

**Standards für die Lehrerbildung  
im Fach Mathematik**

**Empfehlungen von DMV, GDM, MNU**

**Juni 2008**

## Präambel

### *Wozu diese Empfehlungen?*

Die Kultusministerkonferenz (KMK) beabsichtigt, bis Anfang 2009 ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in lehramtsbezogenen Studiengängen vorzulegen, deren Entwurf den Verbänden im Juni 2008 vorgelegt worden ist. „Diese Fachprofile beziehen sich auf Kompetenzen und somit auf Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Einstellungen, über die eine Lehrkraft zur Bewältigung ihrer Aufgaben im Hinblick auf das jeweilige Lehramt verfügen soll.“ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und der Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) haben 2007 in einer gemeinsamen Stellungnahme „Für ein modernes Lehramt im Fach Mathematik“ nach einer kurzen und prägnanten Analyse der jetzigen Ausbildungspraxis vor allem des gymnasialen Lehramts notwendige fachliche und fachdidaktische Kompetenzen von Lehrkräften für Mathematik beschrieben. Die Gesellschaft für Fachdidaktik (GFD) hat 2005 ein Modell fachdidaktischer Kompetenzen und ein fachdidaktisches Kerncurriculum für die 1. Phase der Lehrerbildung veröffentlicht. Die Formulierungen der fachlichen und fachdidaktischen Kompetenzen in den genannten Papieren beziehen sich auf das Mathematikstudium als Ganzes bzw. auf fachdidaktische Studien generell.

*Das Anliegen dieser Empfehlungen ist es, den Zusammenhang zu bedeutsamen Inhalten des Studiums herzustellen. Sie sollen eine Brücke zwischen den Kompetenzprofilen und relevanten mathematischen Inhalten des Studiums schlagen: Welche Kompetenzen lassen sich in besonderer Weise an welchen Inhalten entwickeln bzw. welchen Beitrag leistet der jeweilige Inhalt zum Kompetenzprofil der angehenden Mathematiklehrkraft? Für die Mathematik als Kernfach der Schule ist es dabei unabdingbar, den Unterricht von der ersten Klasse bis zu den verschiedenen Schulabschlüssen als fortlaufenden Prozess in den Blick zu nehmen.*

Dabei werden solche Inhalte benannt, die zum Verständnis des mathematischen Schulstoffes und seines Bildungsgehaltes von unmittelbarer Bedeutung sind. Damit soll nicht präjudiziert werden, dass ein Studium sich in genau diesen Inhalten erschöpfen kann; vielmehr soll die Option auf exemplarische Vertiefungen zur Erweiterung des Horizontes vor allem in den höheren Ausbildungsstufen offen gehalten werden. Jedoch sollen die hier formulierten Anforderungen eine Orientierung für die Diskussion über die Ziele und die standortspezifische Ausgestaltung der Lehramtsstudiengänge geben.

Der Einblick in die Bedeutung der Mathematik für die moderne Welt gehört zum Kern des Studiums für alle Lehrämter. Studierende aller Lehrämter sollen der Mathematik als Kulturleistung und den für sie charakteristischen Wissensbildungsprozessen begegnen. Daher gehört zur Vermittlung mathematischer Inhalte grundsätzlich auch, ihren Beitrag zur mathematischen Bildung auszuweisen und sie in der historischen Genese zu verorten.

In der modernen Wissensgesellschaft müssen Studierende aller Lehrämter außerdem Basiskompetenzen im Umgang mit neuen Medien erwerben: mathematische Software dient zur Veranschaulichung, als heuristisches Instrument und zur Konstruktion von Problemlösungen; das Internet ist als Medium zur Informationsbeschaffung unabdingbar.

### *Wie sind diese Empfehlungen zu lesen?*

Die Studieninhalte sind in Themenkreise gegliedert, deren Bezeichnung (und Reihenfolge) sich zum einen an den Entwurf für die Fachprofile der KMK (s.o.) anlehnt, zum andern durch einen Zusatz die Kompetenzorientierung dieser Empfehlungen verdeutlichen soll.

- Arithmetik und Algebra – Denken in Zahlen und Strukturen
- Geometrie – Strukturieren von Raum und Form
- Lineare Algebra – Linearisieren und Koordinatisieren
- Funktionen und Analysis – Funktionales und infinitesimales Denken

- Stochastik – Daten analysieren und Zufall modellieren
- Modellieren und Angewandte Mathematik – Anwenden von Mathematik
- Fachdidaktische Kompetenzen

Die Themenkreise sind nicht als Bezeichnungen einzelner Veranstaltungen anzusehen: Eine Veranstaltung kann Studieninhalte aus verschiedenen Themenkreisen umfassen; die Inhalte eines Themenkreises können mehreren Veranstaltungen zugeordnet werden.

*Mit Blick auf das Berufsfeld ist es sinnvoll und notwendig, Veranstaltungen nach Schulstufen bzw. Schulformen zu differenzieren.*

Für die *fachlichen* Standards sind als Hinweis zu einer Ausdifferenzierung bei der Umsetzung in entsprechende Curricula vier Kategorien angegeben. Diese sind nach inhaltlicher Ausweitung, begrifflicher Elaboriertheit und Grad der Abstraktion und Formalisierung gestaffelt. Ihre Reihung ist im Sinne zunehmender Intensität zu verstehen. Damit wird zum Ausdruck gebracht, dass auf jeder Stufe die Inhalte und Konzepte der davor liegenden Stufen geeignet integriert werden sollen. Dabei sollte folgenden Zielsetzungen Rechnung getragen werden (vgl. gemeinsame Stellungnahme von DMV, GDM, MNU):

- Die Studierenden erfahren mathematische Wissensbildung als progressiven Prozess, der von Denkhaltungen wie Abstraktion, Verallgemeinerung, Präzisierung und Formalisierung getragen wird und die kreative Entwicklung gedanklicher Ordnungsmittel erfordert.
- Sie erwerben damit nicht nur ein vertieftes Verständnis mathematischer Inhalte, sondern auch Sichtweisen, die für die Fähigkeit zum genetischen Lehren unabdingbar sind.

<p><i>Diese Kompetenzen betreffen die im Alltag relevante Mathematik und ihre begriffliche Beschreibung.</i> Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft verfügen, die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet, auch dann, wenn sie kein Fachstudium absolviert hat.</p>	
<p><i>Diese Kompetenzen betreffen Werkzeuge, Begriffe und Verfahren der Elementarmathematik als Mittel, die Alltagsmathematik von einem übergeordneten Standpunkt aus zu durchdringen, zu reflektieren und in ihrem Rahmen Probleme zu lösen.</i> Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft zusätzlich verfügen, die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet und ein stufenspezifisches Fachstudium absolviert hat.</p>	
<p><i>Diese Kompetenzen betreffen unterrichtsrelevante Werkzeuge, Begriffe und Verfahren der Elementarmathematik und die Möglichkeit, diese von einem höheren Standpunkt zu durchdringen, zu reflektieren und in ihrem Rahmen Probleme zu lösen.</i> Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft darüber hinaus verfügen, die Mathematik in den Sekundarstufen unterrichtet und ein schulformspezifisches Fachstudium absolviert hat.</p>	
<p><i>Diese Kompetenzen betreffen exemplarisch die Kenntnis weiterführender mathematischer Theoriebildungen mit ihren spezifischen Mechanismen und der je eigenen Leistungsfähigkeit zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme.</i> Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft zusätzlich verfügen, die Mathematik in der Sekundarstufe II unterrichtet.</p>	

Über die *fachdidaktischen* Kompetenzen soll eine Lehrkraft verfügen, die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet, wenn auch in für die jeweilige Jahrgangsstufe unterschiedlichen Ausformungen.

### **Wie sind diese Empfehlungen zustande gekommen?**

Die gegenwärtige Situation im Bologna-Prozess lässt befürchten, dass sich das Ausbildungssystem trotz formaler Vereinheitlichung zu einem Flickenteppich unterschiedlichster Modelle entwickelt, die die Mobilität der Studierenden schon innerhalb Deutschlands, sogar innerhalb eines Bundeslandes erschwert. Das gilt insbesondere für die Lehrerbildung, die auf einen zwar in den Ländern unterschiedlich gegliederten, aber vergleichbaren Arbeitsmarkt Schule ausgerichtet ist. Um diesem Trend entgegen zu wirken, hat ein Arbeitskreis

der GDM in Zusammenarbeit mit der DMV und der MNU für die Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern, die das Kernfach Mathematik von der ersten Klasse bis zum Abitur erfolgreich unterrichten sollen, diese Empfehlungen von Standards für die Lehrerbildung formuliert.

Dem Arbeitskreis gehören an: Rainer Danckwerts, Hans-Jürgen Elschenbroich, Lisa Hefendehl-Hebeker, Gabriele Kaiser, Ina Kersten, Henning Körner, Jürg Kramer, Timo Leuders, Andreas Marx, Michael Neubrand, Hans-Dieter Rinkens (Sprecher), Hans-Georg Weigand, Bernd Wollring.

Der Vorstand der GDM, das Präsidium der DMV und der Bundesvorstand der MNU veröffentlichen diese Empfehlungen in der aktuellen Diskussion über ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und ihre Didaktiken in der Lehrerbildung als Beitrag zur Beschreibung der fachbezogenen Kompetenzen künftiger Mathematiklehrerinnen und -lehrer.

Prof. Günter M. Ziegler  
für die DMV

Prof. Hans-Georg Weigand  
für die GDM

OStD Arnold a Campo  
für den MNU

## Arithmetik und Algebra – Denken in Zahlen und Strukturen

Der Themenkreis Arithmetik und Algebra erstreckt sich auf Zahlen und ihre Verwendung, das systematische Operieren mit Zahlen und schließlich die Algebra als formale Durchdringung und Verallgemeinerung. Er umspannt eine lange historische Entwicklung, die durch die geistige Gestaltungskraft typischer mathematischer Denkhandlungen wie Abstrahieren, Ordnen und Strukturieren, Generalisieren und Formalisieren getragen ist.

<i>Bereiche</i>	<b>Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse</b>	
	Die Studierenden	
<i>Zahlen, Zahldarstellungen, Zahlensystem</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ kennen Darstellungsformen für natürliche Zahlen, Bruchzahlen und rationale Zahlen und verfügen über Beispiele, Grundvorstellungen und begriffliche Beschreibungen für ihre jeweilige Aspektvielfalt</li> <li>▪ beschreiben die Fortschritte im progressiven Aufbau des Zahlensystems und argumentieren mit dem Permanenzprinzip als formaler Leitidee</li> <li>▪ ermessen die kulturelle Leistung, die in der Entwicklung des Zahlbegriffs und des dezimalen Stellenwertsystems steckt</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben die Grenzen der rationalen Zahlen bei der theoretischen Lösung des Messproblems</li> <li>▪ geben Beispiele für den Umgang der Mathematik mit dem unendlich Großen und mit dem unendlich Kleinen (z.B. Mächtigkeit, Dichtheit)</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ erläutern die Vollständigkeit und weitere Eigenschaften der reellen Zahlen an Beispielen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ verwenden Axiomatik und Konstruktion zur formalen Grundlegung von Zahlbereichen (bis hin zu den komplexen Zahlen) und beherrschen dazu begriffliche Werkzeuge wie Äquivalenzklassen und Folgen</li> </ul>	
<i>Elementare Arithmetik</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ erfassen die Gesetze der Anordnung und der Grundrechenarten für natürliche und rationale Zahlen in vielfältigen Kontexten und können sie formal sicher handhaben</li> <li>▪ kennen und nutzen grundlegende Zusammenhänge der elementaren Teilbarkeitslehre</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ erfassen Gesetze und Bedeutung der Potenzrechnung und des Logarithmus für die Mathematik und ihre Anwendungen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben Zusammenhänge der Teilbarkeitslehre formal und nutzen sie zum Lösen von Problemen</li> </ul>	
<i>Algebra</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ kennen und verwenden im Umgang mit Zahlenmustern präalgebraische Darstellungs- und Argumentationsformen und erste formale Sprachmittel (Variable)</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ handhaben die elementar-algebraische Formelsprache und beschreiben die Bedeutung der Formalisierung in diesem Rahmen</li> <li>▪ verwenden grundlegende algebraische Strukturbegriffe und zugehörige strukturerhaltende Abbildungen in Zahlentheorie und Geometrie (z.B. Restklassenringe, Symmetriegruppen)</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben die Vorteile algebraischer Strukturen in verschiedenen mathematischen Zusammenhängen (Zahlentheorie, Analysis, Geometrie) und nutzen sie zum Lösen von Gleichungen (z.B. Konstruktion mit Zirkel und Lineal)</li> </ul>	
<i>Neue Medien</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ nutzen Taschenrechner und Tabellenkalkulation zum Erkunden arithmetischer Zusammenhänge und zum Lösen numerischer Probleme und reflektieren über Fragen der Genauigkeit</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ nutzen Computeralgebrasysteme zur Darstellung und Exploration funktionaler und elementarer algebraischer Zusammenhänge und als heuristisches Werkzeug zur Lösung von Problemen</li> </ul>	

## Geometrie – Strukturieren von Raum und Form

Charakteristisch für die Geometrie sind Vorstellungen und Konstruktionen von Formen, Gestalten und Mustern und ihren systematischen Veränderungen in Abbildungen, sowie die Grundideen des Messens in der Ebene, im dreidimensionalen Raum und darüber hinaus. Figuren und Abbildungen bilden ferner eine wesentliche Stufe einer ersten systematischen Verständigung über mathematische Inhalte allgemein, bevor diese formal durchdrungen und fixiert werden.

<i>Bereiche</i>	<b>Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse</b>	
	Die Studierenden	
<i>Elementare Geometrie in Ebene und Raum</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben und erläutern elementare Formen, Konstruktionen und Symmetrien in Ebene und Raum und operieren damit materiell und mental</li> <li>▪ erläutern Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen ebenen und räumlichen Phänomenen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ führen elementare Konstruktionen mit Lineal und Zirkel durch und begründen diese</li> <li>▪ durchdringen geometrische Aussagen argumentativ in Begründungen und Beweisen</li> <li>▪ beschreiben geometrische Abbildungen, insbesondere Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeitsabbildungen und Projektionen, führen sie konstruktiv durch und nutzen sie beim Lösen von Konstruktionsproblemen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie</li> </ul>	
<i>Messen in Ebene und Raum</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ erläutern und nutzen geometrische Vorstellungen (z.B. Auslegen, Ausschöpfen) zum Messen von Längen, Flächeninhalten, Rauminhalten und Winkeln</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ bestimmen Maße und ihr Invarianz- und Transformationsverhalten durch Kongruenz- und Ähnlichkeitsargumente</li> <li>▪ erklären und nutzen Verfahren der Trigonometrie</li> <li>▪ erklären und nutzen Grenzprozesse zum Messen (Approximation, Cavalieri)</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ erklären die Grundidee des Integrals geometrisch und nutzen sie zur Bestimmung von Flächen, Längen und Rauminhalten</li> </ul>	
<i>Geometrische Strukturen</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben Symmetrien durch Abbildungen und strukturieren sie mit dem Gruppenbegriff</li> <li>▪ arbeiten darstellend und analytisch mit linearen Gebilden (wie Punkt, Gerade, Ebene und Hyperebene) und sie betreffenden Operationen</li> <li>▪ arbeiten darstellend und analytisch mit nichtlinearen Gebilden (wie Kreise, Kegel, Kegelschnitte, Kugeln und Rotationskörper)</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ zeigen exemplarisch Wege zu nicht-euklidischen Geometrien auf</li> </ul>	
<i>Neue Medien</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ nutzen Software zur Darstellung ebener und räumlicher Gebilde, zur Exploration geometrischer Konstruktionen und als heuristisches Werkzeug zur Lösung geometrischer Probleme</li> </ul>	

## Lineare Algebra – Linearisieren und Koordinatisieren

Charakteristisch für die Lineare Algebra ist ihre Rolle als Sprache und universelles Werkzeug für die Mathematik und Anwendungsbereiche in Technik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften. So führt die Anwendung mathematischer Methoden in den verschiedensten Gebieten auf lineare Gleichungssysteme (z.B. Verflechtungsprobleme, lineare Optimierung). Grundprinzipien sind Linearisierung (z.B. bei der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen) und Koordinatisierung. Durch die Idee der Koordinatisierung wird die Möglichkeit gegeben, geometrische Phänomene mit Hilfe der Algebra zu beschreiben und umgekehrt algebraische Erkenntnisse geometrisch zu veranschaulichen. Das Streben der Mathematik nach Abstraktion (um größtmögliche Anwendbarkeit zu erhalten) und nach Klassifikation (z.B. unter dem Aspekt der Dimension) zeigt sich deutlich in der Linearen Algebra.

<i>Bereiche</i>	<b>Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse</b>	
	Die Studierenden	
<i>Lineare Gleichungen und Koordinaten-geometrie</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ verstehen Koordinatisierung als Möglichkeit, geometrische Phänomene algebraisch zu behandeln</li> <li>▪ unterscheiden zwischen ein-, zwei- und dreidimensionalen Räumen und haben ein intuitives Verständnis von Matrizen, z.B. als Möglichkeit, Daten übersichtlich darzustellen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ geben Beispiele für Vektoren wie Kraft und Geschwindigkeit und beschreiben, wie Vektoren Beträge und Richtungen von Größen ausdrücken</li> <li>▪ beschreiben lineare Gleichungssysteme und Lösungsverfahren mit Hilfe von Matrizen, haben (geometrische) Vorstellungen über Lösungsmengen und zeigen Anwendungsmöglichkeiten in Technik, Naturwissenschaften und Wirtschaft auf</li> </ul>	
<i>Lineare Strukturen</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ erläutern, wie man von anschaulichen ein-, zwei- und dreidimensionalen Räumen zum abstrakten Begriff des Vektorraumes kommt</li> <li>▪ geben Beispiele für Vektorräume in Mathematik (z.B. Funktionenräume) und anderen Wissenschaften (Physik, Ökonomie, ...) an</li> <li>▪ beschreiben die Bedeutung der abstrakten Begriffe Basis und Dimension für geometrische Fragestellungen, bei der Lösung linearer Gleichungssysteme sowie bei linearen Koordinatentransformationen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ begreifen lineare Abbildungen von Vektorräumen als strukturverträgliche Abbildungen und stellen diese durch Matrizen dar</li> <li>▪ geben Beispiele für Anwendungen von Matrizen (z.B. stochastische Übergangsmatrizen, geometrische Abbildungen)</li> <li>▪ erläutern die Bedeutung der Determinante in Algebra, Geometrie und Analysis und verstehen die Determinante als alternierende Multilinearform</li> <li>▪ zeigen die Nützlichkeit der Begriffe Eigenwert und Eigenvektor (z.B. Klassifikation von Matrizen, Hauptachsentransformation, lineare Differentialgleichungen ...)</li> </ul>	
<i>Geometrische Strukturen</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ stellen Zusammenhänge zur Elementargeometrie (z.B. Satz von Pythagoras) her</li> <li>▪ beschreiben und konstruieren Isometrien und Projektionen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben, wie Vektorräume mittels eines Skalarprodukts eine metrische Struktur bekommen und Längen- und Winkelbegriffe genutzt werden können</li> <li>▪ beschreiben Kegelschnitte und Quadriken algebraisch und geometrisch und wenden Hauptachsentransformation an</li> <li>▪ beschreiben verschiedene Zugänge zu affiner und projektiver Geometrie</li> </ul>	
<i>Neue Medien</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ nutzen mathematische Software, um Sätze der Linearen Algebra anhand von Beispielen nachzuvollziehen, und als Werkzeug bei der Lösung von Anwendungsproblemen</li> </ul>	

## Funktionen und Analysis – Funktionales und infinitesimales Denken

Charakteristisch für die Analysis ist der systematisierende Umgang mit dem unendlich Kleinen (und Großen). Davon handeln die zentralen Begriffe Grenzwert, Ableitung und Integral. Sie handeln ebenso von der grundlegenden Idee des funktionalen Denkens. Beides – die Erfahrung des erfolgreichen Umgangs mit dem Unendlichen und die Erziehung zum funktionalen Denken – gehört zum Kern des allgemeinbildenden Werts der Analysis, begründet ihre breite Anwendbarkeit und trägt substantziell zu einem gültigen Bild der Mathematik als Kulturleistung bei.

<i>Bereiche</i>	<b>Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse</b>	
	Die Studierenden	
<i>Funktionen</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ verwenden Abbildungen als universelles Werkzeug (z.B. Kongruenzabbildungen, Permutationen, Folgen) und beschreiben sie mit Hilfe charakterisierender Eigenschaften (z.B. Bijektivität)</li> <li>▪ arbeiten mit Funktionen in verschiedenen Darstellungen (Tabelle, Graph, Term) und unter verschiedenen Aspekten (Einsetzungs-, Veränderungs- und Objektaspekt)</li> <li>▪ erläutern inner- und außermathematische Situationen, in denen die Abhängigkeit von mehreren Variablen eine Rolle spielt</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ nutzen elementare Funktionen zur Beschreibung realer Prozesse und inner-mathematischer Zusammenhänge und erläutern grundlegende Eigenschaften (Monotonie, Umkehrbarkeit)</li> </ul>	
<i>Grenzwert</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ erläutern einen präformalen Grenzwertbegriff an tragenden Beispielen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen und erläutern ihre Bedeutung an Beispielen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ definieren den Begriff des Grenzwerts für Folgen und Reihen sowie die Vollständigkeit der reellen Zahlen und verwenden diese Begriffe formal sicher</li> </ul>	
<i>Ableitung</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ interpretieren den Begriff der Ableitung als lokale Änderungsrate und setzen ihn in Anwendungszusammenhängen ein</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ interpretieren die Ableitung als Instrument der lokalen Linearisierung</li> <li>▪ untersuchen Eigenschaften von Funktionen mit analytischen Mitteln</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ definieren die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit formal und begründen zentrale Aussagen über stetige und differenzierbare Funktionen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ verwenden die Idee der Differentialgleichung zur Charakterisierung von Funktionen und zur Modellbildung</li> </ul>	
<i>Integral</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben die Idee der Flächenmessung mittels infinitesimaler Ausschöpfung an Beispielen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ interpretieren das Integral als Bilanzieren und als Mittelwertbildung und setzen es in Anwendungszusammenhängen ein</li> <li>▪ begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anschaulich</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ definieren den Begriff des (Riemann-)Integrals formal und verwenden ihn in mathematischen Zusammenhängen</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben und verwenden die Differentiation und Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher</li> <li>▪ nutzen die Begriffe der Analysis zur Darstellung von Kurven und Flächen im Raum</li> <li>▪ nutzen das Integral zur Arbeit mit stetigen Verteilungen in der Stochastik</li> </ul>	
<i>Neue Medien</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ nutzen Software zur Darstellung und Exploration funktionaler Zusammenhänge und infinitesimaler Phänomene und reflektieren ihre Verwendung kritisch</li> </ul>	

## Stochastik – Daten analysieren und Zufall modellieren

Die Statistik bietet wirkungsvolle Werkzeuge der Zusammenfassung und Darstellung von Daten, mit denen sich Zusammenhänge der Realität beschreiben und interpretieren lassen. Zudem hat die Mathematik einen Wahrscheinlichkeitsbegriff entwickelt, mit dem sich auch Zufallsphänomene erfassen lassen. Datenanalyse und Zufallsmodellierung kommen zusammen in vielfältigen stochastischen Anwendungen, ohne die die moderne quantitativ arbeitende Wissenschaft nicht denkbar ist.

<b>Bereiche</b>	<b>Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse</b>	
	Die Studierenden	
<i>Beschreibende Statistik / Datenanalyse</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ planen statistische Erhebungen (Befragung, Beobachtung oder Experiment), führen sie durch und werten sie aus</li> <li>▪ lesen und erstellen grafische Darstellungen für uni- und bivariate Daten (z.B. Kreuztabelle) und bewerten deren Eignung für die jeweilige Fragestellung</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ bestimmen und verwenden uni- und bivariate Kennwerte (z.B. Mittelwerte, Streumaße, Korrelationen, Indexwerte) und interpretieren sie angemessen</li> </ul>	
<i>Zufallsmodellierung</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ modellieren mehrstufige Zufallsversuche durch endliche Ergebnismengen und nutzen geeignete Darstellungen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel)</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ unterscheiden Wahrscheinlichkeitsaspekte (frequentistisch, axiomatisch usw.) und beschreiben typische Verständnisschwierigkeiten im Umgang mit dem Zufallsbegriff</li> <li>▪ rechnen und argumentieren mit Wahrscheinlichkeiten</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ rechnen und argumentieren mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und stochastischer Unabhängigkeit</li> <li>▪ erläutern inhaltlich das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen und den zentralen Grenzwertsatz und deren Konsequenzen</li> <li>▪ verwenden diskrete Verteilungsmodelle</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ verwenden kontinuierliche Verteilungsmodelle</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ kennen Beispiele für die Anwendung von Stochastik (z.B. Markow-Ketten) in verschiedenen Wissenschaften (Ökonomie, Physik, ...)</li> <li>▪ schätzen in Zufallssituationen Parameter aus Daten</li> <li>▪ führen Hypothesentests durch und reflektieren deren zentralen Schritte und bestimmen Konfidenzintervalle</li> </ul>	
<i>Stochastische Anwendungen</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben Schritte klassischer Testkonstruktion und Beispiele für probabilistische Testverfahren</li> <li>▪ erläutern Unterschiede zwischen Bayes-Statistik und klassischen Testverfahren</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ verwenden Tabellenkalkulation und statistische Software zur Darstellung und explorativen Analyse von Daten</li> <li>▪ simulieren Zufallsversuche computergestützt</li> </ul>	
<i>Neue Medien</i>		

## Modellieren und Angewandte Mathematik – Anwenden von Mathematik

Die Wechselwirkung zwischen Mathematik und realer Welt spiegelt sich in der grundlegenden Idee des mathematischen Modellierens wieder. Dabei kann zum einen die mathematische Struktur im Vordergrund stehen und ihr Modellcharakter für Anwendungssituationen herausgestellt werden; dies erfolgt in den kanonischen Fachvorlesungen. Zum andern können außermathematische Probleme Anlässe zur Entwicklung neuer und Verknüpfung verschiedener mathematischer Theorieteile sein. Die Thematisierung solcher Prozesse ist charakteristisch für die Angewandte Mathematik. Außerdem führt der Umgang mit fehlerbehafteten empirischen Daten, mit Rechenungenauigkeiten und mit großen Datenmengen zu weiteren typischen Fragestellungen der Angewandten Mathematik.

<i>Bereiche</i>	<b>Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse</b>	
	Die Studierenden	
<i>Modellieren</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben anhand von Beispielen mathematisches Modellieren als einen mehrstufigen Prozess, der von einer realen Situation über ein reales Modell (unter mehreren möglichen) zu einem mathematischen Modell führt, das wiederum in der Realität geprüft wird</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ wenden mathematische Denkmuster und Darstellungsmittel auf praktische Probleme an</li> <li>▪ reflektieren die spezifischen Möglichkeiten (z.B. Prognosen) und Grenzen (z.B. Verkürzungen) mathematischen Modellierens</li> </ul>	
<i>Anwendungsbereiche</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben exemplarisch Modellbildungsprozesse in verschiedenen Problemfeldern und realen Kontexten, beispielsweise               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ physikalische und weitere naturwissenschaftliche Modelle</li> <li>○ Netzwerke und Graphen</li> <li>○ Optimierung (Lineare Optimierung, optimale Steuerungen)</li> <li>○ Nachrichtenübermittlung (Kryptographie)</li> <li>○ Bildgebende Verfahren (Computertomographie)</li> <li>○ Finanz- und Versicherungswesen</li> <li>○ Digitalisierung von Sprache und Musik</li> </ul> </li> </ul>	
<i>Numerik</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben an Beispielen, wie empirisch gewonnene Daten und numerische Rechnungen mit Fehlern behaftet sind, und schätzen deren Auswirkungen bei Modellierungen ein</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ verwenden Methoden (z.B. Iterationsverfahren) zur systematischen Verbesserung von Näherungswerten und erläutern die damit verbundenen Fragen (Schnelligkeit, Stabilität)</li> </ul>	
<i>Neue Medien</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ nutzen Software (CAS, Tabellenkalkulation, Geometriesoftware) zur Darstellung und Exploration mathematischer Modellierungen und als heuristisches Werkzeug zur Lösung von Anwendungsprobleme</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ kennen und reflektieren Fragen der Umsetzung numerischer Verfahren auf dem Computer (z.B. Komplexität, Genauigkeit)</li> </ul>	

## Fachdidaktische Kompetenzen

Die Fachdidaktik als Wissenschaft vom fachspezifischen Lernen zielt auf theoretische und empirische Erkenntnisse zu fachlichen Lehr- und Lernprozessen und ihren Bedingungen. Lehramtsstudierende erwerben

- in ihren fachwissenschaftlichen Studien fachbezogene Reflexionskompetenzen, die sie mit Blick auf ihr künftiges Berufsfeld in den fachdidaktischen Studien vertiefen,
- in ihren fachdidaktischen einschließlich der schulpraktischen Studien mathematikdidaktische Basiskompetenzen, insbesondere mathematikdidaktische diagnostische Kompetenzen, sowie theoretisch reflektierte mathematikunterrichtsbezogene Handlungskompetenzen.

Der Erwerb dieser Kompetenzen erfolgt in einem wissenschaftlichen Studium und wird in reflektierten Praxisphasen während des Studiums aufgebaut und in einer praxisbetonten Phase vertieft.

<i>Bereiche</i>	<b>Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse</b>
	Die Studierenden
<i>Fachbezogene Reflexionskompetenzen</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beschreiben spezifische Erkenntnisweisen des Faches Mathematik und grenzen sie gegen die anderer Fächer ab</li> <li>▪ reflektieren die Rolle und das Bild der Wissenschaft Mathematik in der Gesellschaft</li> </ul>
<i>Mathematikdidaktische Basiskompetenzen</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ kennen und bewerten Konzepte von „mathematischer Bildung“ und die Bedeutung des Schulfaches Mathematik für die Gesellschaft und die Schulentwicklung</li> <li>▪ verfügen über theoretische Konzepte zu zentralen mathematischen Denkhandlungen wie Begriffsbilden, Modellieren, Problemlösen und Argumentieren</li> <li>▪ beschreiben zu den zentralen Themenfeldern des Mathematikunterrichts               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ verschiedene Zugangsweisen, Grundvorstellungen und paradigmatische Beispiele</li> <li>○ begriffliche Vernetzungen, u.a. durch fundamentale Ideen</li> <li>○ typische Präkonzepte und Verstehenshürden</li> <li>○ Stufen der begrifflichen Strenge und Formalisierung und deren altersgemäße Umsetzungen</li> </ul> </li> <li>▪ stellen Verbindungen her zwischen den Themenfeldern des Mathematikunterrichts und ihren mathematischen Hintergründen</li> <li>▪ reflektieren die Rolle von Alltagssprache und Fachsprache bei mathematischen Begriffsbildungsprozessen</li> <li>▪ kennen und bewerten Konzepte für schulisches Mathematiklernen und -lehren (genetisches Lernen, entdeckendes Lernen, dialogisches Lernen usw.)</li> <li>▪ beschreiben Möglichkeiten fächerverbindenden Lernens im Verbund mit dem Fach Mathematik</li> <li>▪ bewerten Bildungsstandards, Lehrpläne und Schulbücher und nutzen sie reflektiert für die Unterrichtsgestaltung</li> <li>▪ rezipieren fachdidaktische Forschungsergebnisse und vernetzen sie mit ihren Kenntnissen</li> </ul>
<i>Mathematikdidaktische diagnostische Kompetenzen</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ beobachten, analysieren und interpretieren mathematische Lernprozesse</li> <li>▪ kennen und reflektieren Ziele, Methoden und Grenzen der Leistungsüberprüfung und -bewertung im Mathematikunterricht</li> <li>▪ kennen Grundlagen empirischer Kompetenzmessung und können deren Ergebnisse handhaben (z.B. Intelligenz- und Schulleistungstests, zentrale Lernstandserhebungen)</li> <li>▪ führen strukturierte Interviews und informelle Gespräche als individualdiagnostische Verfahren durch und werten sie aus</li> <li>▪ konstruieren diagnostische Aufgaben und analysieren und interpretieren Schülerleistungen</li> <li>▪ beschreiben Unterrichtsarrangements und -methoden mit diagnostischem Potenzial</li> <li>▪ erstellen auf diagnostischen Ergebnissen beruhende Förderpläne für einzelne Schüler oder Lerngruppen</li> <li>▪ beschreiben Konzepte und Untersuchungen von Rechenschwäche und mathematischer Hochbegabung</li> </ul>

<i>Mathematik- unterrichts- bezogene Handlungs- kompetenzen</i>	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ kennen wesentliche Elemente von Lernumgebungen und nutzen diese zur zielgerichteten Konstruktion von Lerngelegenheiten:<ul style="list-style-type: none"><li>○ Aufgaben als Ausgangspunkt für Lernprozesse</li><li>○ Lehr- und Lernmaterialien als Mittel fachlichen Lernens</li><li>○ Möglichkeiten, Bedingungen und Grenzen des Computereinsatzes im Mathematikunterricht</li><li>○ Unterrichtsmethoden in ihrer fachspezifischen Ausformung</li></ul></li><li>▪ fachspezifische Interventionsmöglichkeiten von Lehrpersonen (z.B. Umgang mit vorläufigen Begriffen, Reaktion auf Fehler, heuristische Hilfen)</li><li>▪ kennen und bewerten Verfahren für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht (z.B. Lernausgangsdiagnosen, Prozesshilfen, natürlich differenzierende Aufgaben und Lernarrangements)</li><li>▪ kennen Verfahren qualitativer und quantitativer empirischer Unterrichtsforschung im Fach Mathematik (z.B. Fallstudien, Feldstudien) und können Ergebnisse bei der Gestaltung von Lernprozessen berücksichtigen</li><li>▪ reflektieren den Umgang mit Verfahren empiriegestützter Unterrichtsentwicklung (z.B. durch zentrale Leistungsmessung)</li></ul>
---	--