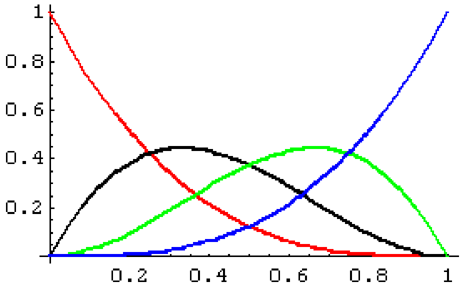
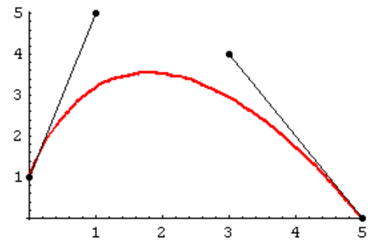
Lineare Algebra Bernsteinpolynome

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg LBS **Beispiel für eine andere Basis** 23. November 1999/02

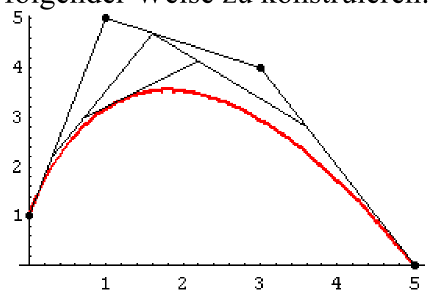


$$B_0(t) = (1-t)^3$$
$$B_1(t) = 3(1-t)^2 t$$
$$B_2(t) = 3(1-t)t^2$$
$$B_3(t) = t^3$$

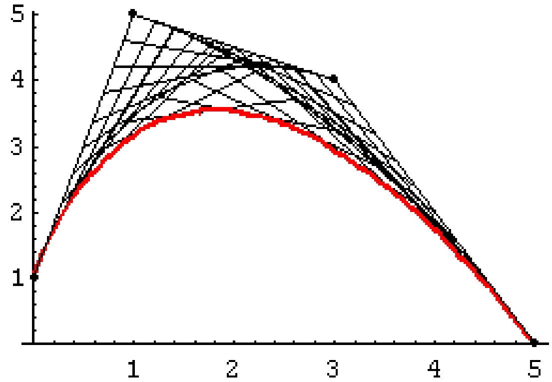


Die Bernsteinpolynome dritten Grades bilden eine Basis im Vektorraum der Polynome 3. Grades. Sie sind über dem Intervall [0/1] definiert. Ihre praktische Bedeutung liegt in der bequemen Berechnung der Bezierkurve. Diese kommt in allen Graphikprogrammen vor, die ein "Kurvenwerkzeug" bieten. Gegen sind zwei Punkte P_0 und P_3, durch die die Kurve verlaufen soll, und zwei weitere Punkte P_1 und P_2, die "Tangentenvektoren" markieren. Die Beziérkurve ist nun in folgender Weise zu konstruieren:

> Es werden die Steuerpunkte durch Strecken verbunden und ein Teilungsfaktor t gewählt. Die entsprechenden Teilungspunkte werden wieder durch Strecken verbunden. Diese werden wieder geteilt und verbunden. P sei der Teilungspunkt dieser letzten Strecke. Die Bezierkurve ist der geometrische Ort von P, wenn der Teilungsfaktor t von 0 bis 1 läuft.



Die Parameterdarstellung der Beziérkurve ergibt sich sofort aus den Koordinaten der "Steuerpunkte"



$$x(t) = x_0 B_0(t) + x_1 B_1(t) + x_2 B_2(t) + x_3 B_3(t)$$
$$y(t) = y_0 B_0(t) + y_1 B_1(t) + y_2 B_2(t) + y_3 B_3(t)$$

Dieses kann man zeigen, indem man mit Strahlensatzfiguren die Koordinaten der sechs Teilungspunkte in Abhängigkeit von den Steuerpunkten und t aufschreibt und dann passend eliminiert.

In dem Sonderfall, dass $x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{3},\quad x_2 = \frac{2}{3},\quad x_3 = 1$ ist, wird

x(t)=t und die Beziérkurve damit folgendes Polynom $y(x) = y_0 B_0(x) + y_1 B_1(x) + y_2 B_2(x) + y_3 B_3(x)$