Approximation mit kubischen Splines

22. Oktober 1993

Problemstellung: Durch ~~n~~ n+1 feste Punkte , die "genau" gegeben sind, soll von Punkt zu Punkt ein Polynom dritten Grades gelegt werden, sodaß die Gesamtkurve zweimal stetig differenzierbar ist. In den Stützpnkten haben die Teilkurven gleiche Werte (nämlich die Stützwerte), gleiche Steigung und gleiche Krümmung. Letzteres wird realisiert durch übereinstimmende 2. Ableitung. Bei ***n+1*** Punkten $(x_i, y_i)\ ,\ i=0..n$ sind also ***n*** Polynome $p_i = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3\ ,\ i=0..n-1$ gesucht.

1. Schritt $\boxed{a_i = y_i\ ,\ i=0..n}$ 2.Schritt $\boxed{c_0 = 0 \quad c_n = 0}$

3.Schritt Gleichungssystem mit ***n-1*** Gleichungen für $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$: $A \cdot \vec{x} = \vec{r}$ .Mit $h_i = x_{i+1} - x_i$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ ... \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3-a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) \\ \frac{3}{h_3}(a_4-a_3) - \frac{3}{h_2}(a_3-a_2) \\ ... \\ ... \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2}) \end{pmatrix}$$

Wenn alle Stützstellen denselben Abstand haben, sind alle $h_i = h$ und es gilt:

$$h \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ ... \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \cdot \begin{pmatrix} a_2 - 2a_1 + a_0 \\ a_3 - 2a_2 + a_1 \\ a_4 - 2a_3 + a_2 \\ ... \\ ... \\ a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem ist mit den üblichen Methoden zu lösen.

4.Schritt $\boxed{b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i) \quad \text{für} \quad i=0...n-1}$ 5.Schritt

$\boxed{d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i) \quad \text{für} \quad i=0...n-1}$

6.Schritt Die berechneten Werte sind in die Polynomgleichungen einzusetzen.

Beispiel:

Für die Stützpunkte (0/0), (3/3), (5/2), (6/0) erhält man so

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

und die folgenden Polynome (in vereinfachter Schreibweise):

p(x)=a+b*(x-f)+c*(x-f)^2+d*(x-f)^3
p_0(x)=0+37/28*(x-0)+0*(x-0)^2+(-1/28)*(x+0)^3
p_1(x)=3+5/14*(x-3)+(-9/28)*(x-3)^2+(-3/56)*(x-3)^3
p_2(x)=2+(-11/7)*(x-5)+(-9/14)*(x-5)^2+3/14*(x-5)^3
p_0(x)=37/28*x-1/28*x^3
p_1(x)=-3/56*x^3+9/56*x^2+47/56*x+27/56
p_2(x)=3/14*x^3-27/7*x^2+293/14*x-33

D:\Dörte-Texte\Mathe-Texte\AT\Formelsammlung\ATSPLINE.HP5 Ha 15. Dezember 1993