

# Polyeder und Polyedersatz Ja

Jun 11

EP  $e + f = k + 2$

[www.mathematik-verstehen.de](http://www.mathematik-verstehen.de)

Haftendorn

Polyeder hat Flächen: 3-Ecke, 4-Ecke... n-Ecke  
 ist von drei oder mehr Ecken zellen

jede Fläche hat mind. 3 Kanten  $\Rightarrow$   
 jede Kante zählt zu 2 Flächen.

" " " " " 3 Ecken  $\Rightarrow$   
 " " " " " 2 Ecken

$$\boxed{3f \leq 2k}$$

$$\boxed{3e \leq 2k}$$

für alle

(Graphen von) Polyedern

Definition: Ein Graph heißt platonisch

Wenn gilt:

1. planar
2. alle Ecken haben denselben Grad  $g$
3. " Flächen  $n$  Eckenzahl  $n$  mit  $n \geq 3$

Ein Körper heißt platonisch, wenn 2 und 3. gilt  
 und alle Längen der Kanten gleich sind.  
 " " Winkel in den Ecken "

Überlegungen zu platonischen Graphen

1. Alle Platonischen Körper haben platonischen Graphen. Nach 5. folgt nur Verformungen der P.K. bzw. P.G.
2. Es gilt  $e \cdot g = 2k$  und 3.  $f \cdot n = 2k$
4. Der EP muss gelten also  $e + f = k + 2$
5. Nun  $e$  und  $f$  eliminieren  $\Rightarrow$

$$\frac{2k}{g} + \frac{2k}{n} = k + 2 \quad | : 2k \Rightarrow \boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2}}$$

Es folgt  $\frac{1}{g} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$  da  $\frac{1}{k} > 0$  für platonische Graphen.

$g$	$n$	$\frac{1}{g} + \frac{1}{n}$	$= \frac{g+n}{g \cdot n}$	$> \frac{1}{2}$	
3	3	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$= \frac{3+3}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$	$> \frac{1}{2}$	Tetraeder
3	4	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$	$= \frac{3+4}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12}$	$> \frac{1}{2}$	Würfel = Hexaeder
3	5	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$	$= \frac{3+5}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$	$> \frac{1}{2}$	Dodekaeder
3	6	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$	$= \frac{3+6}{3 \cdot 6} = \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$	Oktaeder
4	3	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$	$= \frac{4+3}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12}$	$> \frac{1}{2}$	
5	3	$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$	$= \frac{5+3}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$	$> \frac{1}{2}$	
6	3	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$	$= \frac{6+3}{6 \cdot 3} = \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$	Icosaeder