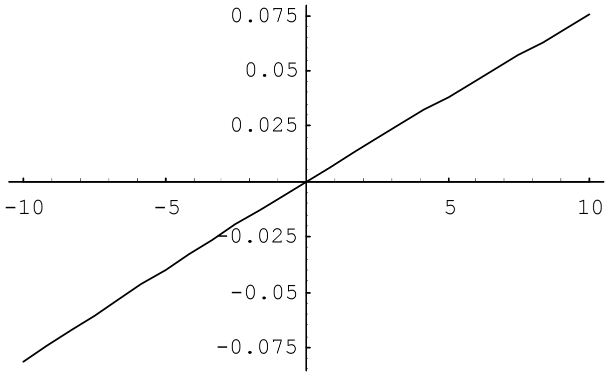
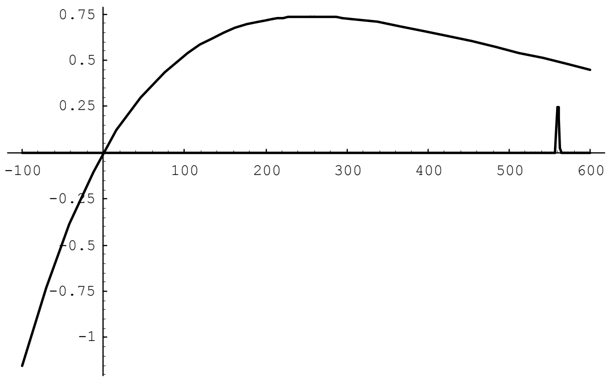
Analysis mit Fallen und Dornen Spijker

Dr. Dörte Haftendorn Anregung zu dieser Aufgabe von Jonathan Roeloff 1996 /01/05

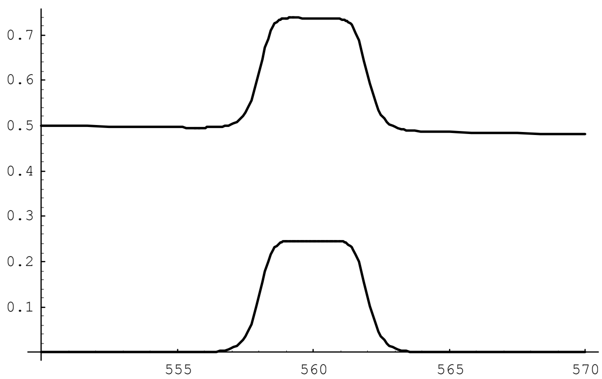
$$f(x) = \frac{x}{128}\, e^{-\frac{x}{256}} + \frac{63}{256+(x-560)^8}$$



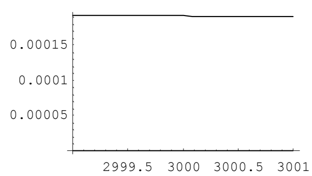
Nun, das ist gerade?!?!?!. In Derive und auf Ti-92 stellt sich das noch schlimmer dar, weil dort der y-Zeichenbereich nicht automatisch sinnvoll angepasst wird.
Langsam muss man aufmerksam werden, dass der gebrochen rationale Term nach x=560 verschoben worden ist. Nun, also diese Gegend mit einbeziehen:



Suche nach dem zweiten Maximum
FindRoot[g'[x]==0,{x,550,570}]
{x -> 3000.51}
Huch!!! Höchst merkwürdig!!!
1. Etwa bei x=560 muß es eine Extremstelle geben.
2. Ist bei 3000 nochmals etwas los?
Die Stelle soll besser auf's Korn genommen werden:
xe2=x /. FindRoot[g'[x]==0,{x,558,562}]
g[xe2] (*Ordinate *)
g'[xe2] (*Probe *)
559.248
0.73764
-3.62155 10^{-8}
Geschafft!!
Und was ist nun bei 3000??



Das Bild bringt nichts.



Was bringt die Suche?
FindRoot[g'[x]==0,{x, 2900,3100}]
{x -> 3294.06}
Oh Schreck!
Spätestens jetzt zeigt sich:

Mathematisches Denken tut not !

Was brauchen wir?

Wissen, wie der Graph zu y= E^x aussieht.
Wissen, dass der Graph von y=E^(-x) nun daraus durch Spiegelung an der y-Achse hervorgeht.
Wissen, wie sich die Produktbildung zweier Funktionsterme auswirkt.
Wissen, dass Faktoren an x selbst und am gesamten Term nur den"Maßstab" verändern.

Damit kennen wir den 1. Baustein.

Wissen, wie der Graph zu y=x^2 aussieht.
Wissen, dass der Graph zu y=x^8 ein sehr viel "breiteres" Extremum hat, außen aber sehr schnell steigt.
Wissen, dass der Graph von y=zahl + x^8 nun daraus durch Verschieben längs der y-Achse hervorgeht.
Wissen, wie sich die Kehrwertbildung bei einem Funktionsterm auswirkt.
Wissen, dass Faktoren an x selbst und am gesamten Term nur den"Maßstab" verändern.
Wissen, dass die Ersetzung von x durch (x-zahl) ein Verschieben längs der x-Achse bedeutet.

Damit kennen wir den 2. Baustein.

Wissen wie sich die Summenbildung zweier Funktionsterme auswirkt.

Damit kennen wir die gesuchte Funktion qualitativ mit allen wesentlichen Eigenschaften.

Insbesondere wissen wir:

der 1. Baustein bestimmt i.w. die Funktion.
der 2. Baustein hat nur in der Gegend von x=560 eine nennenswerte Wirkung.
Von vornherein muss der Zeichenbereich diesen Wert umfassen.
Wenn dennoch dort nichts zu sehen ist, ist das Fenster falsch gewählt.
Links vom Ursprung ist "nichts mehr los", da braucht man nicht zu suchen.
Die Ankündigung von Extremstellen rechts von 600 kann nur ein "Dreckeffekt" sein.
Jedenfalls ist auch rechts von 600 nichts mehr los.
Wendepunkte müssen in den Flanken des Peaks bei 560 liegen.
Einen weiteren Wendepunkt muß es geben.

Angeregte Fragen:

Warum kommt das CAS mit der Nullstellensuche nicht zurecht?
Hier werden Überlegungen zur Wirkungsweise des Newtonverfahrens u.a. Verfahren angeregt.
Wo sind eigentlich Extremum und Wendepunkt des e-Terms?
Das kann man ja leicht exakt ausrechnen.
Warum hat g ähnliche Extrem- und Wendepunkte?
War es nötig, als 1. Baustein diesen e-Funktionstyp zu nehmen?
Gibt es den Effekt auch mit anderen Typen?
Reicht im 2. Baustein schon Exponent 6?
Was hätte J.R. unternehmen können, damit man die Wichtigkeit von x=560 nicht gleich sieht?
Wie kann man vorgehen, wenn die Terme solche Informationen verbergen?

Angeregte Aufgaben:

Finde eine Funktion, die etwa an deinem Geburtstag ein schwer zu findendes Extremum oder eine andere Besonderheit hat.
Stelle das Rätsel einem Mitschüler und löse dafür seins.