frei verformbare Parabel

Lagrange-ti.pdf Nov. 2012

Polynomräume **VP2 Raum der Polynome bis zum 2. Grad**

Prof Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition einer Parabel, die durch 3 frei ziehbare Punkte verläuft.

Lagrange−Interpolation Ausgangssituation A=[1,2]; B=[3,5]; C=[4,3]

apx **bpx**:=3 **cpx**:=4 Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen

apy **bpy**:=5 **cpy**:=3 ist auf Seite 2 des nächsten Problems beschrieben.

$\mathbf{la1}(x):=(x-\mathbf{bpx})\cdot(x-\mathbf{cpx})$ ▸ *Fertig* $\mathbf{la1}(x)$ ▸ $(x-4)\cdot(x-3)$ $\mathbf{c1}:=\frac{\mathbf{apy}}{\mathbf{la1}(\mathbf{apx})}$ ▸ $\frac{1}{3}$

$la2(x):=(x-\mathbf{apx})(x-\mathbf{cpx})$ ▸ *Fertig* $\mathbf{la2}(x)$ ▸ $(x-4)\cdot(x-1)$ $\mathbf{c2}:=\frac{\mathbf{bpy}}{\mathbf{la2}(\mathbf{bpx})}$ ▸ $\frac{-5}{2}$

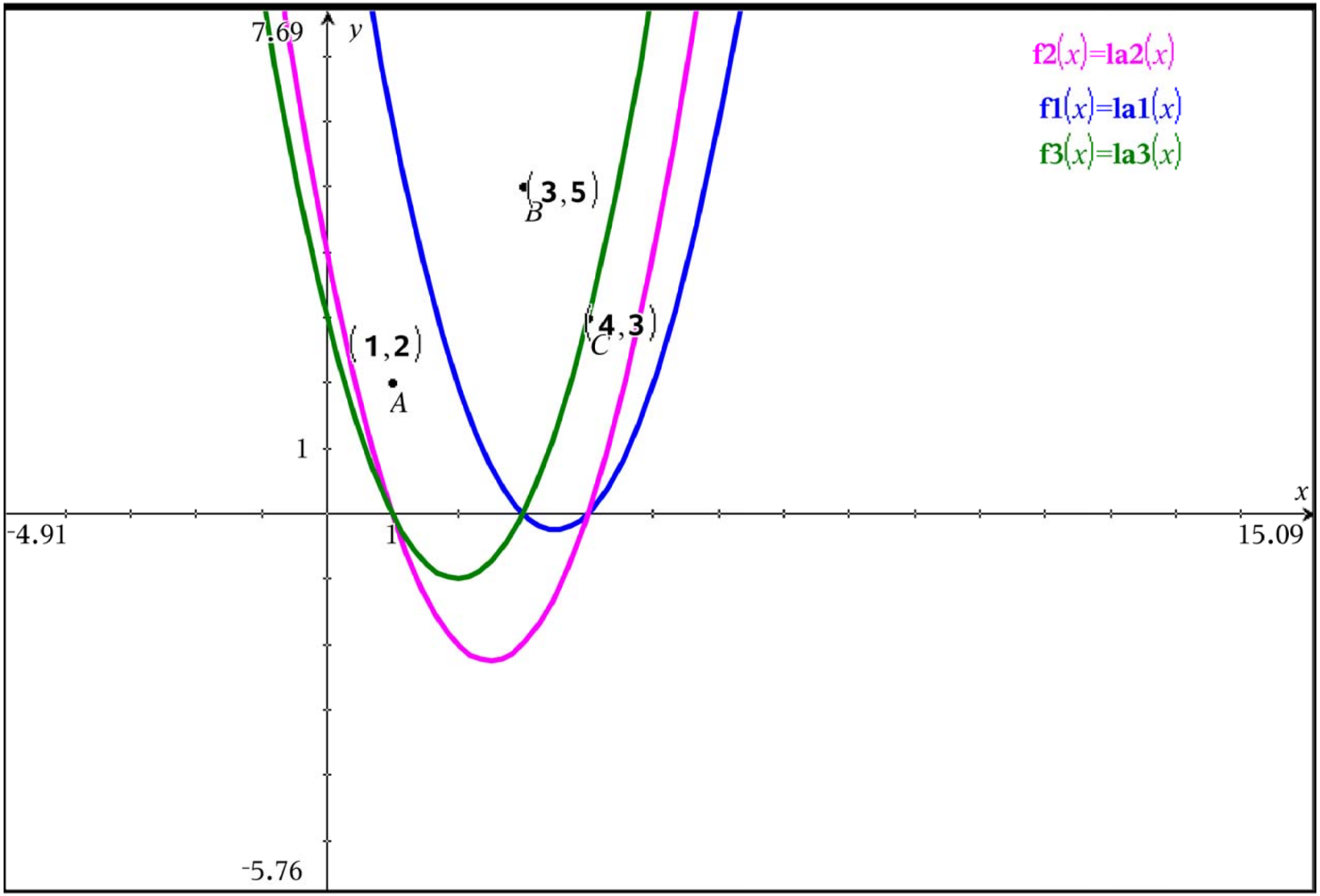
$la3(x):=(x-\mathbf{apx})(x-\mathbf{bpx})$ ▸ *Fertig* $\mathbf{la3}(x)$ ▸ $(x-3)\cdot(x-1)$ $\mathbf{c3}:=\frac{\mathbf{cpy}}{\mathbf{la3}(\mathbf{cpx})}$ ▸ 1

Die Polynome la1, la2 und la3 sind linear unabhängig, wie man sich eicht überlegt.

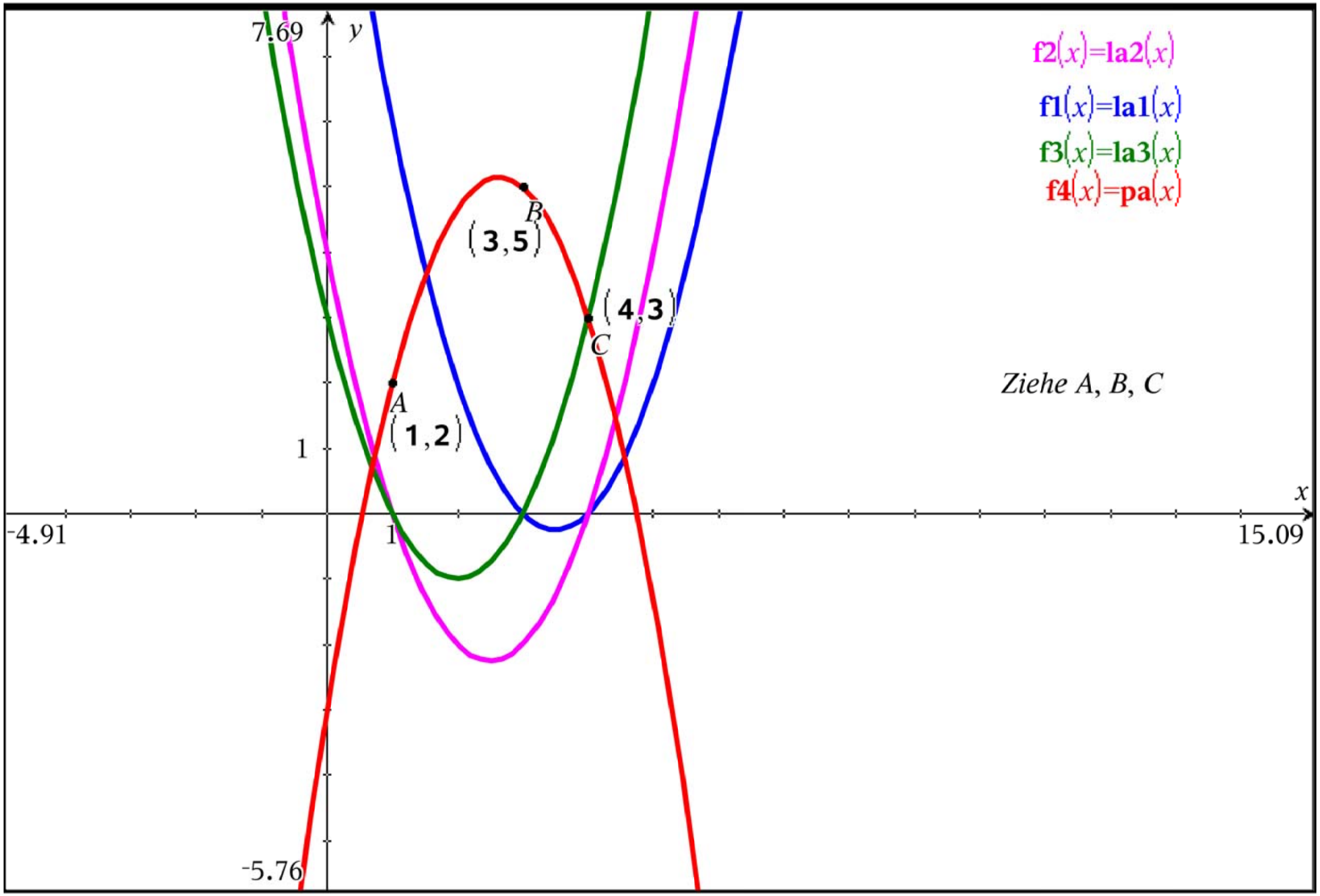
Da es die Standandbasis $\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}$ in diesem Vektorraum gibt, daher spannen auch die drei Lagrange−Polynom diesen VP2 auf. $\mathbf{pa}(x):=\mathbf{c1}\cdot\mathbf{la1}(x)+\mathbf{c2}\cdot\mathbf{la2}(x)+\mathbf{c3}\cdot\mathbf{la3}(x)$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{pa}(x)$ ▸ $\frac{-7\cdot x^2}{6}+\frac{37\cdot x}{6}-3$ **Jedes andere Polynom ist einen Linearkomination aus ihnen.**

1.1



1.2


7.69
y
f2(x)=la2(x)
f1(x)=la1(x)
f3(x)=la3(x)
f4(x)=pa(x)
B
(3,5)
(4,3)
C
Ziehe A, B, C
A
(1,2)
1
x
-4.91
1
15.09
-5.76

1.3

Auffassung:

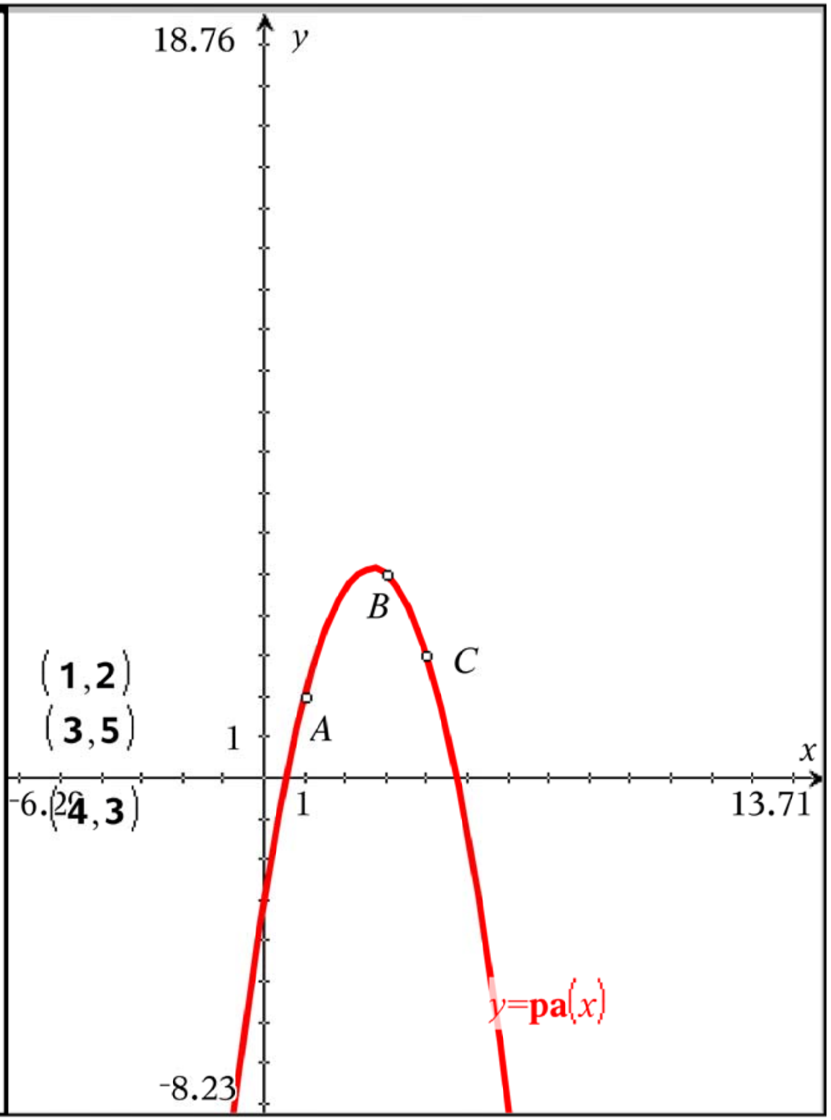
Wenn pa(x) nun die Grenzkosten sind (Ableitung der Kostenfunktion)

dann ist $\mathbf{kv}(x) := \int lag(x)\, dx$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{kv}(x)$ ▸ $\int lag(x)\, dx$

die Funktion der "variablen Kosten"

Dieses alles ist im nächsten Problem weiter ausgeführt.



1.4

Wirtschaftsfunktionen

Wirtschaftsfunktionen. Die freie Parabel aus dem 1. Problem sei nun grenk(x), die Grenzkosten−Fkt.(Ableitung der Kostenfunktion)

Dann ist $\mathbf{kv}(x):=\int \mathbf{grenzk}(x)\, dx$ ▸ *Fertig*

$$\mathbf{kv}(x) ▸ \frac{4\cdot x^3}{9}-\frac{19\cdot x^2}{6}+9\cdot x$$

die Funktion der "variablen Kosten"

Für die Zeichnung sind die Fixkosten auf 5 gesetzt. $\mathbf{kf}:=5$ ▸ 5

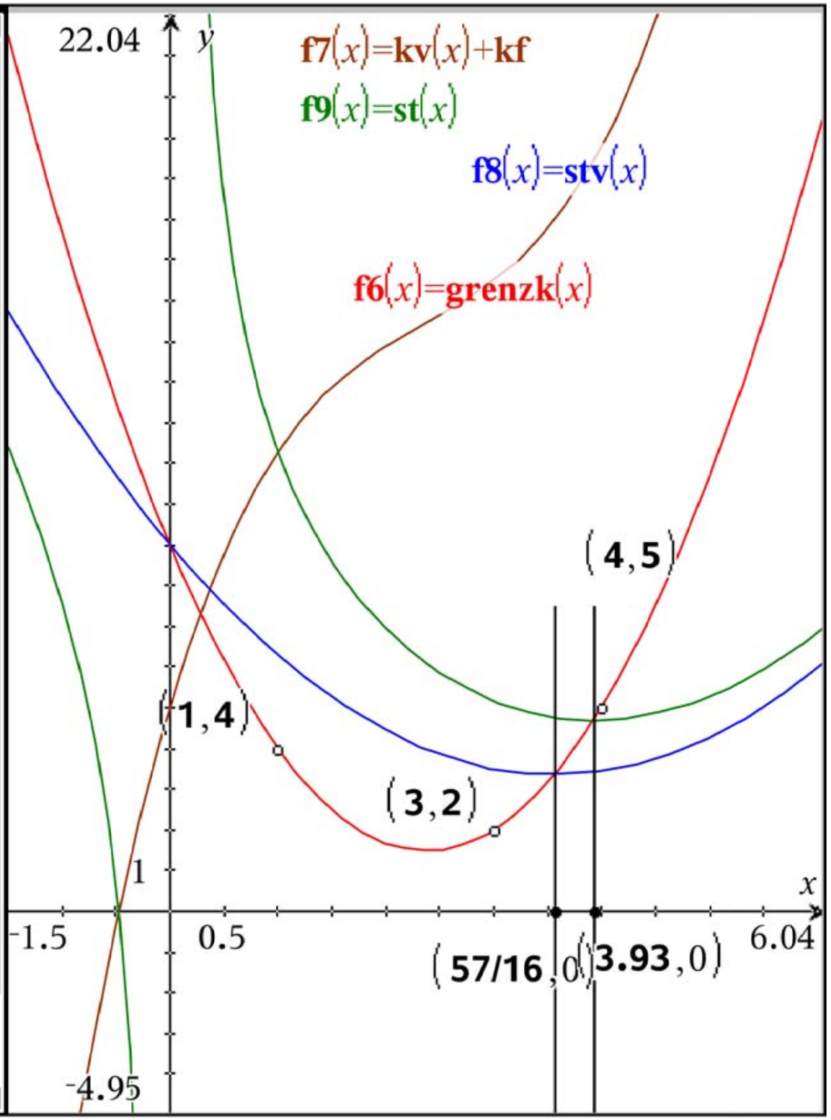
Stückkosten $\mathbf{st}(x):=\frac{\mathbf{kv}(x)+\mathbf{kf}}{x}$ ▸ *Fertig*

variable Stückkosten $\mathbf{stv}(x):=\frac{\mathbf{kv}(x)}{x}$ ▸ *Fertig*

Berechnungen nächste Seite

$\mathbf{kpug}$ ▸ $\frac{215}{64}$ $\mathbf{lpug}$ ▸ 4.69166

Ziehe die Hohlkreispunkte (Definitionen unten)



2.1

Weitere Berechnungen

bmi:=zeros(grenzk(x)−**stv**(x),x) ▸ $\left\{0,\frac{57}{16}\right\}$ ⚠ **bmin**:=**bmi**[2] ▸ $\frac{57}{16}$ Betriebsminimum

bma:=zeros(grenzk(x)−**st**(x),x) ▸ {3.92721} **bmax**:=**bma**[1] ▸ 3.92721 Betriebsmaximum

kpug:=**stv**(**bmin**) ▸ $\frac{215}{64}$ **kpug** ▸ 3.35938 kurzfristige Preisuntergrenze

lpug:=**st**(**bmax**) ▸ 4.69166 langfristige Preisuntergrenze

Handwerk: Will man, dass ein Punkt von zweiVariablen a und b abhängt, geht man so vor:

Gib a und b Werte: ax:=3 und ay:=5. Mache eine Graphfenster auf. Wähle im Werkzeugmenü Geometrie −> Punkt. Klicke irgendwo in die Zeichenfläche. Es erscheint ein Punkt. Benennen: Markiere ihn und wähle Beschriftung . Trage A ein (dies hat keine Wirkung auf die Werte). Markiere A und wähle **Kordinaten/Gleichungen.** enter. Es erscheinen die Koordinaten. Markiere die erste und wähle mit re−Maus **Variablen −>veknüpfen mit** −> ax. Mache es ebenso mit der Ordinate von A. Zieht man nun am Punkt, so ändern sich seine Koordinaten. Ändert man die Kordinaten in der Koordinatenanzeige oder im Notesfenster, springt A an die gewünschte Stelle.

2.2

VP2. Raum der Polynome bis zum 2. Grad

Lagrange−Interpolation Ausgangssituation A=[1,4]; B=[3,2]; C=[4,5]

Wirtschaftabeispiel, bei dem man die Grenzkostenfunktion durch Ziehen an A,B,C modellieren kann.

$\mathbf{apx}$ $\quad \mathbf{bpx}:=3$ $\quad \mathbf{cpx}$

$\mathbf{apy}$ $\quad \mathbf{bpy}:=2$ $\quad \mathbf{cpy}$

$\mathbf{la1}(x):=(x-\mathbf{bpx})\cdot(x-\mathbf{cpx})$ $\quad \mathbf{la1}(x)$ $\quad \mathbf{c1}:=\dfrac{\mathbf{apy}}{\mathbf{la1}(\mathbf{apx})}$

$la2(x):=(x-\mathbf{apx})(x-\mathbf{cpx})$ $\quad \mathbf{la2}(x)$ $\quad \mathbf{c2}:=\dfrac{\mathbf{bpy}}{\mathbf{la2}(\mathbf{bpx})}$

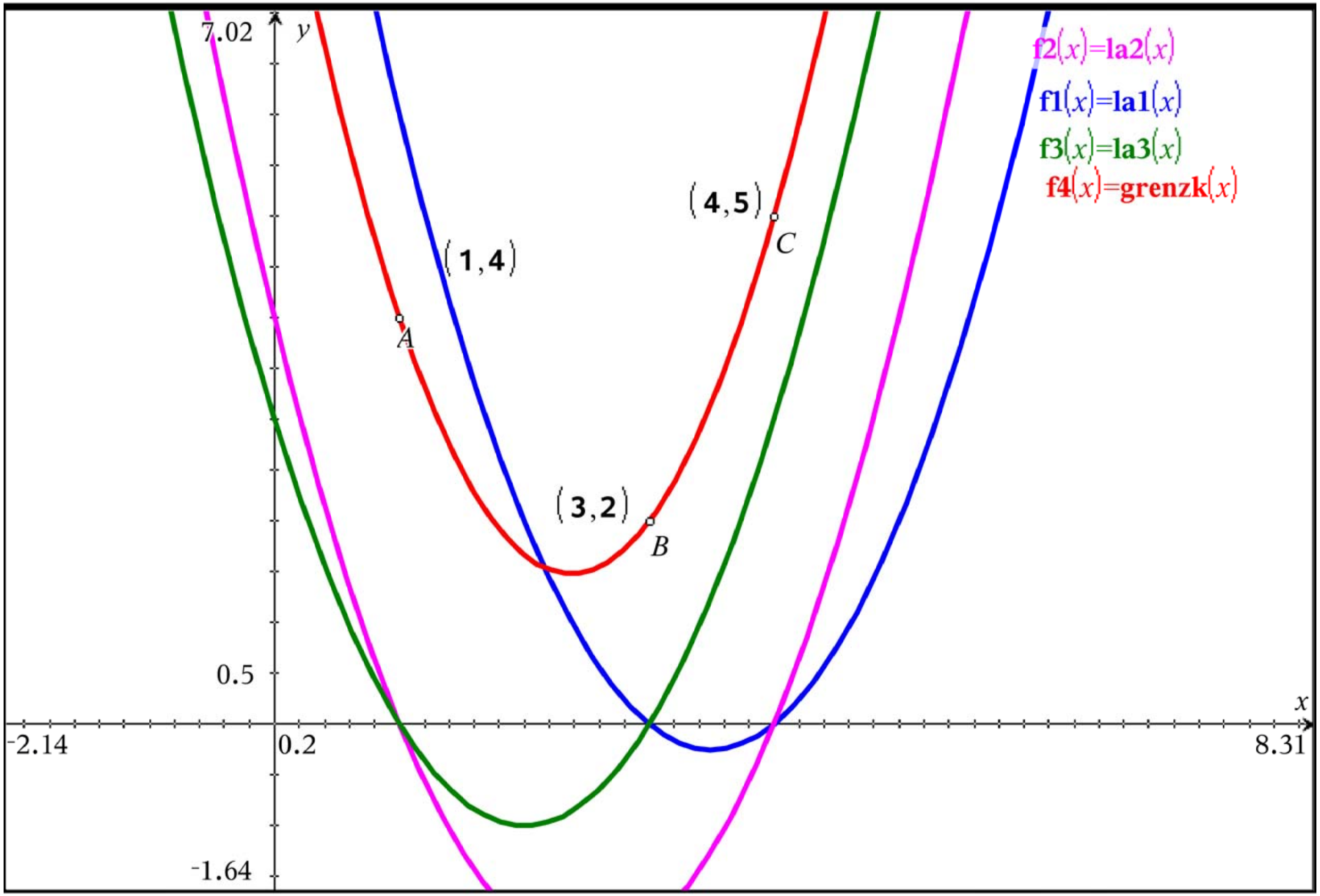
$la3(x):=(x-\mathbf{apx})(x-\mathbf{bpx})$ $\quad \mathbf{la3}(x)$ $\quad \mathbf{c3}:=\dfrac{\mathbf{cpy}}{\mathbf{la3}(\mathbf{cpx})}$

$\mathbf{grenzk}(x):=\mathbf{c1}\cdot\mathbf{la1}(x)+\mathbf{c2}\cdot\mathbf{la2}(x)+\mathbf{c3}\cdot\mathbf{la3}(x)$ $\quad \mathbf{grenzk}(x)$

Es folgen die typischen Wirtschaftsfunktionen und Berechnungenfür Wirtschaftsbegriffe.

Das ganze Problem 2 hängt vin A, B, C ab.

2.3


7.02
y
f2(x)=la2(x)
f1(x)=la1(x)
f3(x)=la3(x)
f4(x)=grenzk(x)
(4,5)
C
(1,4)
A
(3,2)
B
0.5
x
-2.14
0.2
8.31
-1.64
2.4