Markovkette2x2 Handwerker

Markovkette mit zwei Zuständen Haftendorn 2011

Handwerker–Bespielund vollständige theoretische Behandlung

$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$ $\mathbf{aa}^2 \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.52 & 0.48\\ 0.16 & 0.84\end{bmatrix}$

$\mathbf{aa}\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.52 & 0.48\\ 0.16 & 0.84\end{bmatrix}$ Bestimmung der Eigenwerte, obwohl es EW 1 immer gibt.

$\mathbf{ak}:=\begin{bmatrix}0.3-k & 0.7\\ 0.8 & 0.2-k\end{bmatrix}$ $\det(\mathbf{ak}) \blacktriangleright k^2-0.5\cdot k-0.5$ ⚠

$\text{solve}(\det(\mathbf{ak})=0,k) \blacktriangleright k=^{-}0.5 \text{ or } k=1.$ ⚠ aa hat tatsächlich den ew k=1

Berechnung eines stochastischen ev zum ew k=1

$\mathbf{v}:=[x \quad y] \blacktriangleright [x \quad y]$

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [0.7\cdot x+0.1\cdot y \quad 0.3\cdot x+0.9\cdot y]$

$\mathbf{gls}:=\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{aa}=\mathbf{v}) \blacktriangleright \{0.7\cdot x+0.1\cdot y=x,0.3\cdot x+0.9\cdot y=y\}$

$\text{solve}(\text{augment}(\mathbf{gls},\{x+y=1\}),x,y) \blacktriangleright x=0.25 \text{ and } y=0.75$

Probe $[0.25 \quad 0.75]\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [0.25 \quad 0.75]$ Dies ist also der Eigenvektor zu Eigenwert 1

Er ist der stabile Vektor des Markovprozesses $\mathbf{aa}^{20} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0.250027 & 0.749973\\ 0.249991 & 0.750009\end{bmatrix}$

1.1

Markovkette mit zwei Zuständen allgemein mit p und q Haftendorn 2011

at$:=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$ Allgemeine Eigenwertbestimmug: determinante(A−k E)

al$:=\begin{bmatrix} 1-p-k & p \\ q & 1-q-k \end{bmatrix}$ $\det(\textbf{al}) \blacktriangleright k^2+k\cdot(p+q-2)-p-q+1$ ⚠

$\text{solve}(\det(\textbf{al})=0,k) \blacktriangleright k=-(p+q-1) \text{ or } k=1$ ⚠ at hat **immer ew 1.**

Berechnung eines stochastischen ev zum ew k=1

Berechnung des Eigenvektors **v**$:=[x \quad y]$ **v·at** $\blacktriangleright [(1-p)\cdot x+q\cdot y \quad p\cdot x+(1-q)\cdot y]$

glsa$:=\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\textbf{v}\cdot\textbf{at}=\textbf{v}) \blacktriangleright \{(1-p)\cdot x+q\cdot y=x, p\cdot x+(1-q)\cdot y=y\}$

lo$:=\text{solve}(\text{augment}(\textbf{glsa},\{x+y=1\}),x,y) \blacktriangleright x=\frac{q}{p+q} \text{ and } y=\frac{p}{p+q}$

Also **evt**$:=\begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{bmatrix}$ Dies ist also der **allgemeine stochastische Eigenvektor**

mit Zeilensumme 1. Er hat die Richtung **eri**$:=[q \quad p]$ Probe dafür **eri·at** $\blacktriangleright [q \quad p]$

Probe allgemein $\begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{bmatrix}\cdot\textbf{at} \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{bmatrix}$ Eigenvektoren sind immer nur bis auf einen Faktor bestimmt (eigentlich: Eigenraum), eri ist kein stochastischer Vektor, Faktor (p+q)

1.2

Weiter in obigem Beispiel

Dieses theoretische Ergebnis passt zu der obigen speziellen Rechnung

$$\left[\frac{\mathbf{aa}[1,2]}{\mathbf{aa}[1,2]+\mathbf{aa}[2,1]} \quad \frac{\mathbf{aa}[2,1]}{\mathbf{aa}[1,2]+\mathbf{aa}[2,1]}\right] \blacktriangleright [0.75 \quad 0.25]$$

$\mathbf{heute}:=[1 \quad 0] \blacktriangleright [1 \quad 0]$ $\mathbf{morgen}:=\mathbf{heute}\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [0.7 \quad 0.3]$

Verschiedene Möglichkeiten $\mathbf{ümo}:=\mathbf{morgen}\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [0.52 \quad 0.48]$ $\mathbf{heute}\cdot\mathbf{aa}^2 \blacktriangleright [0.52 \quad 0.48]$

Definiert auf der Tabellenseite $\mathbf{ü1} \blacktriangleright \{0.52,0.48\}$ $\mathbf{ü2} \blacktriangleright \{0.412,0.588\}$ $\mathbf{ü3} \blacktriangleright \{0.3472,0.6528\}$

$\mathbf{ü4} \blacktriangleright \{0.30832,0.69168\}$ $\mathbf{ü5} \blacktriangleright \{0.284992,0.715008\}$

Als Liste gemacht

$$\mathbf{all}:=\text{seq}(\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\mathbf{heute}\cdot\mathbf{aa}^k),k,0,6) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & 0.3 \\ 0.52 & 0.48 \\ 0.412 & 0.588 \\ 0.3472 & 0.6528 \\ 0.30832 & 0.69168 \\ 0.284992 & 0.715008 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{aa}^{40} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$ $(\mathbf{aa}[1,2]+\mathbf{aa}[2,1])\cdot 100\cdot\mathbf{aa}^{40} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 10. & 30. \\ 10. & 30. \end{bmatrix}$ Auf lange Sicht sind sie von 40 Tagen 10 tage da und 30 Tage nicht da. Dieses entspricht den theoretisch berechneten Werten.

1.3

	A merk…	B heut	C mor	D ü1	E ü2	F ü3	G ü4	H ü5	I	J
◆		=mat▸list(	=mat▸list(	=mat▸list(	=mat▸list(	=mat▸list(	=mat▸list(	mat▸list		
1	da	1	0.7	0.52	0.412	0.3472	0.30832	0.284992		
2	nicht da	0	0.3	0.48	0.588	0.6528	0.69168	0.715008		
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										

H **ü5**:= $\text{mat}\blacktriangleright\text{list}\left(\textbf{heute}\cdot\textbf{aa}^{6}\right)$

1.4

$$\textbf{all} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & 0.3 \\ 0.52 & 0.48 \\ 0.412 & 0.588 \\ 0.3472 & 0.6528 \\ 0.30832 & 0.69168 \\ 0.284992 & 0.715008 \end{bmatrix}$$

Um die Spalten darstellen zu können, muss transponiert werden.

$$\textbf{allt}:=\textbf{all}^{T} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.52 & 0.412 & 0.3472 & 0.30832 & 0.284992 \\ 0 & 0.3 & 0.48 & 0.588 & 0.6528 & 0.69168 & 0.715008 \end{bmatrix}$$

(T−Zeichen bei Sonderzeichen)

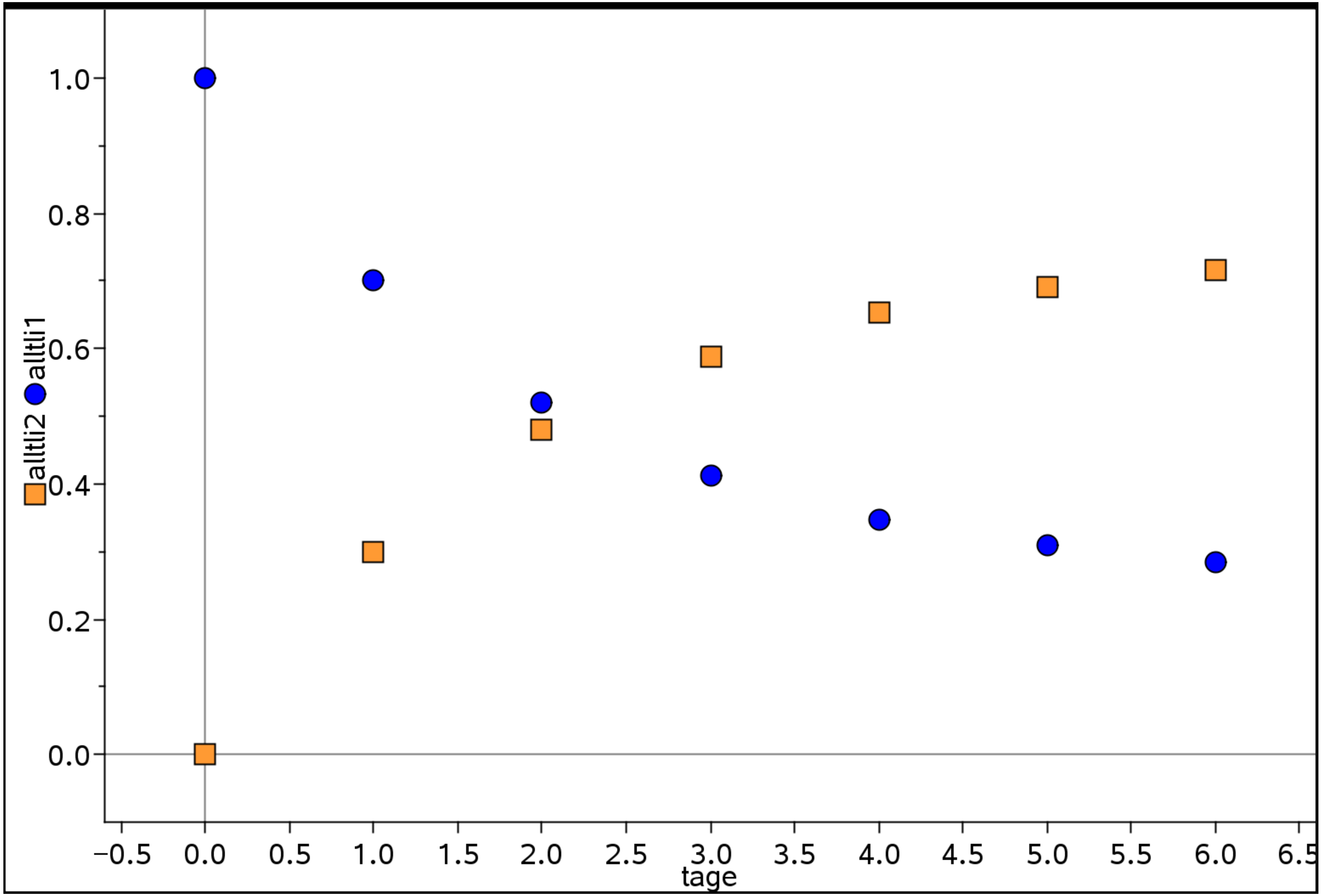
Für die "Daten"−Auffassung muss eine Liste aus der Matrix gemacht werden.

$\textbf{alltli1}:=\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\textbf{allt}[1]) \blacktriangleright \{1,0.7,0.52,0.412,0.3472,0.30832,0.284992\}$

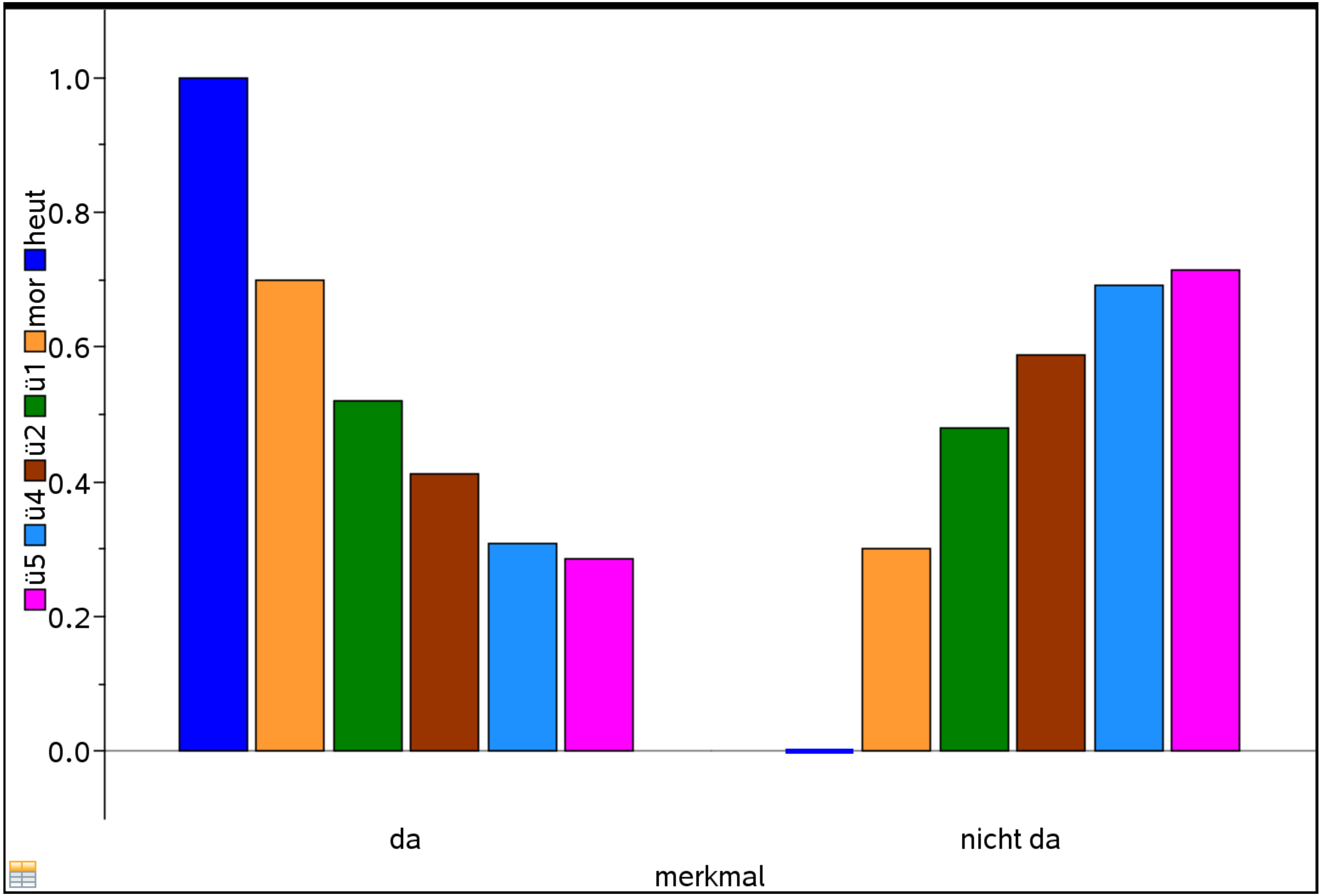
$\textbf{alltli2}:=\text{mat}\blacktriangleright\text{list}(\textbf{allt}[2]) \blacktriangleright \{0,0.3,0.48,0.588,0.6528,0.69168,0.715008\}$

$\textbf{tage}:=\text{seq}(i,i,0,6) \blacktriangleright \{0,1,2,3,4,5,6\}$

1.5


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
allti2
allti1
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
6.5
tage

1.6



1.7

Längere Liste $\mathrm{seq}\left(\mathrm{mat}\blacktriangleright\mathrm{list}\left(\mathbf{heute}\cdot\mathbf{aa}^{k}\right),k,0,30\right)$ ▸

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & 0.3 \\ 0.52 & 0.48 \\ 0.412 & 0.588 \\ 0.3472 & 0.6528 \\ 0.30832 & 0.69168 \\ 0.284992 & 0.715008 \\ 0.270995 & 0.729005 \\ 0.262597 & 0.737403 \\ 0.257558 & 0.742442 \\ 0.254535 & 0.745465 \\ 0.252721 & 0.747279 \\ 0.251633 & 0.748367 \\ 0.25098 & 0.74902 \\ 0.250588 & 0.749412 \\ 0.250353 & 0.749647 \\ 0.250212 & 0.749788 \\ 0.250127 & 0.749873 \\ 0.250076 & 0.749924 \\ 0.250046 & 0.749954 \\ 0.250027 & 0.749973 \\ 0.250016 & 0.749984 \end{bmatrix}$$

1.8