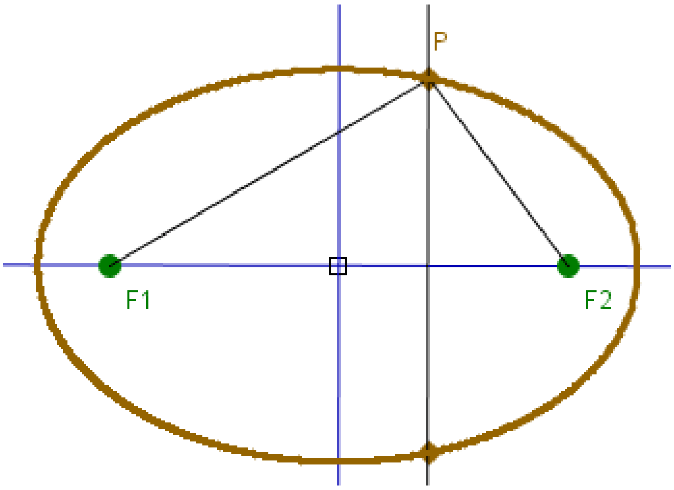
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 6. November 2002



P ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei festen Punkten eine konstante Abstandssumme haben.

Behauptung:
Die Ortskurve ist eine Ellipse

Beweis:
Bekannt sei: Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mit der großen Halbachse a und der kleiner Halbachse b. Diese Gleichung ist herzuleiten.
Legt man p auf die x-Achse, so sieht man $Faden = 2a$.

Dann gilt also nach Konstruktion $L_1+L_2=2a \quad \langle 1\rangle$.

Pythagoras liefert $L_1{}^2=y^2+(x+e)^2 \quad \langle 2\rangle$ mit $e=\overline{OF}_2$.

Ebenso $L_2{}^2=y^2+(x-e)^2 \quad \langle 3\rangle$

Subtraktion $L_1{}^2-L_2{}^2=4xe \quad \langle 4\rangle=\langle 2\rangle-\langle 3\rangle$

3. Binom.F. $(L_1-L_2)(L_1+L_2)=4xe \quad \langle 4\rangle$

Division und $\langle 1\rangle \Rightarrow \quad (L_1-L_2)=\frac{2xe}{a} \quad \langle 5\rangle$

Addition zu $\langle 1\rangle \Rightarrow \quad 2L_1 = 2a + \frac{2xe}{a} \quad \langle 6\rangle$

Quadriert $\frac{\langle 6\rangle^2}{4} \Rightarrow \quad L_1{}^2 = a^2 + 2xe + \frac{x^2e^2}{a^2} \quad \langle 6'\rangle$

In $\langle 2\rangle \Rightarrow \quad a^2 + 2xe + \frac{x^2e^2}{a^2} = y^2+(x+e)^2 \quad \langle 7\rangle$

Sortieren $x^2(1-\frac{e^2}{a^2})+y^2=a^2-e^2 \quad \langle 7'\rangle$

Mit $b^2:=a^2-e^2 \quad \langle 8\rangle$ folgt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \langle 7''\rangle$

Gleichung $\langle 8\rangle$ ist auch unmittelbar einsichtig. q.e.d.

Also ergibt sich aus der Gärtnerkonstruktion die Ellipsengleichung, damit ist die Bezeichnung “Gärtnerellipse” oder “Fadenkonstruktion der Ellipse” gerechtfertigt.