

Stochastik: Markow-Ketten: das rote Chamäleon

Jan 12

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Uni Lüneburg, www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt

5. Dezember 2004

Das rote Chamäleon Marki will helfen die Begriffe zu klären. Es bestimmt seine Farbe für das Wochenende mit einem Zufallsversuch: es zieht Kugeln aus einem Sack.

In dem Sack sind $\{r,r,g,g,g,b\}$, also 2 rote 3 grüne und eine blaue Kugel.

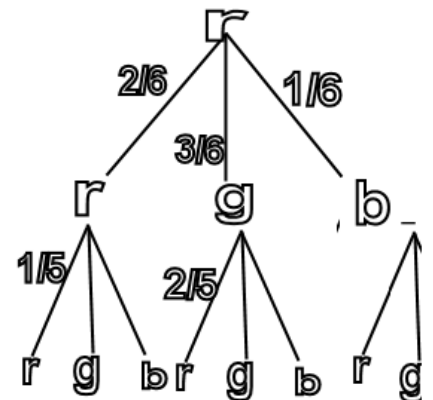
Fall 1)

Freitags ist Marki immer rot. Für Samstag und dann für Sonntag zieht er ohne zurückzulegen seine Farben.

Diesen Prozess kann man durch einen Zustandsgraphen beschreiben mit den Zuständen r,g,b, aber man muss für Samstag Übergangspfeile zeichnen und für Sonntag nochmals einen "vollständigen Satz" Pfeile. Also hängt die gültige Beschriftung davon ab, ob der Übergang im ersten Takt, am Samstag, stattfindet oder im zweiten Takt, am Sonntag. Es handelt sich also um eine **inhomogene**

Markowkette und das besser passende Denkwerkzeug ist das Baumdiagramm. Hiermit wird die Frage: "mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Marki am Sonntag blau" beantwortet durch:

$$P(\text{sonntag blau}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

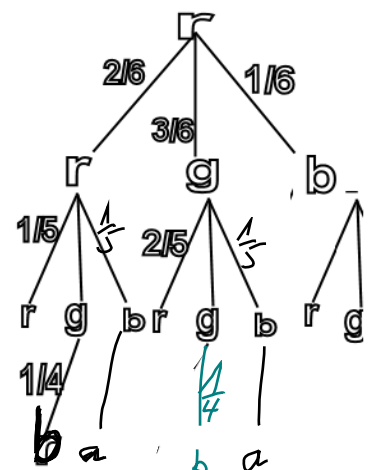


Fall 2)

Freitags ist Marki immer rot. Für Samstag, dann für Sonntag und dann Montag für den Wochenbeginn zieht er **ohne Zurückzulegen** seine Farben.

Diesen Prozess kann man **nicht** durch einen Zustandsgraphen mit den Zuständen r,g,b beschreiben, denn bei der Montagswahl hängt z.B. die Übergangswahrscheinlichkeit von g nach r von der "Vorgeschichte" ab. Dieser Prozess hat keine Markow-Kopplung. Der **Prozess ist keine Markowkette**.

Das Baumdiagramm ist das einzige anschauliche Denkwerkzeug. Die Frage: "mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Marki am Montag blau?"



Wird mit a=(r oder g) beantwortet durch: $P(\text{Montag blau}) = P(aab) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. Alternativ

$$P(\text{Montag blau}) = 1 - P(baa, aba, aaa) = 1 - \left(\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Fall 3) Marki zieht mit Zurücklegen. Dann handelt es sich im zweistufigen und im dreistufigen Fall um eine **homogene Markowkette**, denn die Übergangswahrscheinlichkeiten hängen nicht von Wahltag ab.

Zeichnen Sie den Zustandsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an. Bestimmen Sie die Farbverteilung für seine "Arbeitskleidung am Montag".

Fall 4) Er wählt jeden Tag auf diese Weise seine Farbe. Welche Farbverteilung hat er am ersten Donnerstag? Wenn er nun auch Freitag eine Kugel zieht u.s.w. Welche Farbverteilung stellt sich dann auf "lange Sicht" ein?

Mathix wird Marki zu Weihnachten besuchen. Mit welcher W. wird Marki blau sein?