Markovkette2x2 Handwerker

Markovkette mit zwei Zuständen Haftendorn 2011

Handwerker-Bespielund vollständige theoretische Behandlung

$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\0.1 & 0.9\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\0.1 & 0.9\end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{aa}^2 \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.52 & 0.48\\0.16 & 0.84\end{bmatrix}$

$\mathbf{aa}\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.52 & 0.48\\0.16 & 0.84\end{bmatrix}$ Bestimmung der Eigenwerte, obwohl es EW 1 immer gibt.

$\mathbf{ak}:=\begin{bmatrix}0.3-k & 0.7\\0.8 & 0.2-k\end{bmatrix}$ $\det(\mathbf{ak}) \blacktriangleright k^2-0.5\cdot k-0.5$

$\text{solve}(\det(\mathbf{ak})=0,k) \blacktriangleright k=-0.5 \text{ or } k=1.$ aa hat tatsächlich den ew k=1

Berechnung eines stochastischen ev zum ew k=1

$\mathbf{v}:=[x\ \ y] \blacktriangleright [x\ \ y]$

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [0.7\cdot x+0.1\cdot y\ \ \ 0.3\cdot x+0.9\cdot y]$

$\mathbf{gls}:=\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{aa}=\mathbf{v}) \blacktriangleright \{0.7\cdot x+0.1\cdot y=x, 0.3\cdot x+0.9\cdot y=y\}$

$\text{solve}(\text{augment}(\mathbf{gls},\{x+y=1\}),x,y) \blacktriangleright x=0.25 \text{ and } y=0.75$

Probe $[0.25\ \ 0.75]\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [0.25\ \ 0.75]$ Dies ist also der Eigenvektor zu Eigenwert 1

Er ist der stabile Vektor des Markovprozesses $\mathbf{aa}^{20} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.250027 & 0.749973\\0.249991 & 0.750009\end{bmatrix}$

1.1

Markovkette mit zwei Zuständen allgemein mit p und q Haftendorn 2011

$\mathbf{at}:=\begin{bmatrix}1-p & p\\q & 1-q\end{bmatrix}$ Allgemeine Eigenwertbestimmug: determinante(A−k E)

$\mathbf{al}:=\begin{bmatrix}1-p-k & p\\q & 1-q-k\end{bmatrix}$ $\det(\mathbf{al}) \blacktriangleright k^2+k\cdot(p+q-2)-p-q+1$

$\text{solve}(\det(\mathbf{al})=0,k) \blacktriangleright k=-(p+q-1) \text{ or } k=1$ at hat **immer ew 1.**

Berechnung eines stochastischen ev zum ew k=1

Berechnung des Eigenvektors $\mathbf{v}:=[x\ \ y]$ $\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{at} \blacktriangleright [(1-p)\cdot x+q\cdot y\ \ \ p\cdot x+(1-q)\cdot y]$

$\mathbf{glsa}:=\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{at}=\mathbf{v}) \blacktriangleright \{(1-p)\cdot x+q\cdot y=x, p\cdot x+(1-q)\cdot y=y\}$

$\mathbf{lo}:=\text{solve}(\text{augment}(\mathbf{glsa},\{x+y=1\}),x,y) \blacktriangleright x=\frac{q}{p+q} \text{ and } y=\frac{p}{p+q}$

Also $\mathbf{evt}:=\begin{bmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{bmatrix}$ Dies ist also der **allgemeine stochastische Eigenvektor**

mit Zeilensumme 1. Er hat die Richtung $\mathbf{eri}:=[q\ \ p]$ Probe dafür $\mathbf{eri}\cdot\mathbf{at} \blacktriangleright [q\ \ p]$

Probe allgemein $\begin{bmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{at} \blacktriangleright \begin{bmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{bmatrix}$ Eigenvektoren sind immer nur bis auf einen

Faktor bestimmt (eigentlich: Eigenraum), eri ist kein stochastischer Vektor, Faktor (p+q)

1.2

Weiter in obigem Beispiel

Dieses theoretische Ergebnis passt zu der obigen speziellen Rechnung

$\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{aa}[1,2]}{\mathbf{aa}[1,2]+\mathbf{aa}[2,1]} & \frac{\mathbf{aa}[2,1]}{\mathbf{aa}[1,2]+\mathbf{aa}[2,1]}\end{bmatrix} \blacktriangleright [0.75\ \ 0.25]$

$\mathbf{heute}:=[1\ \ 0] \blacktriangleright [1\ \ 0]$ $\quad \mathbf{morgen}:=\mathbf{heute}\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [0.7\ \ 0.3]$

Verschiedene Möglichkeiten $\mathbf{ümo}:=\mathbf{morgen}\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [0.52\ \ 0.48]$ $\quad \mathbf{heute}\cdot\mathbf{aa}^2 \blacktriangleright [0.52\ \ 0.48]$

Definiert auf der Tabellenseite **ü1** $\blacktriangleright \{0.52,0.48\}$ **ü2** $\blacktriangleright \{0.412,0.588\}$ **ü3** $\blacktriangleright \{0.3472,0.6528\}$

ü4 $\blacktriangleright \{0.30832,0.69168\}$ **ü5** $\blacktriangleright \{0.284992,0.715008\}$

Als Liste gemacht

$\mathbf{all}:=\text{seq}(\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\mathbf{heute}\cdot\mathbf{aa}^k),k,0,6) \blacktriangleright \begin{bmatrix}1 & 0\\0.7 & 0.3\\0.52 & 0.48\\0.412 & 0.588\\0.3472 & 0.6528\\0.30832 & 0.69168\\0.284992 & 0.715008\end{bmatrix}$

$\mathbf{aa}^{40} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.25 & 0.75\\0.25 & 0.75\end{bmatrix}$ $\quad (\mathbf{aa}[1,2]+\mathbf{aa}[2,1])\cdot100\cdot\mathbf{aa}^{40} \blacktriangleright \begin{bmatrix}10. & 30.\\10. & 30.\end{bmatrix}$ Auf lange Sicht sind sie von 40

Tagen 10 tage da und 30 Tage nicht da. Dieses entspricht den theoretisch berechneten Werten.

1.3

	A merk...	B heut	C mor	D ü1	E ü2	F ü3	G ü4	H ü5
◆		=mat▸list(	=mat▸list(	=mat▸list(	=mat▸list(	=mat▸list(	=mat▸list(	mat▸list
1	da	1	0.7	0.52	0.412	0.3472	0.30832	0.284992
2	nicht da	0	0.3	0.48	0.588	0.6528	0.69168	0.715008

H ü5:=mat▸list(heute·aa⁶)

1.4

$\mathbf{all} \blacktriangleright \begin{bmatrix}1 & 0\\0.7 & 0.3\\0.52 & 0.48\\0.412 & 0.588\\0.3472 & 0.6528\\0.30832 & 0.69168\\0.284992 & 0.715008\end{bmatrix}$ Um die Spalten darstellen zu können, muss transponiert werden.

$\mathbf{allt}:=\mathbf{all}^T \blacktriangleright \begin{bmatrix}1 & 0.7 & 0.52 & 0.412 & 0.3472 & 0.30832 & 0.284992\\0 & 0.3 & 0.48 & 0.588 & 0.6528 & 0.69168 & 0.715008\end{bmatrix}$ (T-Zeichen bei Sonderzeichen)

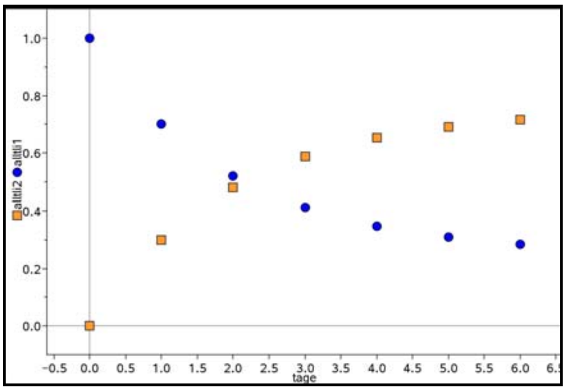
Für die "Daten"-Auffassung muss eine Liste aus der Matrix gemacht werden.

$\mathbf{alltli1}:=\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\mathbf{allt}[1]) \blacktriangleright \{1,0.7,0.52,0.412,0.3472,0.30832,0.284992\}$

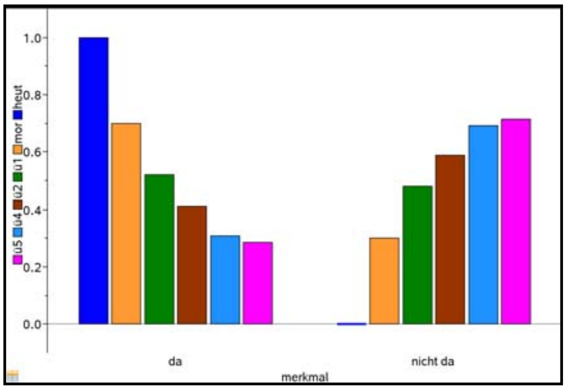
$\mathbf{alltli2}:=\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\mathbf{allt}[2]) \blacktriangleright \{0,0.3,0.48,0.588,0.6528,0.69168,0.715008\}$

$\mathbf{tage}:=\text{seq}(i,i,0,6) \blacktriangleright \{0,1,2,3,4,5,6\}$

1.5



1.6



1.7

Längere Liste $\text{seq}(\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\mathbf{heute}\cdot\mathbf{aa}^k),k,0,30) \blacktriangleright \begin{bmatrix}1 & 0\\0.7 & 0.3\\0.52 & 0.48\\0.412 & 0.588\\0.3472 & 0.6528\\0.30832 & 0.69168\\0.284992 & 0.715008\\0.270995 & 0.729005\\0.262597 & 0.737403\\0.257558 & 0.742442\\0.254535 & 0.745465\\0.252721 & 0.747279\\0.251633 & 0.748367\\0.25098 & 0.74902\\0.250588 & 0.749412\\0.250353 & 0.749647\\0.250212 & 0.749788\\0.250127 & 0.749873\\0.250076 & 0.749924\\0.250046 & 0.749954\\0.250027 & 0.749973\\0.250016 & 0.749984\end{bmatrix}$

1.8