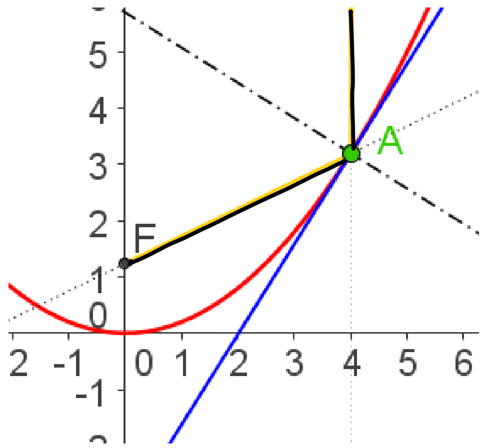
Parabel-Reflexion beobachten

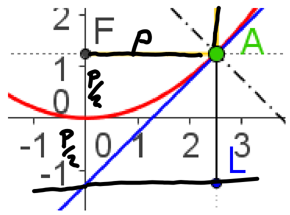


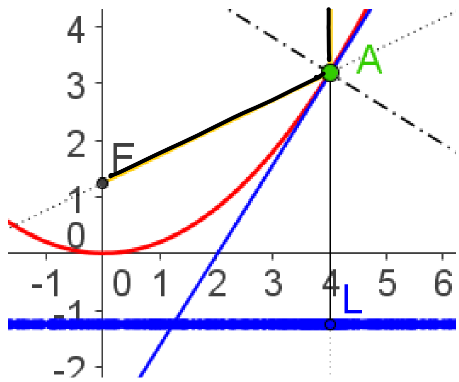
Konstruktionsbeschreibung

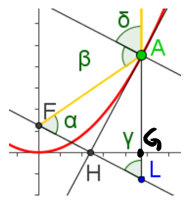
1. Gegeben ist eine Parabel und ein Punkt A auf ihr.
2. Erzeuge die Tangente in A an die Parabel mit deinem Werkzeug. z.B. tangente[A,f] in GeoGebra
3. Errichte in A die Senkrechte auf der Tangente.
4. Die Parallele zur y-Achse durch A soll den einfallenden Lichtstrahl tragen.
5. Spiegele sie an der Senkrechten aus 3. Das ist der weitergehende Strahl.
6. Schalte für diesen Strahl die Spur ein und bewege A. Beobachte!
7. Hebe das Besondere durch einen Punkt hervor und formuliere eine Behauptung.

Weiterführung:

8. Spiegele die Strecke FA an der Tangente, Ihr Bild sei LA.
9. Beobachte, dass AL stets senkrecht zur x-Achse ist.
10. Beobachte, dass L stets auf einer Parallelen zu x-Achse wandert. Diese Ortslinie heißt Leitgerade der Parabel.
11. Der Abstand FA in der rechts gezeigten besonderen Stellung wird "Halbparameter p" genannt.
12. Erkunde die Zusammenhänge der Lage von F und der Leitgeraden und der Größe des Stauchfaktor a der Parabel mit dem Halbparameter p.
13. Namen: F heißt "Brennpunkt" der Parabel, 2p heißt die "Sperrung" der Parabel.
14. Informiere dich auf der Website über das "Namensgeheimnis" der Parabel. Warum heißt die Parabel eigentlich Parabel?







Beweis zu 9.: Wegen der Spiegelung ist FL senkrecht zur Tangente und damit parallel zum Einfallslot aus 3. Damit kommen Einfalls- und Ausfallswinkel als Stufen- bzw. Wechselwinkel im gleichschenkligen Dreieck FLA als Basiswinkel vor. H halbiert FL, damit sind F und L gleichweit von der x-Achse entfernt. H hat die halbe Abszisse von A.

Ergebnisse zu 12.: Üblicherweise ist p der Abstand von F und A in der Sonderstellung, dass A dieselbe Ordinate wie F hat. Dann hat F die Ordinate p/2. Für die Parabel $y=a\,x^2$, die an der Stelle p der Wert p/2 hat, muss gelten: $p/2 = a\,p^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2p}$ also $2py = x^2$

Beweis von7: Dass nämlich alle Strahlen die y-Achse in demselben F treffen. Sei f die Ordinate eines F^*. In der rechten Skizze bildet der Ursprung mit F^* und H ein Dreieck, zum dem das Dreieck HAG ähnlich ist. H hat die halbe Abszisse von A, wie oben gezeigt. Damit gilt :

$$f : \frac{x}{2} = \frac{x}{2} : y \;\wedge\; y = \frac{x^2}{2p} \Rightarrow f = \frac{x^2}{4} : \frac{x^2}{2p} = \frac{p}{2}$$

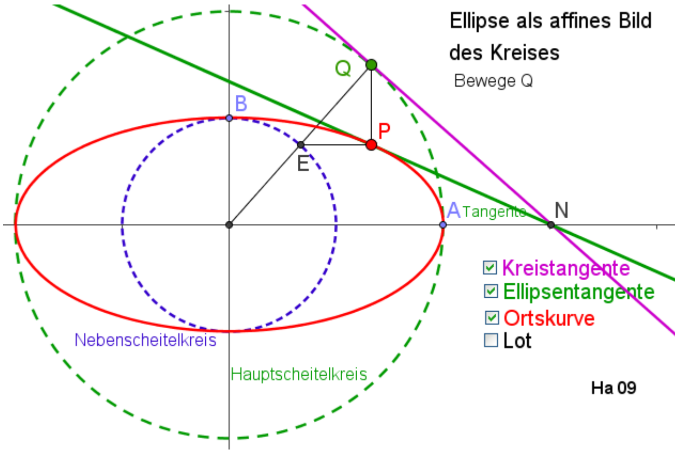
Also verlaufen alle Strahlen durch denselben Punkt F.

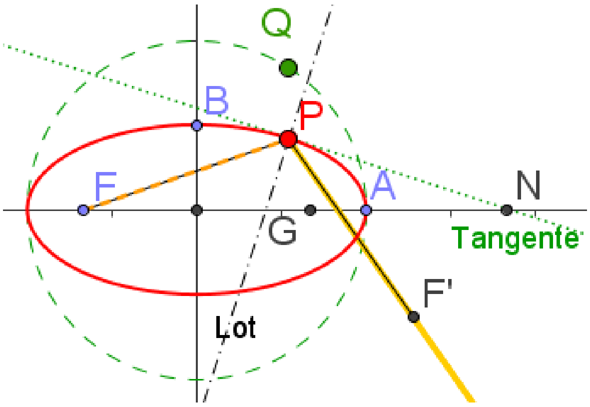
Beweis zu 10.: Da nun F fest ist, H immer auf der x-Achse liegt und L der Spiegelpunkt von F ist, hat L immer dieselbe Ordinate, nämlich –p/2.

Anmerkung: Hier wird von der Parabel ausgegangen, die Reflexion beobachtet und Leitgerade als Ortslinie erzeugt und nachgewiesen. Dabei wurde auch bewiesen, dass F wirklich der gemeinsame Schnittpunkt aller reflektierten Strahlen ist. Es wird seit der Antike (Apollonius) anders herum definiert: **Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte , die von einem festen Punkt F und einer "Leitgeraden" g den gleichen Abstand haben.** Dann sind der Halbparameter p und der Abstand von F und g per definitionem gleich und die Scheiteltangente halbiert diesen Abstand. Die Mittelsenkrechte FL ist stellt sich dann stets als Tangente heraus, die Winkelaussagen aus Beweis zu 9. gelten ebenso und damit ist dann die Reflexion bewiesen. Siehe dazu eine Extraseite.

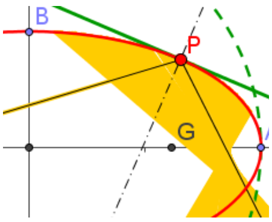
Ellipse und Reflexion, eine Erkundung

Wenn man die Ellipse aus der Stauchung des Hauptscheitelkreises konstruiert, kann man leicht zum Ort von P auch die Tangente von P erhalten.
Durch sie kann man für Reflexionen von Strahlen in P das Einfallslot konstruieren.

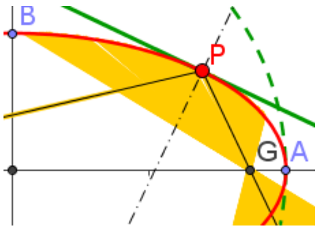




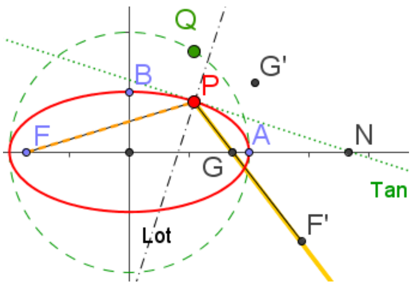
Wir wählen einen Punkt F auf der x-Achse, von dem aus ein Strahl in P reflektiert wird. G ist der bezüglich der Ellipse zu F symmetrische Punkt. I.A. verläuft der reflektierte Strahl nicht durch G.



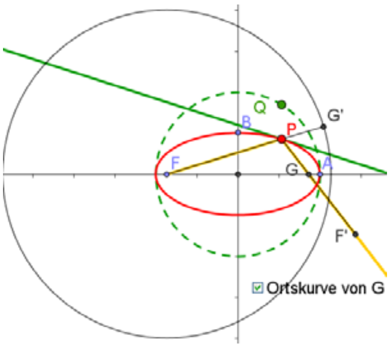
Beobachten wir nun, wie sich die reflektierten Strahlen verhalten, wenn P auf der Ellipse wandert. Letzteres erreicht man durch Ziehen an Q.
Die Strahlen werden nicht gebündelt.
Ziehen wir nun F so, dass der refklektierte Stahl durch G verläuft, dann tritt die Bündelung



in G ein. Alle Strahlen, die von F ausgehen, werden nach G reflektiert. Darum heißen F und G die **Brennpunkte der Ellipse**.



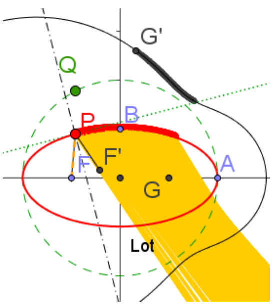
Bei der Parabel haben wir durch Spiegelung des Brennpunktes an der Tangente die Leitgerade gefunden. Sie war der geometrische Ort dieses Spiegelpunktes.
Daher spiegeln wir nun den Brennpunkt G an der Tangente und erkunden den Ort von G'.

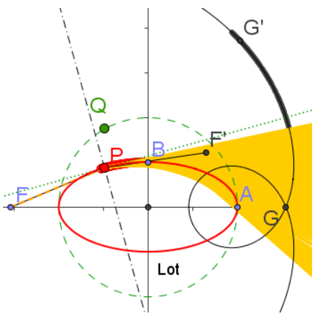


Erstaunlicherweise ist der Ort von g' ein Kreis, er heißt der

Leitkreis der Ellipse.

Er hat sich hier durch Beobachtung ergeben und ist streng genommen noch nicht bewiesen. Setzen wir aber die Fadenkonstruktion der Ellipse als bewiesen voraus, dann ist alles klar: Wenn FP+FG konstant ist, dann ist auch FP+PG' konstant. Daher liegt G' auf einem Kreis um F und der Leitkreis ist nachgewiesen. Auch hier kann man umgekehrt aus dem Leitkreis die Ellipse konstruieren.





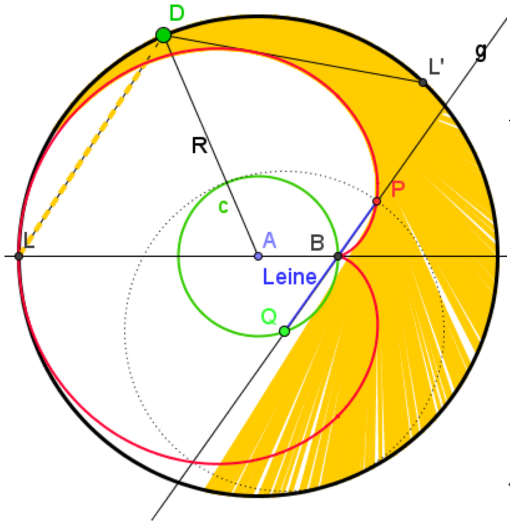
Die Ortskurve von G bleibt kein Kreis, wenn wir wieder falsche Stellungen für F wählen, bei denen der reflektierte Strahl nicht G trifft.

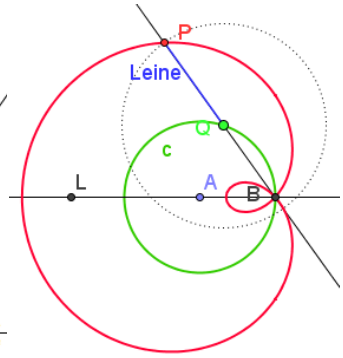
Anmerkung zu alterativem Vorgehen:

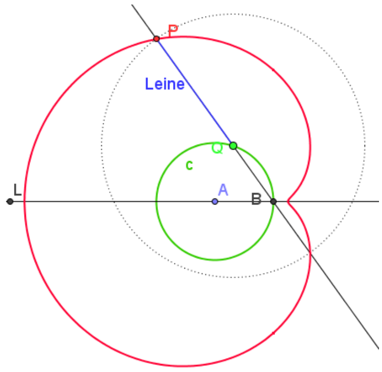
Aus der Fadenkonstruktion folgt die Leitkreiskonstruktion, bei der man P aus dem Schnitt der Mittelsenkrechten von G und G' mit dem Radius FG' erhält. Hieraus folgt die Reflexionseigenschaft sofort. Allerdings ist dann das Vorgehen nicht wie bei der Parabel und es ist nicht geeignet für das Erkunden.

Kardioide und Reflexion

Pascalsche Schnecken entstehen als Konchoiden, wenn Q auf einem Kreis wandert, der "Baum" auf dem Kreisrand liegt . Wenn die Leine die Länge des Durchmessers hat, entsteht die Kardioide.

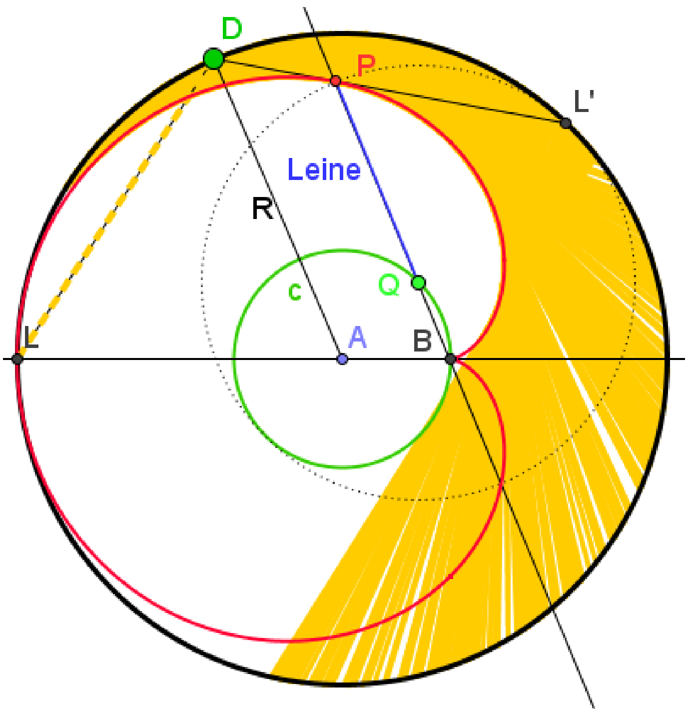


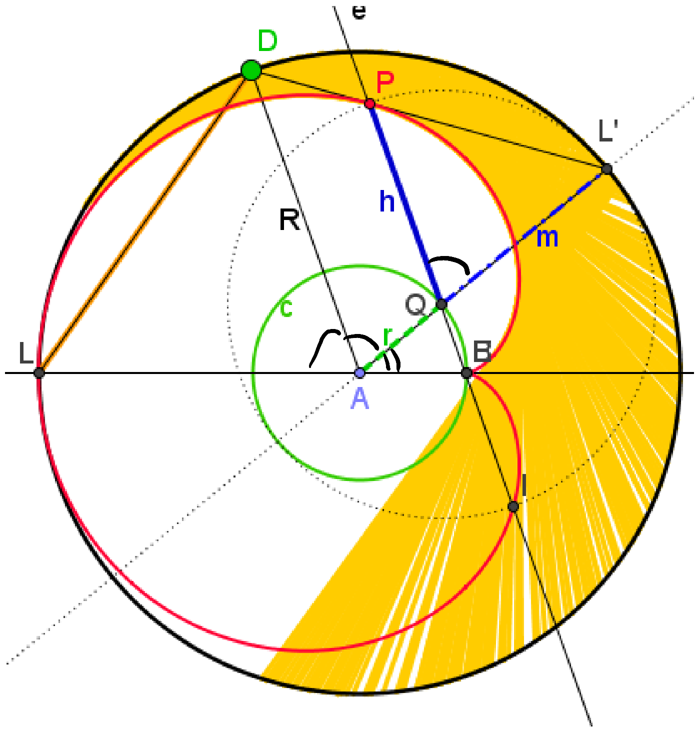




Andererseits entsteht die Kardiodie als Hüllkurve von Reflektionsstrahlen, also als **Katakaustik.** L ist die Lichtquelle, der Strahl von L nach D wird nach L' reflektiert.
In GeoGebra entsteht das gelbe Gebiet als Spur von DL'. Es passt genau zu der von P erzeugten Kardioide.

Inspiration zu einem Beweis:





Beim Ziehen merkt man, dass eine Parallele zum Radius DA entsteht, wenn man Q so zieht, dass P der Berührpunkt der Strahltangente wird. BEWEIS: Rechts ist nun Q nicht mehr frei sondern folgendermaßen konstruiert: L'A schneidet den Kreis c in Q. In Q wird die Parallele zu R=DA konstruiert, die beim Schnitt mit DL' P bestimmt. Stets gilt m=R-r, also ist m konstant. Dreieck L'DA ist gleichschenklig mit Basis L'D. also ist Dreieck L'PQ gleichschenklig mit Basis L'P. Damit ist auch h in jeder Stellung gleich lang, kann also die Leine bei der Kardioidenkonstruktionen sein.
Im gepunkteten Leinenkreis sind m,h,Ql der Durchmesser von Q durch A alle gleich lang und stets 2r. Nun bleibt zu zeigen, dass Gerade QP durch B verläuft, wenn B definiert ist als Schnitt von Kreis c und der Achse AL: die beiden eingestrichenen Winkel bei A sind gleich groß, da DA Spiegelachse ist. Dreieck BQA ist gleichschenklig mit Basis QB. Daher müssen die eingestrichenen Winkel die Basiswinkel sein. Dann hat aber QB auch die Richtung von QP. Also ist Q der Wanderpunkt für die Kardioide mit der Leinenlänge h=2r. Q.e.d.

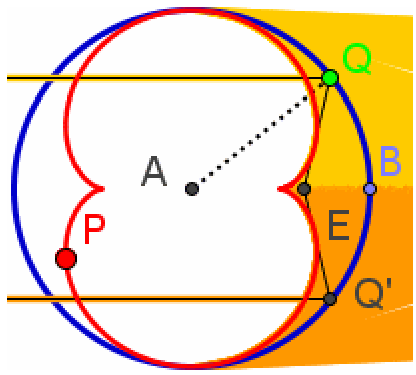
Kaustiken und Katakaustiken

Wird parallel einfallendes Licht an einer Kurve reflektiert, dann heißt die Hüllkurve der reflektierten Lichtstahlen **Kaustik.**
Ist die Lichtquelle punktförmig, spricht man von **Katakaustik.**

Hat die reflektierende Kurve die Gleichung $a(t)=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ und fallen die Strahlen parallel zur x-Achse ein, dann hat die Kaustik die Gleichung

$$k(t)=a(t)+\frac{\dot{v}}{\dot{u}\ddot{v}-\ddot{u}\dot{v}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\dot{u}^2-\dot{v}^2\right) \\ \dot{u}\dot{v} \end{pmatrix}$$

Quelle: Spektrum-Lexikon: Kaustik, allerdings ist da die Formel falsch. Es steht dort in der y-Koordinate fälschlich der Faktor 2.



Für die Nephroide fällt hier das Licht achsenparallel von links auf den innen verspiegelten Kreis
(Genaugenommen ist es hier ein halbdurchlässiger Spiegel, denn die reflektierten Strahlen sind bei Ihrem Auftreffen auf den Kreis nicht gestoppt.)

Es gilt $a(t)=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$ und damit

$$k(t)=a(t)+\frac{cos(t)}{1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(sin(t)^2-cos(t)^2\right) \\ cos(t)sin(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cos(t)-\frac{1}{2}cos(t)cos(2t) \\ sin(t)-\frac{1}{2}cos(t)sin(2t) \end{pmatrix}$$

Diese wahrhaft schöne Formel hat obigem Bild die rote Kurve genau passend erzeugt.
Im Spektrum-Lexikon fehlte unten die Halbierung.
GeoGebra-Datei hierzu in www.mathematik-verstehen.de Bereich Kurven → Reflexion