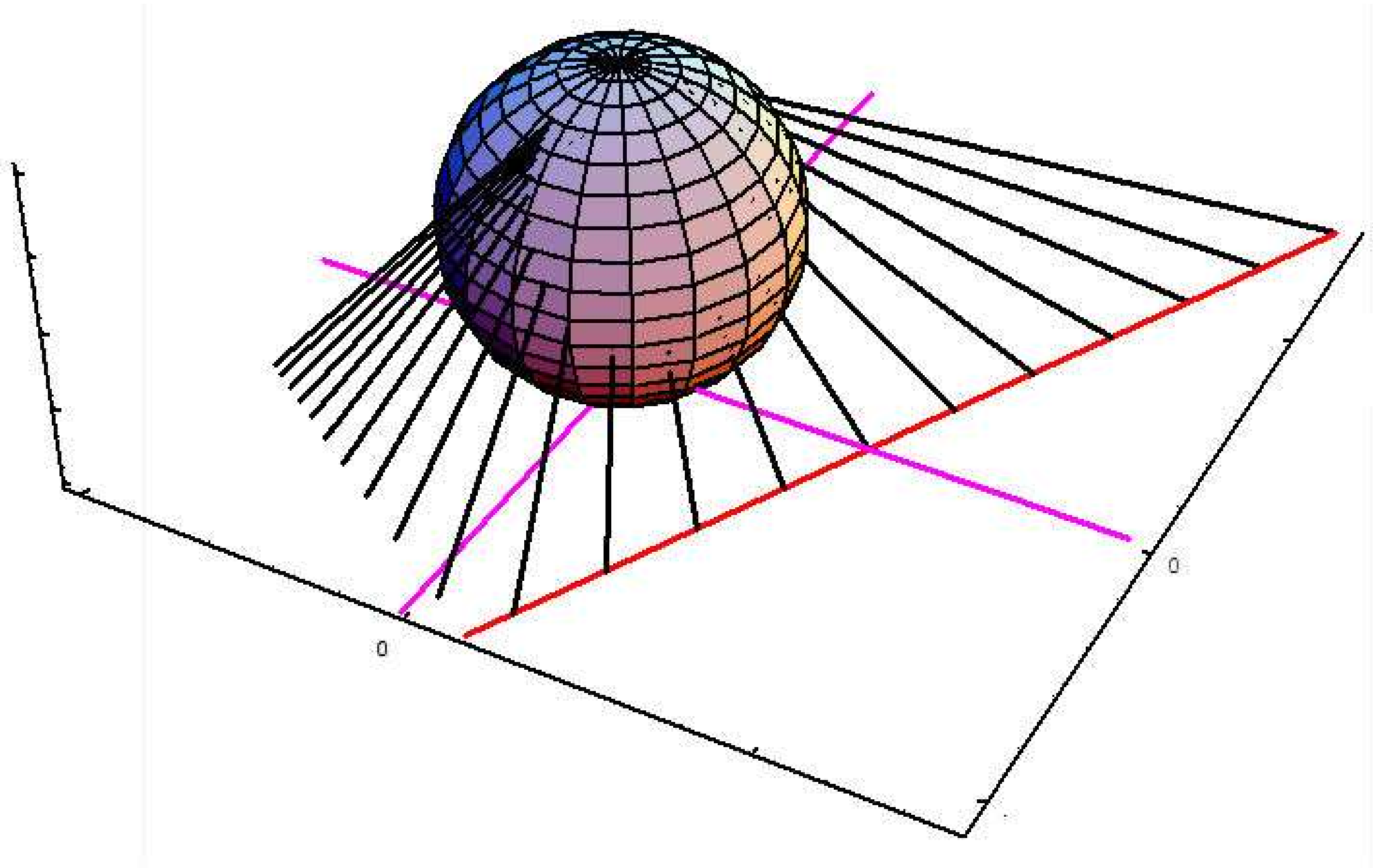
Dissertation 1851
„Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Größe“

Habilitationsschrift 1853
„Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“

ein halbes Jahr vor Gauß‘ Tod

Habilitationsvortrag 1854
“Die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen”.

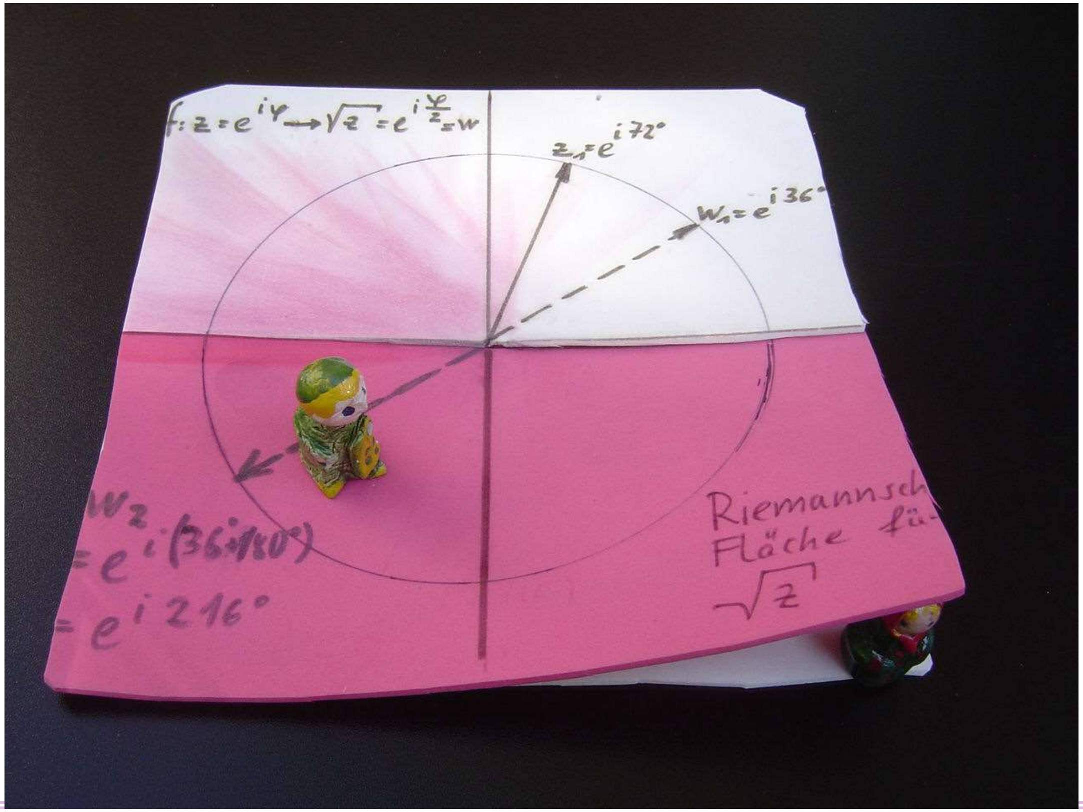
Phantasie und Riemannsche Zahlenkugel



Phantasie und Mathematik

Die Deutschaufsätze..... lassen jedoch Fülle des Inhalts und lebendigen Erguß der Phantasie vermißen.

Aus dem Abiturzeugnis



Riemannsche Fläche

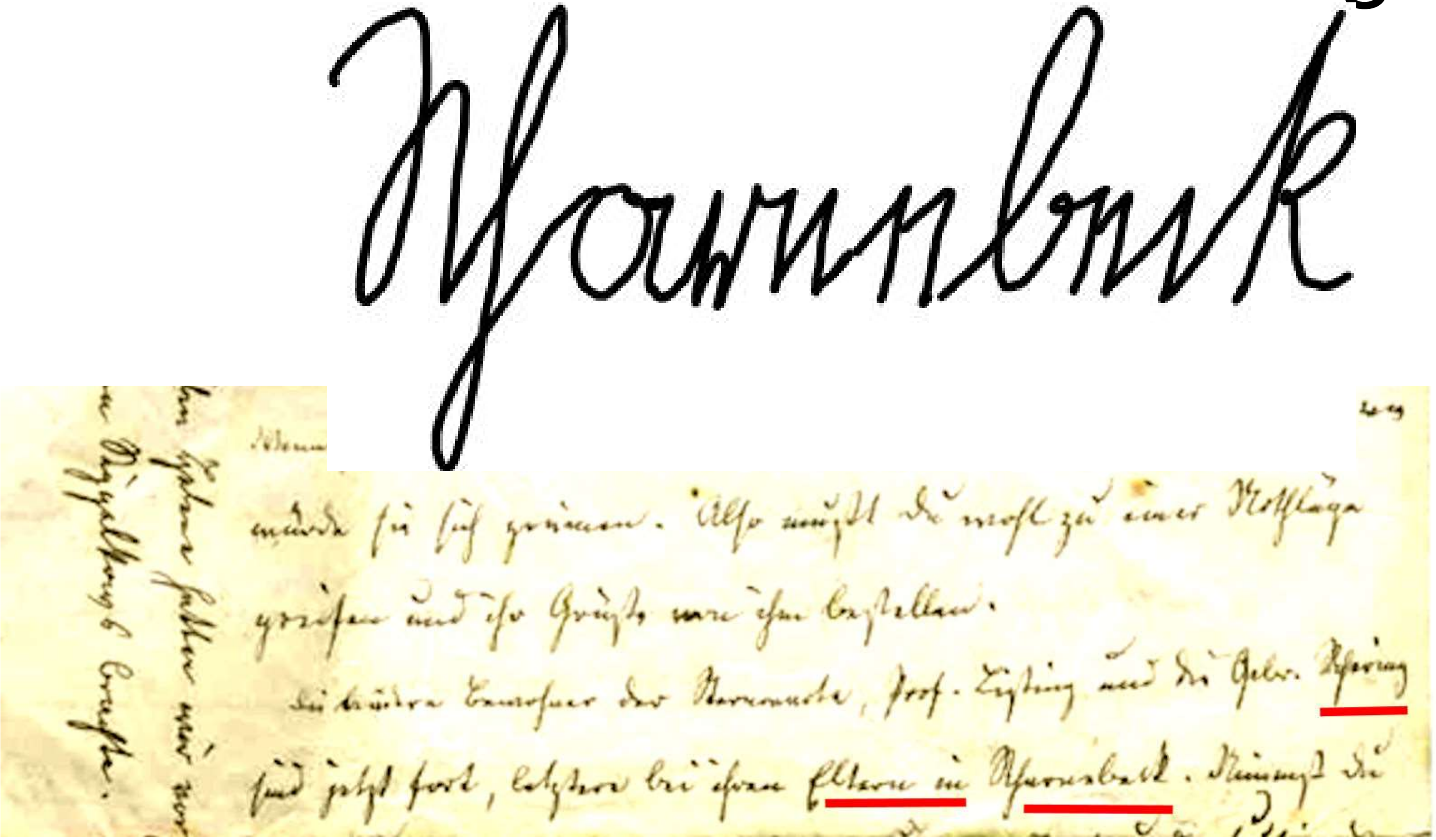
Fülle des Inhalts

Studium und Leben

1843	Tod der Mutter
1847 bis 1849	Zwei Jahre Student an der Universität Berlin
1849	April, Fortsetzung des Studiums an der Universität Göttingen
1851	16. Dezember, Promotion bei Gauß
1853	Dezember, Einreichung der Habilitationsschrift
1854	10. Juni, Vortrag im Habilitationskolloquium
1854	9. Oktober, erste Vorlesung
1855	Tod des Vaters und einer Schwester
1857	Ernennung zum außerordentlichen Professor
1857	Tod des Bruders und einer Schwester
1858	Die beiden Schwestern ziehen zu ihm

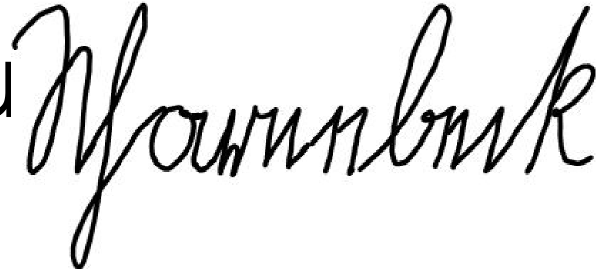
Riemann verliebt sich in Elise Koch,
eine Freundin seiner Schwestern.

Überraschender Bezug zu



Passage aus einem Brief vom 6.9.1861 an seine Verlobte Elise:

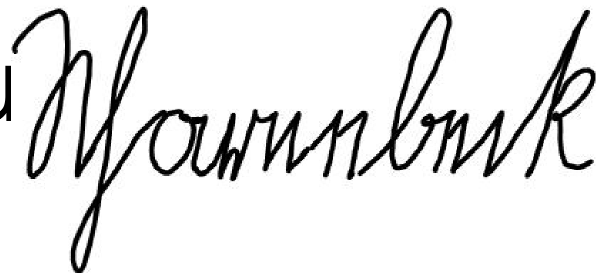
Die beiden Bewohner der Sternwarte, Prof. Lipting und die Gebr. Schering sind jetzt fort, letztere bei ihren Eltern in Scharnebeck.

Überraschender Bezug zu 

Forsthaus (ehemalige Oberförsterei) zu Scharnebeck.
(Amat.-Photographie von Otto Benecke-Harburg.)

Ernst Christian Julius
Schering
1833-1897

Familie des
Scharnebecker Oberförsters
E.C.A. Schering,
Er war erst in Bleckede, seit 1845
Föster in Scharnebeck.

Überraschender Bezug zu 

ERNST CHRISTIAN JULIUS SCHERING
GEB. 13. JULI 1833 , GEST. 2. NOV. 1897.

Ernst Christian Julius
Schering
1833-1897

Er war 7 Jahre jünger als Riemann, ging 1845-1850 auf das Realgymnasium Johanneum in Lüneburg.
Er verließ es nach der Unterprima mit „Fachhochschulreife“ und studierte am Polytechnikum Hannover.

Er studierte dann Mathematik und Astronomie in Göttingen, war ein enger Freund Riemanns. Nach Riemanns Tod bat er Seffer und Schmalfuß, die er wohl auch selbst gekannt hat, um die zitierten Briefe.
Er hielt 1866 eine Rede zum Gedächtnis an Riemann.

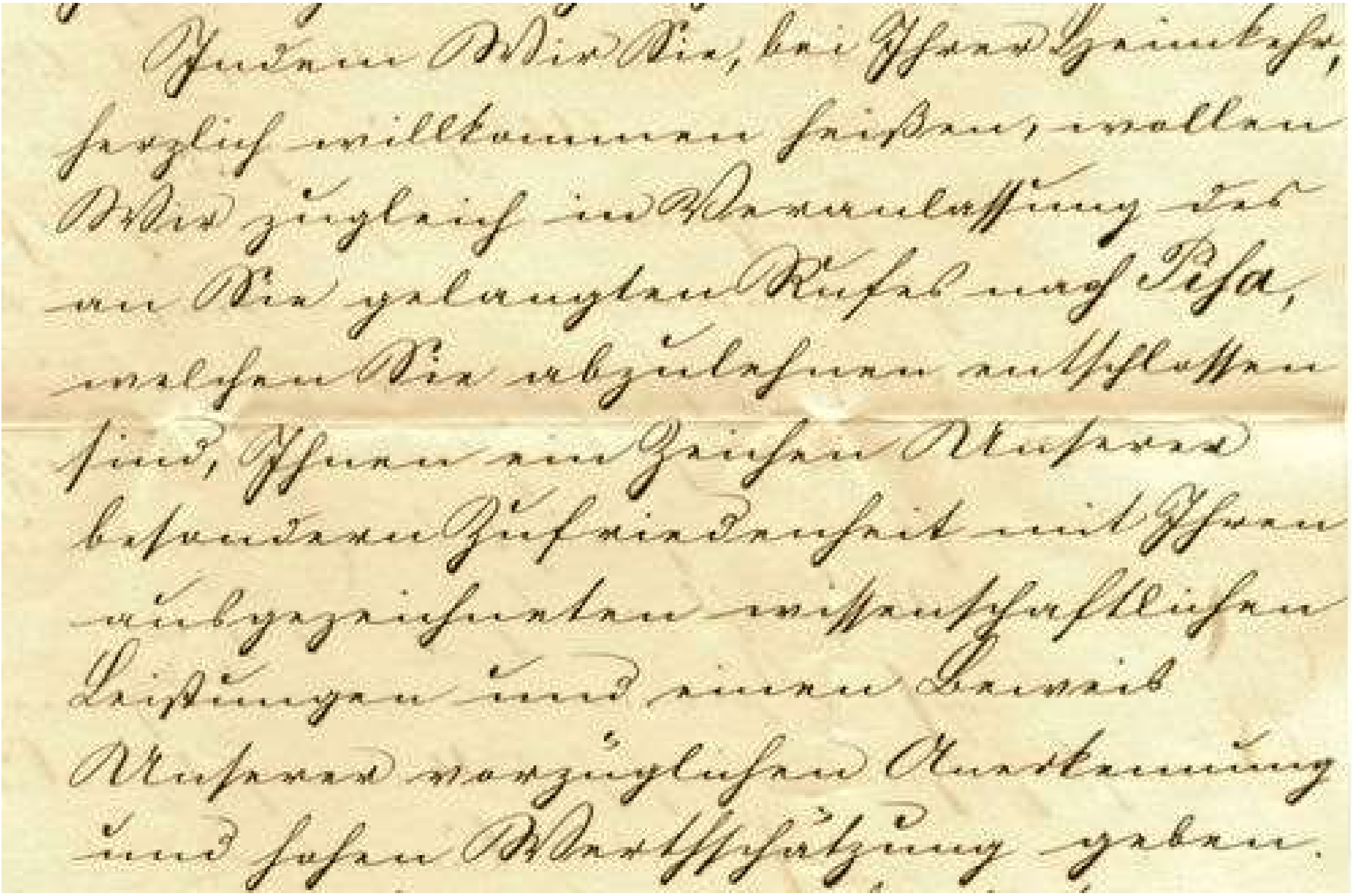
Wittmann, A.: *Ernst Christian Julius Schering (1833-1897). Ein Göttinger Sternwartendirektor aus Bleckede, herausgegeben von der Bürger-Stiftung .Stadt und Schloss Bleckede", Bleckede (2009).*

Anerkennung, Glück und Krankheit

1859	Ernennung zum ordentlichen Professor
1859	Wahl zum ordentlichen Mitglied der Gesellschaft der Wissenschaften u.a. Ehrungen in den folgenden Jahren
1862	3. Juni, Heirat im Alter von 35 Jahren
1862/63	November bis Juni, erster Aufenthalt in Italien

Seine schlechte Gesundheit, (Brustfellentzündung, Tuberkulose) machte diesen langen Aufenthalt nötig.
Er bekommt einen Ruf, als Professor nach Pisa zu gehen.

Honorenfakultät des Königreichs Hannover



Indem wir Sie, bei Ihrer Heimkehr,
herzlich willkommen heißen, wollen
wir zugleich in Veranlassung des
an Sie gelangten Rufes nach Pisa,
welchen Sie abzulehnen entschlossen
sind, Ihnen ein Zeichen unserer
besonderen Zufriedenheit mit Ihren
ausgezeichneten wissenschaftlichen
Leistungen und einen Beweis
unserer vorzüglichen Anerkennung
und hohen Werthschätzung geben.

Indem wir Sie bei Ihrer Heimkehr herzlich willkommen heißen, wollen wir zugleich in Veranlassung des an Sie gelangten Rufes nach Pisa, welchen Sie abzulehnen entschlossen sind, Ihnen ein Zeichen unserer besonderen Zufriedenheit mit Ihren ausgezeichneten wissenschaftlichen Leistungen und einen Beweis unserer vorzüglichen Anerkennung und hohen Wertschätzung geben.

sein Lebensende

1863	Geburt einer Tochter
1863	Tod der vorletzten Schwester
1863 bis 1865	August bis Oktober (1865), zweiter Aufenthalt in Italien
1866	Juni, dritte Reise nach Italien
1866	20. Juli, Riemann in Selasca am Lago Maggiore gestorben

Seine Frau Elise und die Tochter Ida

Etwa 1872, vor 140 Jahren

Im Sommer 2012 konnten wir uns freuen, einen Enkel von Ida, Herrn Dr. Thomas Schilling aus Hamburg, am Bernhard-Riemann-Gymnasium in Scharnebeck begrüßen zu dürfen.

Bernhard Riemann, Gesammelte Werke (neu 1990)

Narasimhan betont, ...daß diese Neuauflage von Riemanns Werken **nicht allein aus historischen Gründen** erfolgt ist. Hier liege der seltene Fall vor, daß das Werk eines Mathematikers über 100 Jahre nach seinem Tode noch in der originalen Form aktuell ist und **direkt weitere Forschungen anzuregen vermag**.

Obwohl in der Mathematik seitdem auch neue Perspektiven entwickelt wurden, haben Riemanns Ideen in erstaunlichen Grade dem Zahn der Zeit widerstanden und gelten in vielen Aspekten **nicht als überholt**.

Mathematik ist weltumspanned !

Ein **Inder**
gibt in **Chicago**
die Werke eines **d**
mit **deutschen** T
italienischen T
lateinischen T
letztere gericht e,
mit **englischer**

Sitz des Verlages:
Berlin, Heidelberg, Ne aris, Tokyo

Mathematik ist weltumspanned !

Ein **Inder**
gibt in **Chicago**
die Werke eines **deutschen** Mathematikers,
mit **deutschen** Texten
italienischen Tex
lateinischen Te
letztere gerich ademie,
mit **englisch**

Sitz des Verla
Berlin, Heidelb aris, Tokyo

Mathematatik ist weltumspanned !

Ein **Inder**
gibt in **Chicago**
die Werke eines **deutschen** Mathematikers,
mit **deutschen** Texten,
italienischen Texten,
lateinischen Texten,
letztere gerichtet an die **Französische** Akademie,
mit **englischen** Kommentaren heraus.

Sitz des Verlages:
Berlin, Heidelberg, New York,
London, Paris, Tokyo

Nachwort

Brief von Schmalfuß an
Prof. Schering nach Riemanns Tod

... daß ich Riemann mehr verdanke, als er mir.

... ich bedaure sehr, daß mir nichts geblieben ist, von der Sinnigkeit und Einfachheit seiner Beweisführungen und Formelentwicklungen.

Schon damals war er ein Mathematiker, neben dessen Vermögen der Lehrer sich arm fühlte....

Nachwort

Brief von Schmalfuß an
Prof. Schering nach Riemanns Tod

... Ich für meinen Theil habe es immer für ein großes Glück angesehen, daß ich einen solchen Schüler, wie Riemann, gehabt habe, und bin ihm heute noch für die vielfache Anregung, die er mir gegeben hat, und für die Freude, die ich an seiner wunderbaren Begabung und Entwickelung gehabt habe, für meine ganze Lebenszeit dankbar.

Fazit

Als Lehrer können wir uns der Verantwortung bewusst werden, die wir für die jungen Menschen tragen,
dass sie ihre Fähigkeiten entfalten
und ihre Schwächen bewältigen lernen.

Als Menschen, jung wie alt, können wir lernen, wie nötig es sein kann, mutig die lange begangenen Pfade zu verlassen
und wohlüberlegt und fundiert neue Perspektiven zu eröffnen.

$\int_a^b$

Bernhard Riemann

Vielen Dank

für Ihre

Aufmerksamkeit!