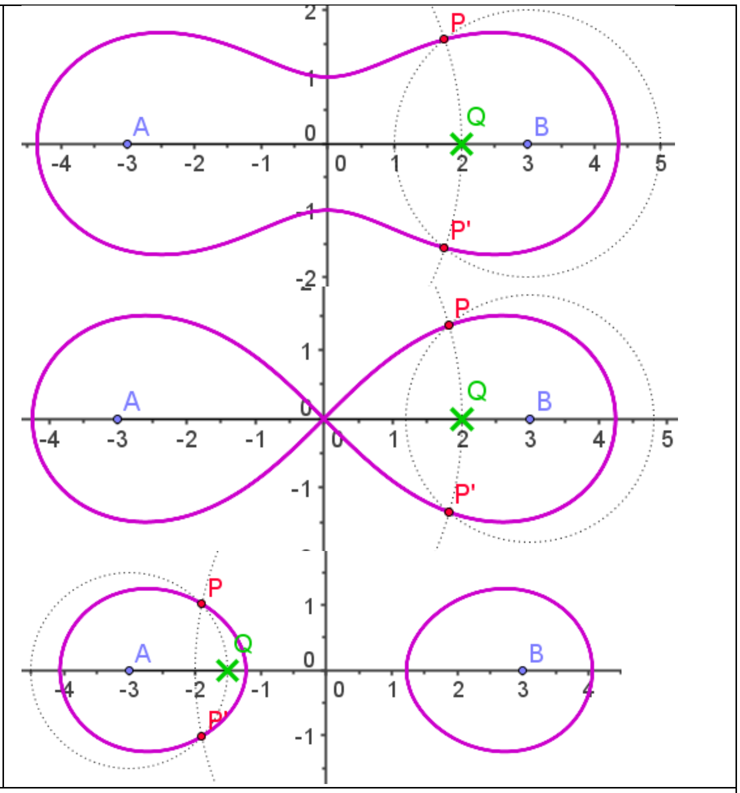
Cassini-Kurven

Die Cassinischen Kurven sind die Ortskurven aller Punkte, die von zwei festen Punkten (hier A und B) mit dem Abstand 2 e das konstante Abstandsprodukt k haben.

Aufgaben:

Bei allen Kurven rechts sind A und B mit ganzzahligen Koordinaten abzulesen.

1) Auf der ersten Kurve liegen wirklich die Punkte (0, 1) und (0,-1). Bestimmen Sie allein daraus das k, für das diese Cassini-Kurve gezeichnet ist.
2) Die zweite Kurve heißt **Cassini-Lemniskate**. Bestimmen Sie ebenso k.
3) Bei der dritten Kurve ist $k = 7{,}5$. Q ist an der Stelle x=-1,5 auf der x-Achse. Welche Koordinaten hat P?
4) Leiten Sie eine implizite kartesische Gleichung für alle Cassini-Kurven mit e und k her.
5) Bestimmen Sie allgemein die Schnitte mit den Achsen und klassifizieren Sie damit die vorkommenden Typen.



Zur Übung:

Unten sehen Sie die Herleitung zu 4.) und zwei Umformungen der zuerst erhaltenen Gleichung. Machen Sie sich klar, was die einzelnen Zeilen bedeuten. Geben Sie diese Gleichungen in GeoGebra ein und überzeugen Sie sich, dass Sie stets dieselbe Kurve erkalten. Formen Sie selbst um in eine Gleichungsform, die Ihnen gefällt und testen Sie diese. Weiter sehen Sie die rechnerischen Lösungen von 5). Überprüfen Sie die Egebnisse aus 1) bis 3) rechnerisch und (mit Schieberegern) auch in GeoGebra. Beachten Sie, dass Sie 1) bis 3) ohne die Kenntnis von 4) und 5) lösen sollen.

$L_1 \cdot L_2 = k$ ①

$L_1^2 = (x+e)^2 + y^2$ ②

$L_2^2 = (x-e)^2 + y^2$ ③

$L_1^2 \cdot L_2^2 = k^2$ aus ① darein ②,③

$((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2) = k^2$ $\boxed{1}$

Implizite kartesische Gleichung

mit Auflösen:

$(x+e)^2(x-e)^2 + y^2((x+e)^2 + (x-e)^2) + y^4 = k^2$

$(x^2-e^2)^2 + y^2(2x^2+2e^2) = k^2 - y^4$

$(x^2-e^2)^2 + 2y^2(x^2+e^2) = k^2 - y^4$ $\boxed{2}$

weitere Gestalt: $(x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) = k^2 - e^4$ $\boxed{3}$

Schnitte mit x-Achse: $y=0$

in $\boxed{1}$: $(x+e)^2 \cdot (x-e)^2 = k^2$ $|\sqrt{\ }$

$x^2 - e^2 = \pm k$

$x = e^2 \pm k$ $|e=3$

Schnitte mit y-Achse: $x=0$

$(e^2+y^2)^2 = k^2$ $|\sqrt{\ }$

$y^2 = \pm k - e^2$ ⊖ keine Lösung

$y = \pm\sqrt{k-e^2}$

nur existent für $k \geq e^2$

$k = e^2 \Rightarrow y = 0$ siehe Lemniskate