In dem grundlegenden Zahlentheoriebuch von Hasse (1898-1979) ist im Inhaltsverzeichnis der Liebe Gott als mathematischer Autor aufgeführt. Sieht man auf Seite 3 nach, so liest man: “Die natürlichen Zahlen haben wir vom Lieben Gott”. Andere Mathematiker haben eine axiomatische Definition den natürlichen Zahlen gegeben (Peano-Axiome) oder eine Fundierung durch eine “Nachfolgerfunktion” vorgeschlagen. Wir folgen Hasse und gehen davon aus, dass wir sie recht gut kennen. Lediglich heben wir hervor:

Prinzip vom minimalen Element: Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element. Übrigens hat sie nicht unbedingt ein größtes Element. Die Bruchzahlen aber z.B. haben Teilmengen ohne kleinstes Element.

Grundlegendes zur Teilbarkeit

Def.: $a,b \in \mathbb{Z}$ Man sagt: **a teilt b** genau dann, wenn es eine ganze Zahl q gibt, so dass das q-fache von a die Zahl b ergibt. Kurz: $a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}: \quad b = q \cdot a$

$15 \mid 165 \Leftrightarrow \exists\, 11 \in \mathbb{Z} : 165 = 11 \cdot 15$, oder auch $165 : 15 = 11$ ohne Rest.

ebenso $-3 \mid 15$, $-3 \mid -15$, aber $3 \nmid 55$. Es gilt $a \nmid (a+1)$ für $a \neq 1$.

Man kann sich für $a \mid b$ auch vorstellen, dass eine Länge b in Stücke der Länge a genau aufgeteilt werden kann, oder dass b Stifte ohne Rest in Päckchen zu a Stück verpackt werden können. So lassen sich viele Aussagen der elementaren Zahlentheorie gut verstehen. Der Vorteil algebraischer Beweise liegt einmal darin, dass die Aussagen dann auch für negative Zahlen gelten, zum anderen bleibt es ja nicht allein bei diesen Grundlagen. Als Lehrer aber sollte man nie so tun, als “müsse” man die einfachsten Dinge “beweisen”. Da mit $a \mid b$ auch $a \mid -b$, $-a \mid b$ und $-a \mid -b$ gilt, reicht es nämlich doch, bei Teilbarkeitsfragen vor allem für natürliche Zahlen zu betrachten. Man mache sich das Folgende also klar:

$(a \mid v \;\; und \;\; a \mid w) \Rightarrow a \mid (v+w)$ und $(a \mid v \;\; und \;\; a \mid w) \Rightarrow a \mid (v-w)$

aber $a \mid (v+w) \not\Rightarrow (a \mid v \;\; und \;\; a \mid w)$. In Worten: Wenn a zwei Zahlen teilt, dann teilt a auch deren Summe und deren Differenz. Das gilt aber nicht umgekehrt. Auch dafür mache man sich Beispiele. $7 \mid (15+6) \not\Rightarrow (a \mid 15 \;\; und \;\; a \mid 6)$

Algebraischer Beweis für die erste Behauptung.

$(a \mid v \;\; und \;\; a \mid w) \Rightarrow \exists q, p : v = qa \wedge w = pa \Rightarrow v + w = qa + pa = (q+p)a \quad mit \ (q+p) \in \mathbb{Z}$ q.e.d.

Satz von der Division mit Rest:

Seien a und b positive natürliche Zahlen mit $a < b$. Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q und r mit $b = q \cdot a + r \;\; mit \;\; 0 \le r < a$.

r heißt “Rest, den b beim Teilen durch a lässt.”

Später schreiben wir $b = r \;\; \mathbf{mod} \;\; a$ oder $b \underset{a}{\equiv} r$ lies: b = r modulo a .

Man kann sich den Sachverhalt leicht am Zahlenstrahl klar machen.

Der Satz gilt sogar auch für ganzzahlige a und b, mit $a \neq 0 \;\; und \;\; 0 \le r < |a|$.

$15 < 55 \Rightarrow 55 = 3 \cdot 15 + 10$, aber auch $a = 15; b = -27 \Rightarrow -27 = -2 \cdot 15 + 3$