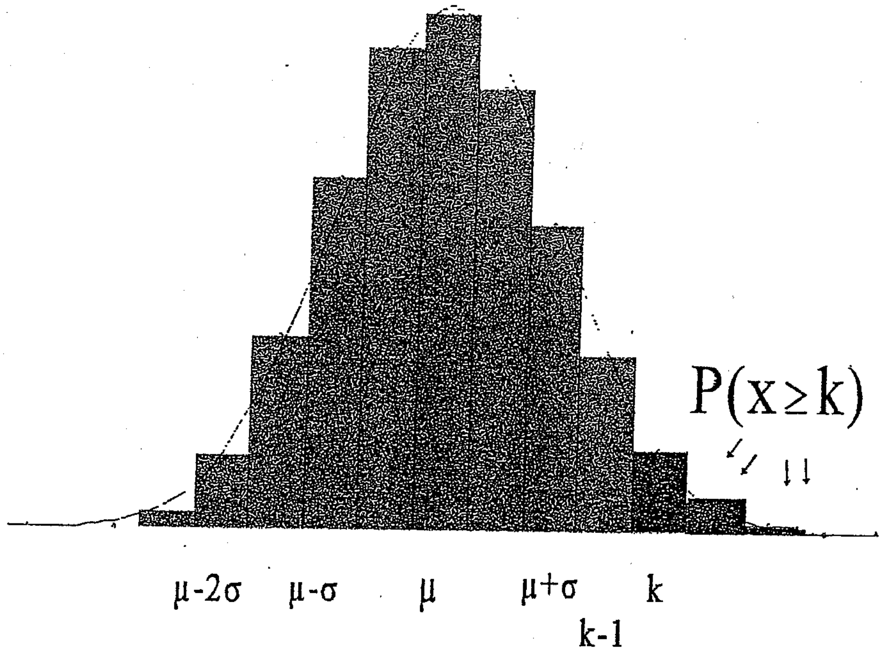
Statistik



ergänzt 2011

Prof. Dr. Dörte Haftendorn 1995-2002 2009 Ha

für Lehramt.

Universität Lüneburg ~~FH NON~~ Automatisierungstechnik

~~Haftendorn@fhnon.de~~

www.doerte-haftendorn.de ~~www.fhnon.de/mupad-club~~

mit Aufgaben u. Lösungen

http://haftendorn.uni-lueneburg.de

www.mathematik-verstehen.de Haftendorn@uni.leuphana.de

Statistik- Inhaltsverzeichnis

	Kurskonzept, mit Bezug zu diesen Seiten			Simulationen
	Allgemeine Begriffe		21a	
	Bäume, Bayes-Formel, Vierfeldertafeln, Teil 1		21b	
	Bäume, Bayes-Formel, Vierfeldertafeln, Teil 2		21c	
	Bäume, Bayes-Formel, Vierfeldertafeln, Teil 3		21d	+e Test
	Binomial- Und Normalverteilung		22a	Krüge
	Genauigkeit bei z-sigma-Umgebungen		22b	
	Näherungen für die Binomialverteilung		22c	
	z-Sigma-Umgebungen, Konfidenzintervall		22z	
	Tabelle der Binomialverteilung 1-10 //kum 10, 100		23a	
	Tabelle der Binomialverteilung// kum 1-9, 20, 50		23b	
	Tabellen der Normalverteilung		24	
	Hypothesentest Zusammenfassung		25	
Einschub	**Hypothesentest Erkärungen**			
	Vorlieben von Küken? Einführungsbeispiel	Hyp	1	
	Küken-Test, Formulierungen einer Antwort	Hyp	2	
	Hypothesentest (binomial) klar dargestellt	Hyp	3	
Test/Fehler	Hotel "Goldener Würfel", Test	Hyp	4	Hyp4a
	Operations-Charakteristiken, OC-Kurven	Hyp	5	
	Was sagt ein Signifikanztest aus?	Hyp	6	
	Tutorskript für Ti 92, interaktiver Hyp-Test	Hyp	7	
	Tutorskript für Ti 92, interaktiver Binomialverteilung	Hyp	8	
	Stetige Messgrößen Grundlage, zu 26	Hyp	9	
Hauptteil weiter				
	Stetige Messgrößen und Normalverteilung		26	
	F-Test nach Fisher für Standardabweichungen		27	
	Beispiel mit Tabellenkalkulation zu 27 / 28	zu 27/28		
	t-Test für Mittelwerte von Messgrößen		28	
	Poisson-Verteilung für seltene Ereignisse		29	
	Chi-Quadratverteilung		30	
	Chi-Quadratverteilung Bespiel für einen Test		31	
	Benford Verteilung		32/33	
	Aufgaben			
Approximation		App		
	Internetseiten dazu, interaktiv im Internet, download			
	Beweise zur Regression, min. Quadratfehler	App	9	
	Erläuterung zu Begriffen und Beweise	App	10	
	Ausgleichsgeraden, Regression	App	11a	
	Ausgleichskurven	App	11b	

Zwei-Variablen-Statistik mit Ti Nspire 2011

Lügt man mit Statistik?

Dr. Dörte Haftendorn Sept 97

Beurteilende Statistik als Schwerpunkt im Stochastikkurs Gliederung 1

I. Einleitung
   A. Warum ist beurteilende Statistik so wichtig?
      1. Didaktische Argumente (Modellbildung,........)
      2. Leichte Sammlung und Verfügbarkeit von Daten
      3. In fast allen Studien- und Ausbildungsgängen kommt Statistik vor:
         a. Psychologie, Medizin, Sport (4 Sem!!), Sozialpädagogik,...
         b. Wirtschaft, ... ,Geographie,...
         c. Technik,...,Naturwissenschaft....
      4. Hohe Studienabbrecherquoten mit dem Grund: Nichtbewältigung der Statistik
      5. **Mangel an bürgerlicher Entscheidungskompetenz**, wenn seriöser Gebrauch der Statistik von unseriösem nicht unterschieden werden kann.
   B. Wann und inwiefern lügt man mit Statistik und wann nicht?
      Um diese Frage zu beantworten, braucht man Sachkenntnis.
      Wer sowieso lügt, lügt auch mit Statistik.
      Nur der Kundige kann Lügen entlarven.
      Statistische Aussagen enthalten stets ein Irrtumsrisiko, dessen Größe angegeben werden muss.
      Dennoch zu irren heißt nicht lügen.

II. Unterrichtskonzept für einen Kurs "**Beurteilende Statistik**"
   A. Grundlagen
      1. Grundbegriffe
         a. Wahrscheinlichkeit
         b. Ereignisse, und , oder
         c. mehrstufiger Zufallsversuch, Baumdiagramm
         d. Zufallsgröße, Erwartungswert
      2. Kombinatorik
         a. Umsortieren von n unterschiedlichen Objekten (n!)
         b. Herausgreifen von k Objekten aus n Objekten mit Beachtung der Reihenfolge (Siegerehrung)
         c. Ankreuzen von k Plätzen unter n Plätzen (Lotto)

B. Binomialverteilung
1. Bernoullikette
a. n-stufiger ja/nein-Versuch
b. konstante Erfolgswahrscheinlichkeit p, $q=1-p$
2. konkrete Fragestellungen
a. X = Zahl der Erfolge
b. $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, Histogramm
c. $\mu = n\,p$, $\sigma^2 = n\,p\,q$
d. $P(X \le k)$, am Histogramm, Tabellengebrauch
3. Heuristisch: Bedeutung der 2σ, 3σ- Grenzen

C. **Hypothesentest mit Binomialverteilung** (bei Bernoulliketten)
1. Einführungsbeispiele mit mehreren n
2. Hypothesentest, Herausarbeitung des Verfahrens
a. Eine Forschungshypothese H_1 und eine Nullhypothese H_0 werden formuliert
b. Beobachtet werden k Erfolge unter n Versuchen
c. Die Irrtumswahrscheinlichkeit α wird bestimmt
(1) Das kritische Gebiet besteht aus der Beobachtung und allen im Sinne der Forschungshypothese noch günstigeren Fällen.
(a) Ein einseitiger Test ist zulässig, wenn von vornherein die Richtung der Abweichung klar ist.
(b) Anderenfalls ist der Test zweiseitig, das kritische Gebiet besteht dann aus zwei Teilen, i.a. ist $\alpha_{zweiseitig} = 2\,\alpha_{einseitig}$.
(2) α ist die Wahrscheinlichkeit, dass X "rein zufällig" in das kritische Gebiet fällt, wenn H_0 gilt.
d. Ist α klein, nimmt man die Forschungshypothese H_1 auf dem Signifikanzniveau α an, anderenfalls ist nichts erwiesen.
3. Weiterführungen
a. Umgang mit Tabellen der Binomialverteilung
b. Nutzen der z-σ-Grenzen
(1) Dazu die Gaußsche Glockenkurve als normierte Näherung für Binomialverteilungen nahebringen
(2) Erläuterung der z-α-Tabellen
c. Konfidenzintervall (näherungsweise)

d. "Rückwärts"-Fragestellungen
   (1) Wie viele Erfolge muss man unter n Versuchen mindestens haben, um auf einem Signifikanzniveau von mindestens α behaupten zu können, dass H_1 gilt?
   (2) Aufstellung von "Entscheidungsregeln" für oft in gleicher Art durchgeführte Bernoulliketten.

e. Alternativtests

f. OC-Kurven, Verdeutlichung der Testgüte

D. Poissonverteilung (bei Bernoulliketten)
   1. Erklärung als Näherung der Binomialverteilung für "seltene Fälle"
   2. Leicht abgewandelte Rechnungen und Ablesungen
   3. Dieselben Schritte des Hypothesentestens

E. Normalverteilung (diskreter Fall, Bernoulliketten)
   1. Erklärung als Näherung der Binomialverteilung für große n und nicht zu seltene p (Laplacebedingung erfüllt)
   2. Leicht abgewandelte Rechnungen und Ablesungen
   3. Dieselben Schritte des Hypothesentestens

F. Normalverteilung (stetiger Fall, Messgrößen)
   1. Messgrößen als Zufallsgrößen
   2. Mittelwert, empirische Standardabweichung
   3. Hypothesentest mit Messgrößen, Standardabweichung muß vorher bekannt sein.
      a. Prüfgrößenbestimmung z
      b. Tabellenablesung
      c. reichhaltige Beispiele aus Technik und Wissenschaft

G. t-Verteilung (Messgrößen) Testet bei unbekanntem σ mit der empirischen Standardabweichung
   1. Prüfgrößenbestimmung t, Freiheitsgrade
   2. Entscheidung wie bei jedem Test

H. F-Verteilung (Messgrößen) Testet, ob sich zwei Standardabweichungen unterscheiden.
   1. Prüfgrößenbestimmung F, Freiheitsgrade
   2. Entscheidung wie bei jedem Test

I. χ^2 - Verteilung Testet, ob zwei Verteilungen zueinander passen
   1. Prüfgrößenbestimmung χ^2 , Freiheitsgrade
   2. Entscheidung wie bei jedem Test

III. Lügt man mit Statistik?

A. Es gibt sinnvollen Gebrauch von Statistik:

1. Zentraler Begriff ist **Signifikanz**.
2. Wer weder das Signifikanzniveau noch die zu seiner Berechnung nötigen Daten (insbesondere den Stichprobenumfang) nennt, ist nicht ernstzunehmen.
3. **Grundeinsicht:** eine beobachtete Abweichung braucht längst nicht eine signifikante Abweichung zu sein. (Kardinalfehler vieler "Tabellenbetrachtungen" im z.B. Erdkundeunterricht.
4. Die Angabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit ist kein Eingeständnis von Schwäche, sondern ein Gebot der Ehrlichkeit.
5. Die Maximalgröße der Irrtumswahrscheinlichkeit richtet sich nach dem Problem. Mehr als 5% werden i.a. nicht akzeptiert.
6. Tritt der Irrtum dann tatsächlich ein, so ist das kein Grund zur Verdammung dessen der sich geirrt hat. **Er hat dann nicht gelogen,** sondern sich angemessen in einer grundsätzlich nicht völlig sicheren Situation verhalten

B. **Aufgaben des Unterrichts in Beurteilender Statistik:**

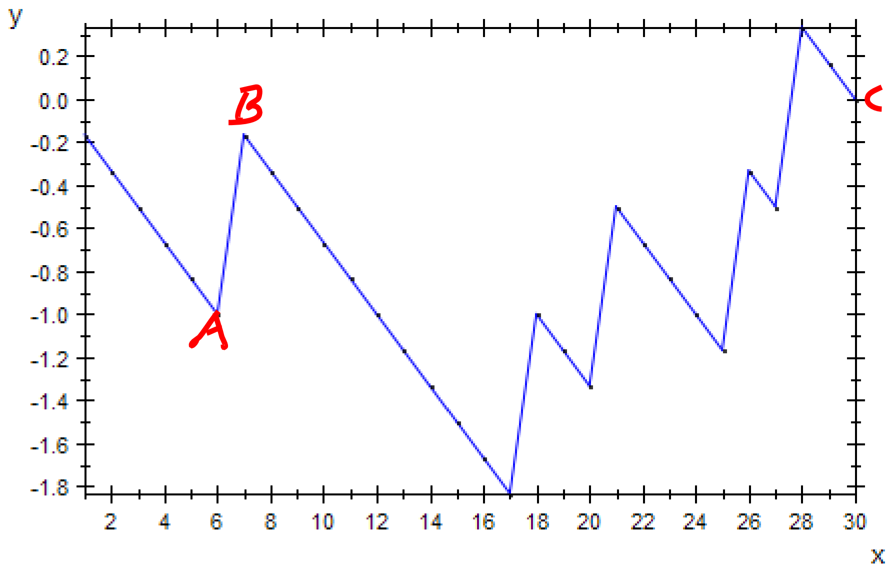
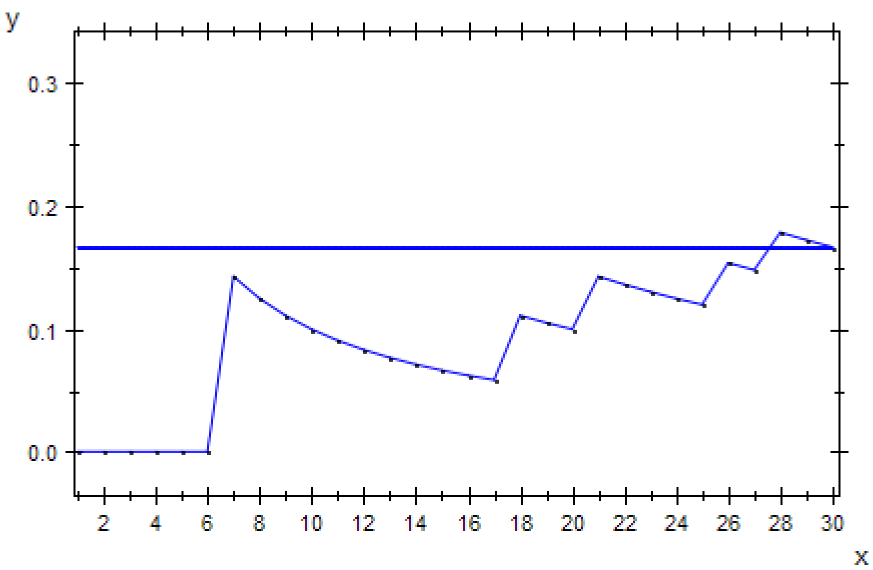
1. Stets sind die Voraussetzungen auf die Aufgabe bezogen zu erörtern und zu prüfen.
2. Die Hypothesen sind sorgfältig in Worten und mathematischen (Un-)Gleichungen zu formulieren.
3. Rechnungen sind sinnvoll und nötig, aber nicht alleiniges Ziel.
4. Antworten sind auszuformulieren.

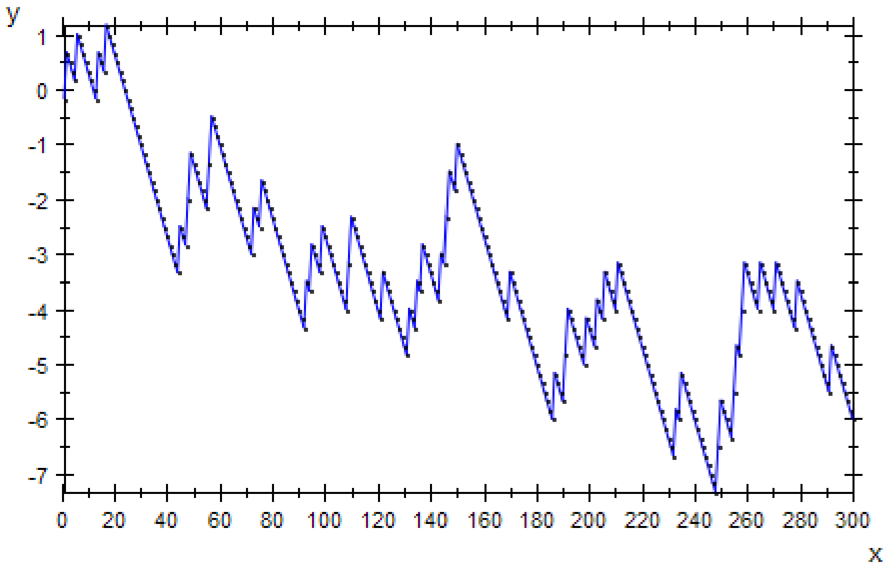
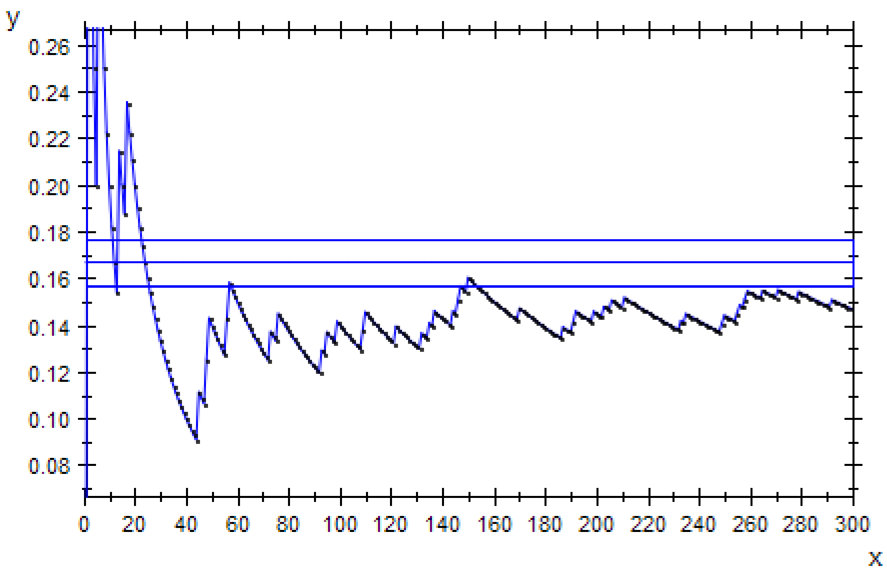
C. **Schwierigkeiten in Unterricht und Klausur:**

1. Das Sprachniveau ist entschieden höher als sonst im MU.
2. Der Lehrer muss (wie Deutschlehrer immer) Formulierungen beurteilen. An seine eigene Denkgenauigkeit werden hohe Anforderungen gestellt.
3. Die Schule kann nur exemplarisch arbeiten. Dennoch sind die etwas hergesuchten Alternativtests wenig geeignet, die Wichtigkeit des Signifikanzbegriffs zu transportieren.

D. **Wenn überhaupt etwas vor statistischen Lügen schützen kann, dann sind es Kenntnisse in beurteilender Statistik.**

Simulationen einer Bernoullikette, Würfeln

sim(1/6,30,0.01,1)  k = 0 0 0 0 =1 A	Ein echter Würfel wird gewürfelt. k ist die absolute Anzahl der Sechsen. p=1/6 nach rechts ist die Zahl x der Würfe aufgetragen. sim(p,n,eps, deltay) Ordinate: Absoluter Abstand vom Erwartungswert k-x*p
Werte: -1/6,-2/6,-3/6,-4/6,-5/6,-6/6, C 1-7/6, 1-8/6,......,1-17/6, 2-18/6,.......5-30/6 B n=1 1 K=2	
 **[30, 0], [30.0, 0.1666666667],0.1666666667**	Ordinate: relative Häufigkeit k/i Gerade= Erwartungswert p $= \frac{1}{6}$
Bei diesem Experiment war die Wurffolge: aaaaaa6aaa aaaaaaa6aa 6aaaa6a6aa Die relativen Häufigkeiten waren also 0,0,0,0,0,0,1/7, 1/8, 1/9,....1/17, 2/18, 2/19, 2/20, 3/21, 3/22, 3/23, 3/24, 3/25, 4/26, 4/27, 5/28, 5/29, 5/30	6=Es war eine 6 a=Es war andere Z.

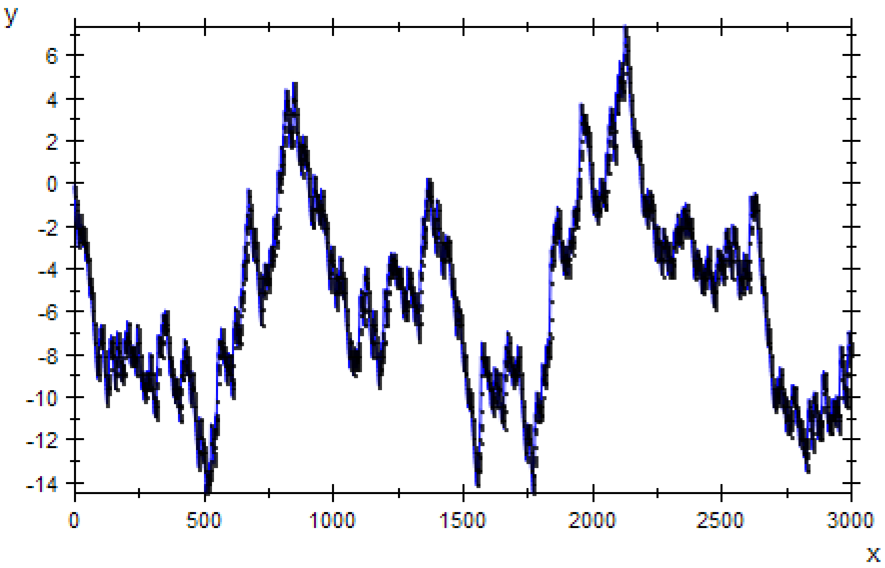
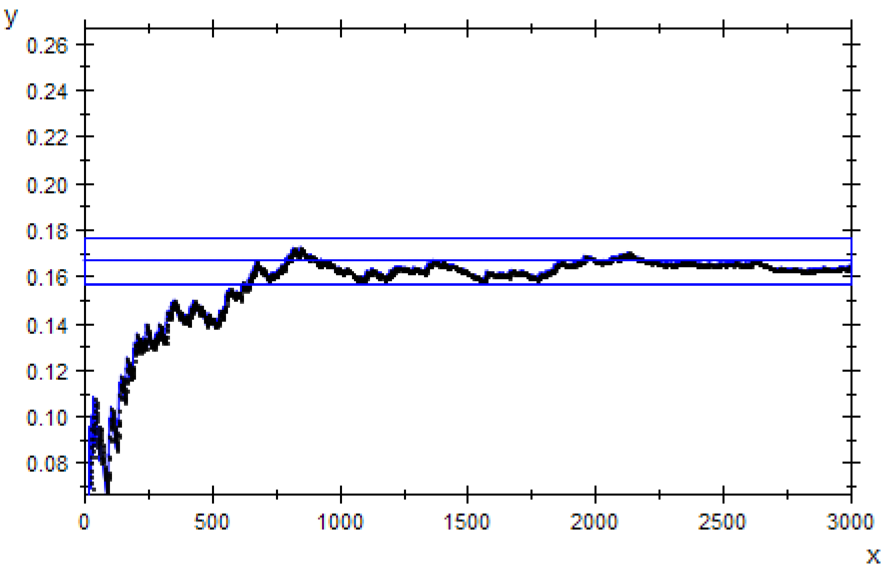
<table>
<tr>
<td>sim(1/6,300,0.01,0.1)

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

[300, -6], [300.0, 0.1466666667], 0.1666666667</td>
<td>Hier liegt man bei 300 Wurf noch um 2%-Punkte unter p</td>
</tr>
</table>

Wenn man hier den letzten Wert als im Sinne einer frequentistischen Wahrscheinlichleit (siehe hier letzte Seite) als Näherung für die wahre Wahrscheinlichkeit einer Sechs genommen hätte, hätte man sich also um 2 % verschätzt.

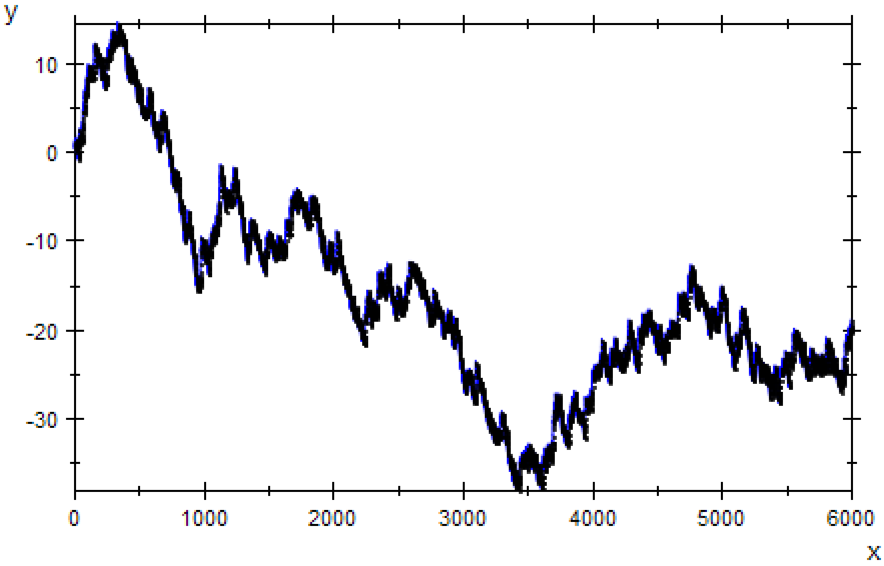
Es ist klar, dass man Experimente beim exakten Würfel nicht nötig hat, denn hier kann man die Laplace-Wahrscheinlichkeit als 1/6 bestimmen. Das heißt, es sind 6 Ereignisse gleichwahrscheinlich, also entfällt auf jedes Ergebnis 1/6.

Mit der Methode: "Konfidenzintervall bestimmmen"

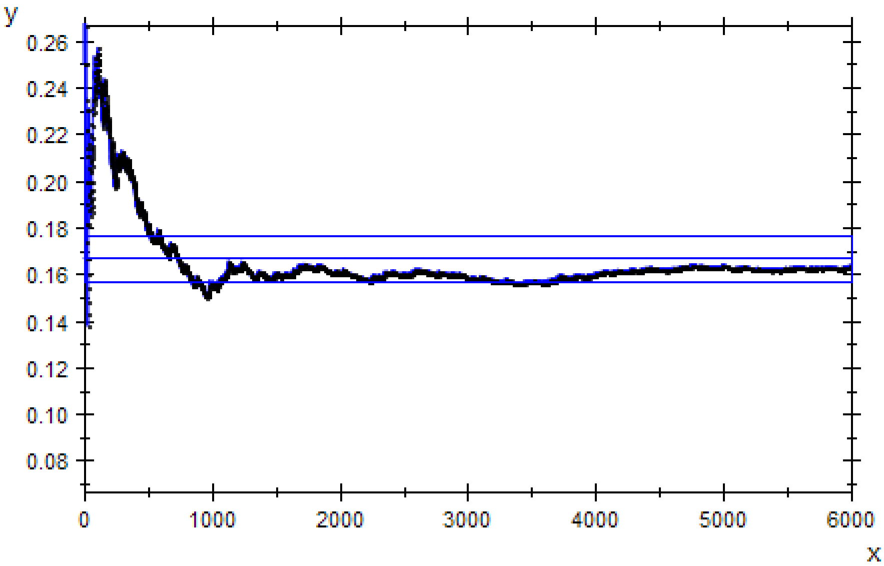
<table>
<tr>
<td>sim(1/6,3000,0.01,0.1)

</td>
<td>Bei 3000 Wurf werden die absoluten Abweichungen vom Erwartungswert größer, hier bis -14</td>
</tr>
<tr>
<td>

[3000, -8], [3000.0, 0.164], 0.1666666667</td>
<td>Die relativen Häufigkeiten pendeln sich aber schon ab etwa n=700 in einem 1%-Streifen ein.</td>
</tr>
</table>

sim(1/6,6000,0.01,0.1)

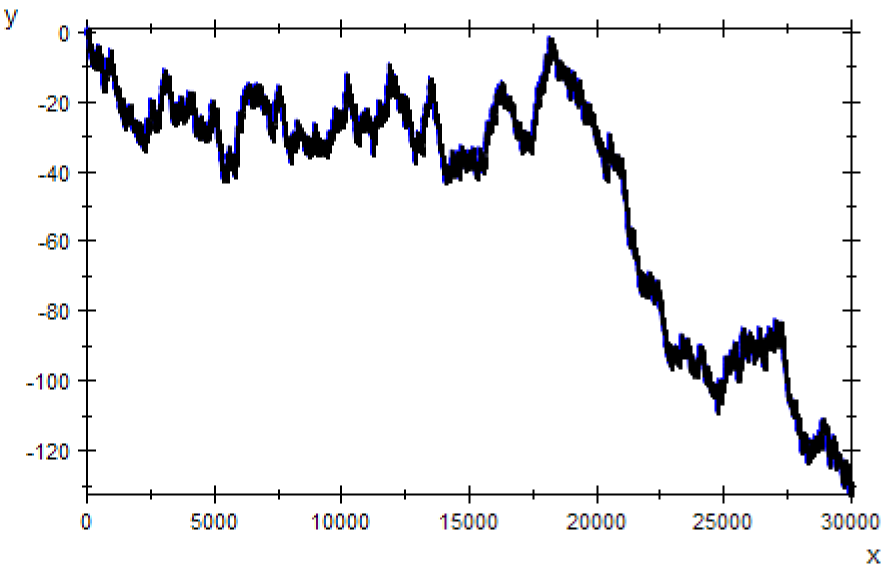
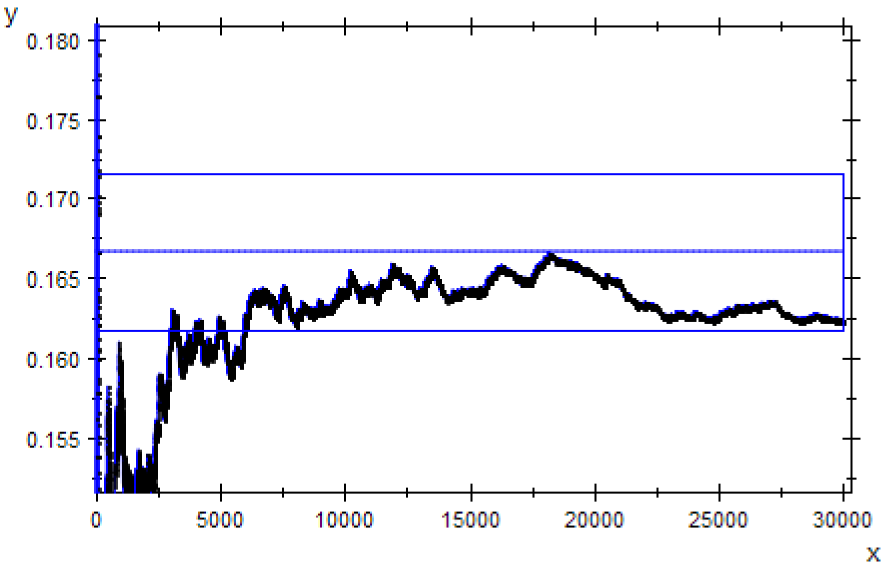


Bei diesem n=6000-Experiment kommen etwa bei 3500 Wurf Abweichungen von fast 40 zustande



[6000, -19], [6000.0, 0.1635], 0.1666666667

und der 1%-Streifen wird nach unten eine Weile lang verlassen

sim(1/6,30000,0.01,0.1) 	Wenn man nun meint, bei 30000 Wurf ist nun endlich alles "sicher", so sieht man hier , dass die Abweichung auf 132 geklettert ist.
 [30000, -132], [30000.0, 0.1622666667], 0.1666666667	Nun gut, aber die relative Häufigkeit benimmt sich dennoch "anständig" Hier ist der Streifen 0,5% breit. Aber merke: besser als 0,5% ist man auch bei 30000 Wurf noch nicht unbedingt.

Empirisches Gesetz der großen Zahl:
Mit wachsender Versuchsanzahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit.

Man erhält so eine "freqentistische" Wahrscheinlichkeit, von der mann hoftt, dass sie der dem Versuch "innewohnenden", "objektiven" Wahrscheinlichkeit nahe kommt.

Simulationen mit Verteilungen

Simulationen   Haftendorn 2011

In dieser Datei sollen Zufallslisten mit 100 einträgen erstellt werden, die auf jeweils auf einer anderen Währscheinlichkeitsverteilung beruhen.

Die Listen erstllt man übersichtlich im Tabbellen-Fenster= Data&Statistics

1. Spalte: In Zelle a1 die 1 geschrieben, in Zelle a2 "=1+a1" -ohne die Anführungszeichen. Dann diese Zelle angeklickt und am rechten unteren Eckknopf bis Zeile 100 nach untern gezogen. Dieser Vorgang heißt "Formel nach unten kopieren". Dann stehen die Zahlen 1 bis 100 in der ersten Spalte.

2. Spalte: Alternativ dazu: In das alleroberste Feld den Namen der gewünsten Liste schreiben, hier nr. In das Feld darunter schreiben =seq(j, j, 1,100) Enter

Es wird dann von allein geschrieben nr:=seq(j, j, 1, 100) und sofort stehen die 100 natürlichen Zahelne da.

3. Spalte: Name der Liste wuerfel Formel: =seq(randint(1,6),j,1,100)

Als erstes Argument im seq-Befehl steht die Formel, dann der Laufindex, Start und Ende. seq heißt übrigen engl. sequence=Folge

1.1

Simulationen mit Verteilungen

Die anderen Spalten unterscheiden sich von dieser Spalte nur durch den anderen Namen und die andere Formel im seq-Befehl:

Diskrete Verteilungen

Gleichverteilung randint(1,6) liefert eine natürliche Zufallszahl zw. 1 und 6.

randint(0,1) simuliert einen Münzwurf

Binomialverteilung randbin(n,p) , mit n-p-biniomialverteilte ZZ.

hier randbib(20,0.3)

Eigene Verteilung Astragali Merkmal mymerk, Wahrscheinlichkeiten myvert

Dazu musste eine eigene Funktion astragalus(r) definiert werden.

Stetige Verteilungen

Gleichverteilung rand() liefert eine ZZ im Intervall von 0 bis 1

Eine Dastellung lohnt nur, wenn man Klassen bildet, sonst ist fast jeder Wert einzeln. Man bruacht diese aber um eigene Verteilungen umzusetzen.

Normalverteilung randnorm(my,sigma) my-sigma-naormalverteilte ZZ

1.2

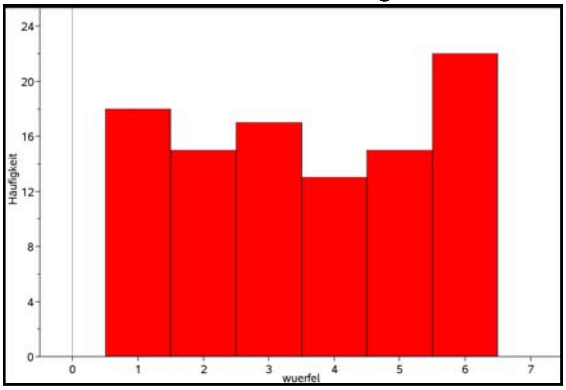
Simulationen mit Verteilungen

	A	B nr	C wuerfel	D muenze	E binomi	F normi	G	H	I	J
•			=seq(rand	=seq(rand	=seq(rand	=seq(rand				
1	1	1	6	0	11	530.189				
2	2	2	6	0	6	533.32				
3	3	3	1	0	6	545.502				
4	4	4	4	0	10	529.822				
5	5	5	3	1	5	533.884				
6	6	6	5	0	3	532.973				
7	7	7	1	1	5	535.441				
8	8	8	3	0	5	546.86				
9	9	9	6	1	7	547.418				
10	10	10	2	0	1	546.312				
11	11	11	5	0	6	532.231				
12	12	12	6	1	5	540.67				
13	13	13	2	1	6	542.199				
14	14	14	3	0	8	545.73				
15	15	15	1	1	3	529.08				
16	16	16	6	0	4	546.293				
17	17	17	1	0	4	542.114				
18	18	18	1	1	5	527.214				

A1 1

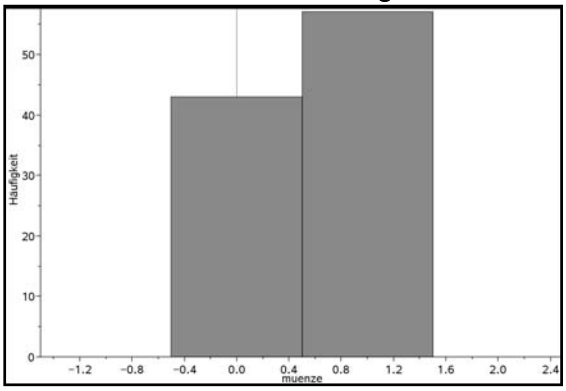
1.3

Simulationen mit Verteilungen



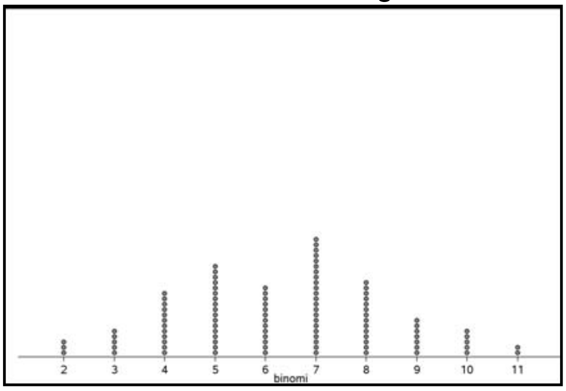
1.4

Simulationen mit Verteilungen



1.5

Simulationen mit Verteilungen



1.6

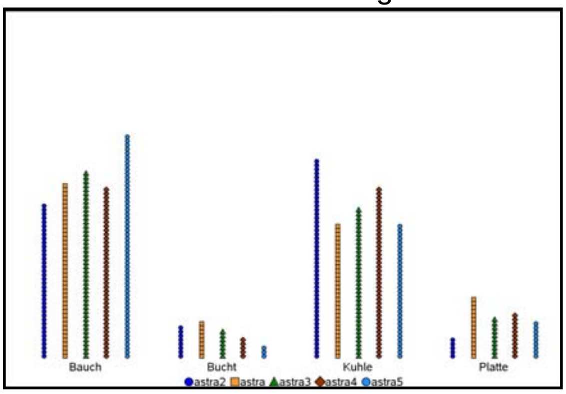
Simulationen mit Verteilungen

	A	B gleich	C astra	D astra2	E astra3	F astra4	G astra5	H	I	J
•		=seq(rand(	=seq(astra	=seq(astr	=seq(astr	=seq(astr	=seq(astr			
1		0.238159	Bauch	Kuhle	Platte	Bauch	Bauch			
2		0.84946	Bauch	Kuhle	Bauch	Kuhle	Kuhle			
3		0.734221	Bauch	Bauch	Bauch	Bucht	Bauch			
4		0.817171	Bauch	Bauch	Platte	Platte	Bauch			
5		0.978747	Kuhle	Bauch	Kuhle	Bauch	Kuhle			
6		0.122735	Bauch	Kuhle	Kuhle	Bauch	Kuhle			
7		0.169817	Bauch	Bauch	Bauch	Kuhle	Bauch			
8		0.656179	Kuhle	Bauch	Kuhle	Kuhle	Platte			
9		0.795331	Bauch	Bauch	Bauch	Bauch	Bauch			
10		0.321044	Kuhle	Kuhle	Bauch	Platte	Bauch			
11		0.206387	Bauch	Platte	Kuhle	Bucht	Bauch			
12		0.054145	Bucht	Kuhle	Bauch	Platte	Bauch			
13		0.507118	Kuhle	Kuhle	Bauch	Bauch	Bauch			
14		0.931562	Bauch	Bauch	Bauch	Bucht	Bauch			
15		0.506492	Kuhle	Platte	Bauch	Kuhle	Bauch			
16		0.763722	Bauch	Kuhle	Kuhle	Kuhle	Bauch			
17		0.893577	Kuhle	Kuhle	Platte	Bauch	Bauch			
18		0.356365	Bauch	Bauch	Kuhle	Bucht	Bauch			

A1

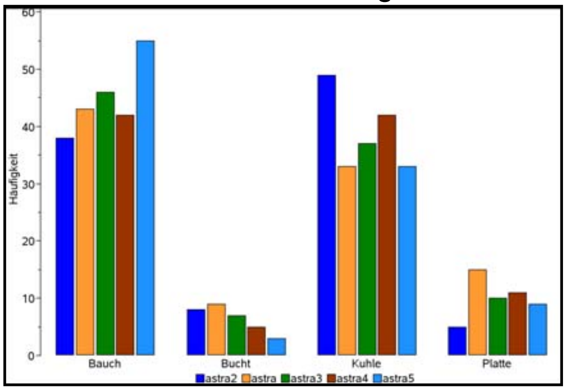
1.7

Simulationen mit Verteilungen



1.8

Simulationen mit Verteilungen



1.9

Simulationen mit Verteilungen

Definition einer eigenen Verteilung myvert am Beispiel "Astragali"

Die Merkmale seien

```
mymerk:={"Bauch","Platte","Kuhle","Bucht"} ▸ {"Bauch","Platte","Kuhle","Bucht"}
myvert:={0.48,0.1,0.37,0.07} ▸ {0.48,0.1,0.37,0.07}   ( Mein Buch Kap 10.2)
Define astragalus(r)=Func                                   ▸ Fertig
      If r≤myvert[1] Then
        Return mymerk[1]
      ElseIf r≤myvert[1]+myvert[2] Then
        Return mymerk[2]
      ElseIf r≤myvert[1]+myvert[2]+myvert[3] Then
        Return mymerk[3]
      Else
        Return mymerk[4]
      EndIf
     EndFunc
```

Für Verteilungen mit weingen Merkmalen kann man es so machen.

1.10

Simulationen mit Verteilungen

Definition einer eigener Klasseneinteilung für die Normalverteilten Werte.

min(**normi**) ▸ 529.159 max(**normi**) ▸ 549.748

Wertebereich also etwa 20 Einheiten. Da mache Klassenmitte 530, 532,...

und dann werden es 11 Klassen, in denen Werte sind. Um für andere Beispiele gerüstet zu sein, nehem ich noch ein paar mehr Klassen.

Ich definiere die Funktion normklass(r), die jedem "Messergebnis" r die Klassenmitte zuordnet.

Auf diese Weise habe ich mit seq(**normklass**(**normi**[j]) , j , 1,100))

die Liste der zugeordneten Klassenmitten erstellt. nun werden einige Klassen häufiger getroffen asl andere. daurch erst wird ein Histogramm sinnvoll.

Im Fenster Data&Statistics fürgt man als x-Variable erst normik ein. Später mit x-Variable hinzufügen noch die entsprechende Liste normi2k

Die beiden Histogramme werden übereinander dargestellt.

1.11

Simulationen mit Verteilungen

normklass 6/9

```
Define normklass(r)=
Func
Local i
For i,1,20
If r≤klasg[1] Then
    Return klasse[1]
ElseIf klasg[i]≤r and r≤klasg[i+1] Then
    Return klasse[i]
EndIf
 EndFor
 Return klasse[20]
EndFunc
```

1.12

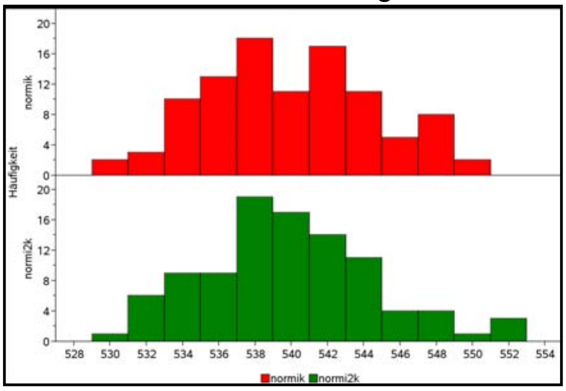
Simulationen mit Verteilungen

	A	B klasg	C klasse	D normik	E normi2	F normi2k	G	H	I	J
•				=seq(norm	=seq(rand	=seq(normkl				
1	1	525	526	542	538.152	542				
2	2	527	528	542	540.183	542				
3	3	529	530	544	538.474	550				
4	4	531	532	538	539.423	544				
5	5	533	534	538	537.56	540				
6	6	535	536	536	540.878	538				
7	7	537	538	532	538.259	532				
8	8	539	540	548	529.739	540				
9	9	541	542	540	535.909	538				
10	10	543	544	538	540.404	544				
11	11	545	546	542	536.289	548				
12	12	547	548	542	535.872	544				
13	13	549	550	544	540.395	538				
14	14	551	552	538	537.936	536				
15	15	553	554	540	542.758	542				
16	16	555	556	536	539.984	542				
17	17	557	558	534	532.962	532				
18	18	559	560	544	540.028	546				

A1 1

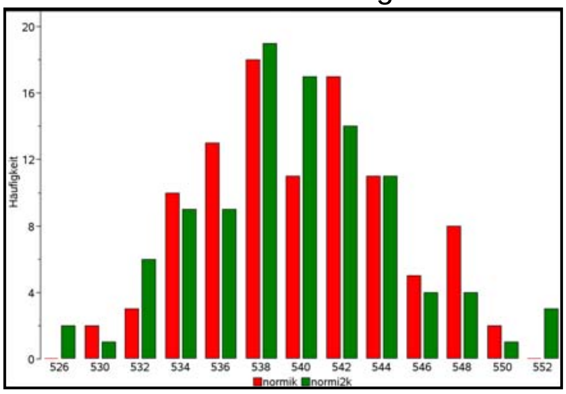
1.13

Simulationen mit Verteilungen



1.14

Simulationen mit Verteilungen



1.15

Simulationen mit Verteilungen

Möchte man die Diagramme so verschränkt darstellen wie beim Astragali-Teil,

dannmuss man auf einem Datenpunkt mit re-Maus "Kategorien erzwingen" anklicken. Die Farben sind in den Darstellungen übrigens gekoppelt.

Auswertung 1.Teil von Hand

mean(**normi**) ▸ 540.093 Mittelewert

max(**normi**) ▸ 549.748 max(**normik**) ▸ 550 varSamp(**normi**) ▸ 21.6232

min(**normi**) ▸ 529.159 min(**normik**) ▸ 530

Standardabweichung stDevSamp(**normi**) ▸ 4.65007 (das ist die mit (n-1)) für beurteilende Statistik. Sie ist der beste Schätzer auf die wahre Standardabweichungin der unbekannten Grundgesamtheit.

Dazu passt die Varianz varSamp(**normi**) ▸ 21.6232 $\sqrt{\text{varSamp}(\textbf{normi})}$ ▸ 4.65007

Wenn die betrachteten Werte die gesamte Beobachtung(Population)sind,

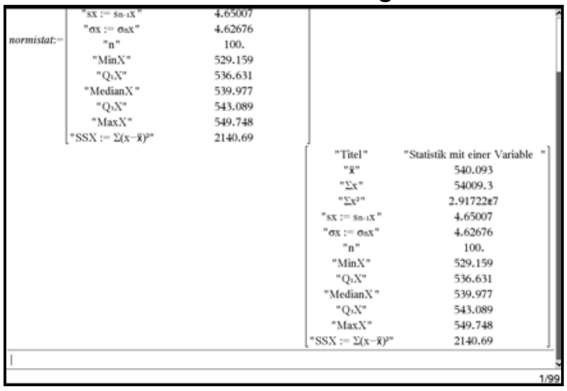
dann ist stDevPop(**normi**) ▸ 4.62676 die Standardabweichung.Dieser Wert ist also für die beschreibende Statistik.

1.16

Simulationen mit Verteilungen

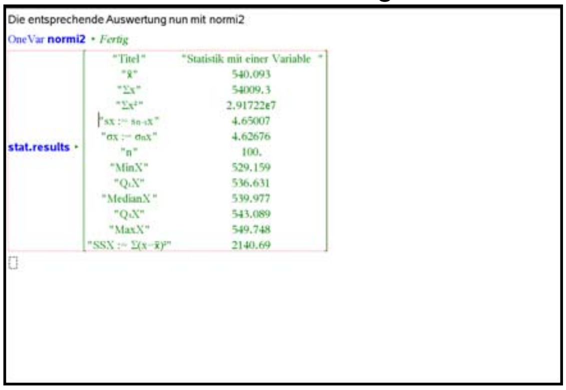
1.17

Simulationen mit Verteilungen



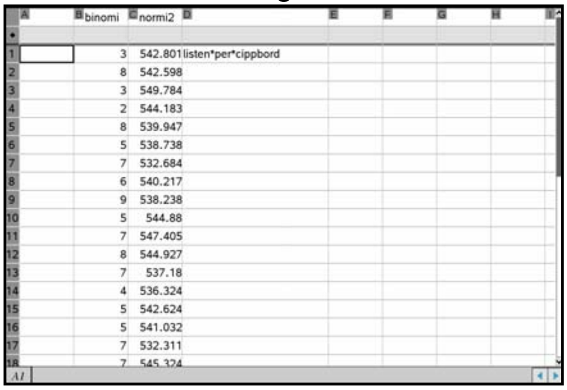
1.18

Simulationen mit Verteilungen



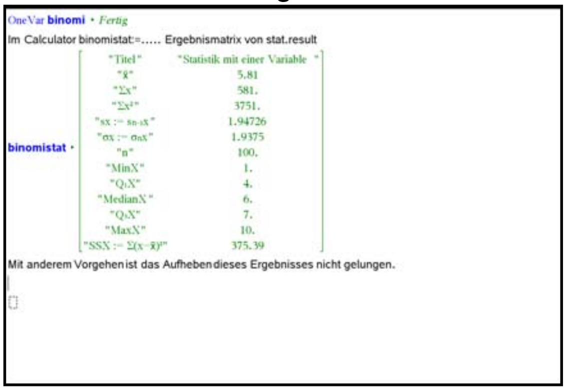
1.19

Weitere Auswertungen



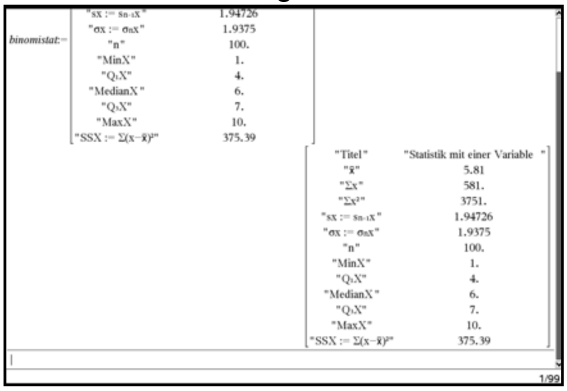
2.1

Weitere Auswertungen



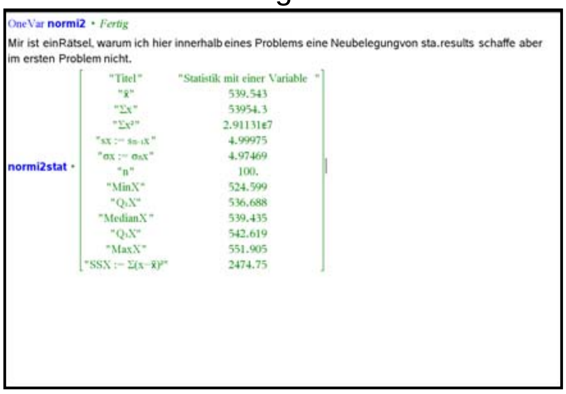
2.2

Weitere Auswertungen



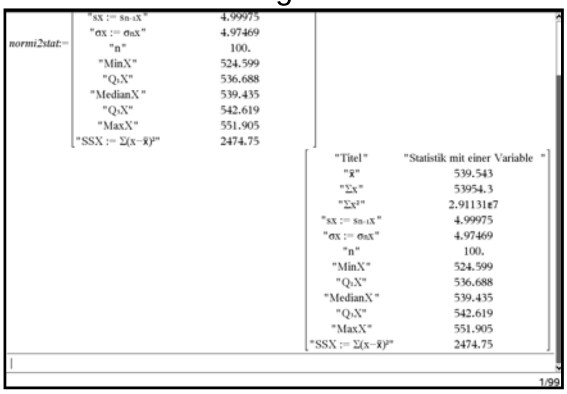
2.3

Weitere Auswertungen



2.4

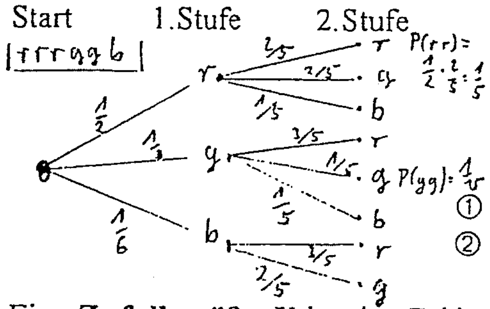
Weitere Auswertungen



2.5

Wir betrachten einen **Zufallsversuch**, bei dem verschiedene **Ausgänge** zufällig mit gewissen **Wahrscheinlichkeiten** eintreten. Ein oder mehrere solcher Versuchsausgänge bilden ein **Ereignis**. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis A eintritt, wird mit **P(A)** bezeichnet. (P von probability=Wahrscheinlichkeit)
Es ist P(unmögliches Ereignis)=0 und P(sicheres Ereignis)=1. Wahrscheinlichkeiten kann man in manchen Fällen durch Überlegung bestimmen, oft aber kann man sie nur näherungsweise als relative Häufigkeiten aus langen Versuchsserien ermitteln.

Bei mehrstufigen Zufallsversuchen hilft ein **Baumdiagramm**, die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

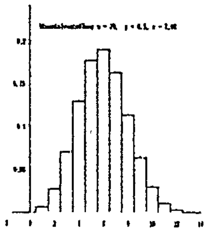


Von einem Knoten gehen Äste zu neuen Knoten, die die möglichen, oder zumindest die interessierenden Ereignisse der nächsten Stufe symbolisieren. An die Äste werden die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse geschrieben. Eine vom Start bis zur letzten Stufe führende Astfolge heißt Pfad. Es gelten die **Pfadregeln** :

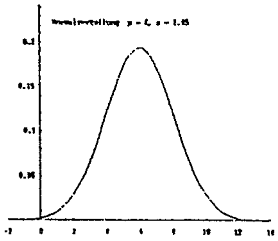
① Die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades werden multipliziert.
② Tragen mehrere Pfade zum interessierenden Ereignis bei, so werden deren Wahrscheinlichkeiten addiert. $P(rr \text{ oder } gg) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$

Eine **Zufallsgröße X** ist eine Zahl, deren Wert vom Zufall abhängt. Ist eine diskrete Zufallsgröße den Ereignissen eines Zufallsversuchs zugeordnet, so ist $p_i = P(X=X_i)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsgröße X den Wert X_i annimmt. Eine **vollständige Liste (X_i, p_i) heißt Verteilung der Zufallsgröße.** In diesem Fall ist die Summe aller p_i gleich 1. Es müssen also **alle** Versuchsausgänge erfaßt sein.

Eine diskrete Verteilung wird übersichtlich durch ein Histogramm dargestellt. Die Fläche aller Balken ist 1. "Diskret" heißt, daß die Zufallsgröße keine Zwischenwerte annehmen kann.



Eine stetige Verteilung wird durch eine Kurve dargestellt. Diese Kurve heißt Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Verteilung. Die Fläche unter ihr ist 1.

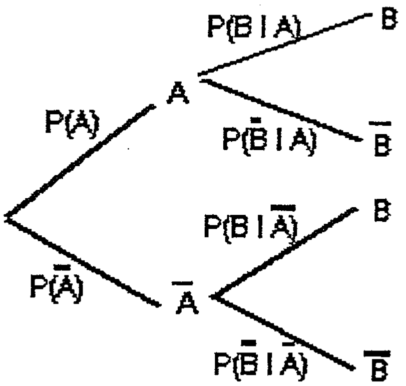


Ein spezieller Versuch, in dem eine Zufallsgröße Werte annimmt, kann eine spezielle Verteilung dieser Zufallsgröße haben. Es gibt aber in der Statistik viele **typische Verteilungen**, die häufig vorkommen, für die es Tabellen, theoretische Untersuchungen und Softwarewerkzeuge gibt. Die wichtigsten sind die Binomialverteilung (S. 22), die Normalverteilung (S.22/26), die Poissonverteilung (S.29), die Student-t-Verteilung (S.28), die F-Verteilung (S.27), und die Chi-Quadrat-Verteilung (S.30). Sie haben jeweils bestimmte Voraussetzungen und einen bestimmten Zweck.

Eine Verteilung eines bestimmten Typs wird durch **Parameter** charakterisiert:

Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße ist $\mu = E(X) = \sum_{\text{alle } i} X_i\, p_i$, die Varianz $\sigma^2 = VAR(X) = \sum_{\text{alle } i} (X_i - \mu)^2 \cdot p_i$, die Standardabweichung ist $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{VAR(X)}$. Bei einer stetigen Zufallsgröße gehen die Summen in Integrale über. Die griechischen Buchstaben werden genommen, wenn es sich, wie hier, um theoretische Größen der gesamten Verteilung handelt. Will man durch eine Stichprobe (Meßversuch) den Erwartungswert durch einen Mittelwert und die Standardabweichung durch eine "empirische" Standardabweichung näherungsweise bestimmen, so wählt man die Bezeichnungen $\overline{X}$ und s .(Seite 26).

Der Begriff **Stochastik** bürgert sich immer mehr ein. Er umfaßt Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Teilgebiet **desriptive (beschreibende) Statistik** wird heute von jeder Tabellenkalkulation wirksam unterstützt, denn es werden statistische Daten dargestellt (Diagramme) und statistische Maßzahlen errechnet (Mittelwert , Zentralwert,..., Standardabweichung, andere Streuungsmaße,....).
Will man aber **Schlüsse** aus den gesammelten Daten ziehen, sie also für irgendeine **Entscheidung** benutzen, so ist es **unerläßlich, beurteilende Statistik** (Inferenz-Statistik) zu betreiben. Man gelangt dann zu Aussagen, die die Zufälligkeit der Daten sinnvoll berücksichtigen. Den Grad der Verläßlichkeit der gezogen Schlüsse kann man durch Berechnung von Irrtumswahrscheinlichkeit, Signifikanzniveau oder statistischer Sicherheit angeben. Man unterscheidet grundsätzlich:
Schluß von der Gesamtheit auf die Stichprobe: Vorhersage von Eigenschaften, die eine Stichprobe mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit haben wird.
Schluß von der Stichprobe auf die Gesamtheit: Versuch, aus der Stichprobe etwas über die Gesamtheit zu erfahren. (z.B. Hypothesentest).



Es geht hier um den Zusammenhang von Baumdiagrammen und den in Statistik-Büchern gepriesenen "bedingten Wahrscheinlichkeiten", deren Behandlung von der "Bayes-Form" gekrönt wird. Als weiteres praktisches Werkzeug werden Vierfeldertafen gezeigt.

Bezeichnungen: $A, B, \ldots$ seien Ereignisse, $\bar{A}, \bar{B}, \ldots$ seien die Gegenereignisse.

$P(A) =$ Wahrscheinlichkeit, dass A (überhaupt) eintrifft, ohne weitere Bedingungen, "**a-priori**".

$P_A(B) = P(B|A) =$ Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn A schon eingetreten ist, "**a-posteriori**". Diese Wahrscheinlichkeiten stehen natürlicherweise an den Ästen der 2. Stufe.

1. Pfadregel Das Ereignis "A und B" tritt mit der Wahrscheinlichkeit ein, die man durch Multiplizieren längs des Pfades Start-A-B erhält, in Formeln

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Baumdiagramme haben keine Lobby, aber sie helfen sehr beim Verstehen.
Sofort überzeugend sind die 4-Felder-Tafeln, sie erledigen nicht alles, aber sie kommen doch recht selten vor.
Schick sehen dagegen die **Bayes-Formeln** aus, so richtig schön unverständlich.
Hier soll gezeigt werden, dass alle drei Werkzeuge sich gegenseitig erklären können, dass man insbesondere im Schulzusammenhang das meist unverstandene Anwenden der Bayes-Formeln wohl besser vermeidet. Wenn man sie denn aber nehmen will, kann man sie wie hier gezeigt erklären.
Oft kann man Wahrscheinlichkeiten besser verstehen, wenn man mit (fiktiven) Anzahlen denkt.
Eine solche Gesamtzahl sei n. Dann ist $n\ P(A) =$ Anzahl der Fälle, in denen A insgesamt eintritt.
Parallel zur Theorie sei hier ein **Beispiel** betrachtet:

Aufgabe:

Die **Studis in Jeriwan** hören eine Statistikvorlesung, aber nur 10% machen die Übungsaufgaben. Von diesen Fleißigen fallen nur 5% durch die Klausur, während von je 50 Durchgefallenen nur einer zu diesen Fleißigen gehört.
Frage zur Aufgabe: Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein fauler Studi durch?
A= Studi macht Aufgaben, *B*= Studi besteht die Klausur,

	B	$\bar{B}$	
A	95	5	100
$\bar{A}$			900
			1000

Zunächst kann man mit fiktiven n=1000 die ersten beiden Angaben unterbringen (schwarz, 1000,100,5).

	B	$\bar{B}$	
A	95	5	100
$\bar{A}$	655	245	900
	750	250	1000

Zu den 5 durchgefallenen Fleißigen gehören dann nach der letzten Angabe 5 mal 50 =250 Durchgefallene überhaupt. (Lila, 250).

Jetzt lassen sich leicht die fehlenden Zahlen ergänzen (braun, 245, 750,655).

Mit einer Vierfeldertafel (nach Fisher) kann man auf einleuchtende Weise das Zusammenwirken zweier Ereignisse A und B betrachten. Bei Verwendung absoluter Zahlen müssen alle Zeilen- und Spaltensummen stimmen.
Das ist bei der Tafel mit den Prozentwerten auch so, aber man hat mehr Mühe, die Eintrage zu bestimmen. Man kann sie aus der absoluten Tafel aber erstellen und umgekehrt.

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

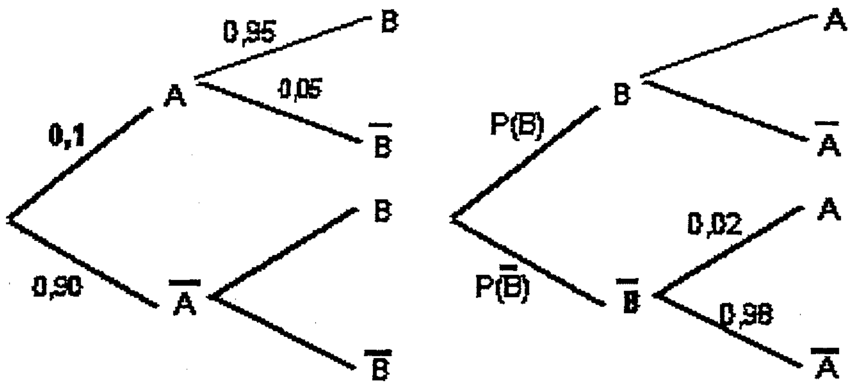
Nun kann man alle Verhältnisse berechnen:
$P(A)=\frac{100}{1000}=0{,}1=10\%$, $P(B|\overline{A})=\frac{655}{900}=0{,}728=72{,}8\%$ =W. ,dass ein Fauler besteht,
$P(A|B)=\frac{95}{750}=0{,}127=12{,}7\%$ =W, dass einer der bestanden hat, tatsächlich vorher Aufgaben gemacht hat.
Da nun unter denen, die bestanden haben, der Anteil der Fleißigen höher ist als unter den Studis insgesamt, kann man sagen, dass sich der Fleiß lohnt,
allgemein: die **Merkmale A und B sind "abhängig".**

$\boxed{P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}$ entspricht der letzten Berechnung,
und das ist schon die **1. Formel von Bayes.**

Aus der 4-Felder-Tafel kann man also alle vier bedingten Wahrscheinlichkeiten ausrechnen.
Wenn in den Spalten (oder den Zeilen) gleiche Verhältnisse vorliegen,
dann sind **A und B unabhängig**.
Also: wenn $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{1}=P(A)$ und damit $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$,

dann sind A und B unabhängig.

Behandlung der Aufgabe mit Baumdiagrammen

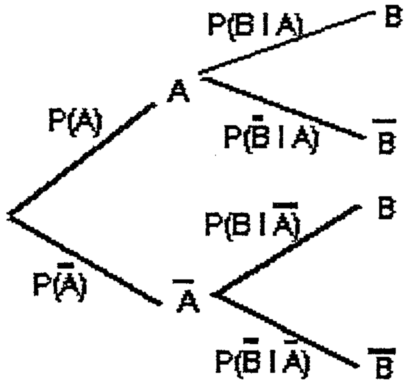


Diese beiden Baumdiagramme sind mit den Angaben der Aufgabe beschriftet.

Die 1. Pfadregel berechnet die W. der Und-Ereignisse.
Die Pfad-Wahrscheinlichkeit $P(A\cap\overline{B})$ muss in beiden Bäumen denselben Wert ergeben:

$P(A\cap\overline{B})=0{,}1\cdot 0{,}05=P(\overline{B})\cdot 0{,}02$ also folgt $P(\overline{B})=\dfrac{0{,}1\cdot 0{,}05}{0{,}02}=0{,}25$

Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Studi durchfällt.
Ebenso lassen sich jetzt alle anderen Wahrscheinlichkeiten berechnen.
Frage zur Aufgabe: Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein fauler Studi durch?
$0{,}9\cdot P(\overline{B}|\overline{A})=0{,}25\cdot 0{,}98$ Also $P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{0{,}25\cdot 0{,}98}{0{,}90}=0{,}272=27{,}2\%$.
Da ein fleißiger Studi nur mit 5% Wahrscheinlichkeit durchfällt, ist das Risiko für Faule mehr als fünfmal so hoch.



$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ 1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eine Pfades errechnet man als das Produkt der Ast-Wahrscheinlichkeiten.

Gleichung von Bayes $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, eine Umformung davon.

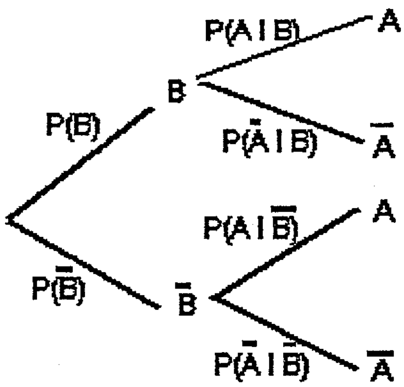
2. Pfadregel Tragen mehrere Pfade zu dem betrachteten Ereignis bei, so muss man die Pfadwahrscheinlichkeiten addieren.

$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$

Allgemein, wenn n Ereignisse A_i die erste Stufe bilden:

$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ und dieses ist gleichzeitig der

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit



Wieder gebe es n Ereignisse A_i, die zusammen alle Fälle dieser Stufe des mehrstufigen Zufallsversuches ausmachen, vornehm: $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ (Bei A und $\bar{A}$ ist das von selbst erfüllt.)

Leitfrage: **Das Ereignis B kann die Ursachen $A_1, A_2, \ldots A_n$ haben. Nun ist B eingetreten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dann das spezielle A_k die Ursache?** $P(A_k|B) = ?$

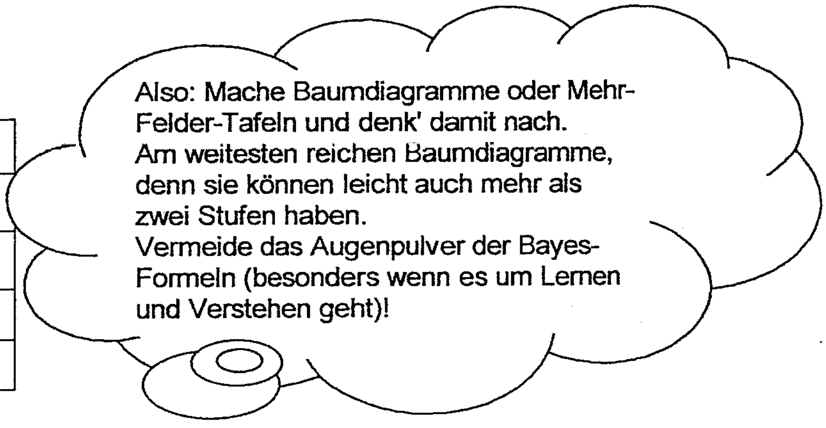
Wie schon auf Seite 1 im Beispiel kann man $P(A_k \cap B)$ auch noch mit dem umgekehrten Baum berechnen.

$P(B) \cdot P(A_k|B) = P(A_k \cap B) = P(A_k) \cdot P(B|A_k)$

Division durch $P(B)$ ergibt mit der 2. Pfadregel (= mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit):

$P(A_k|B) = \dfrac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$ den Satz von Bayes

	B	$\bar{B}$	
A_1	$n\,P(A_1 \cap B)$	$n\,P(A_1 \cap \bar{B})$	$n\,P(A_1)$
A_2	$n\,P(A_2 \cap B)$	$n\,P(A_2 \cap \bar{B})$	$nP(A_2)$
A_3	$n\,P(A_3 \cap B)$	$n\,P(A_3 \cap \bar{B})$	$n\,P(A_3)$
	$n\,P(B)$	$n\,P(\bar{B})$	n



Die bedingten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich als Anteile

$P(B|A_k) = \dfrac{P(A_k \cap B)}{P(A_k)}$ für die Zeilen und $P(A_k|B) = \dfrac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$ für die Spalten.

Dabei müssen natürlich die Zeilen- und Spaltensummen stimmen. Diese Tatsache drückt sich dann gerade in der Gleichung $n\,P(B) = n(\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = n \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ aus und das ist (nach Kürzung von n) nichts anderes als der **"Satz von der totalen Wahrscheinlichkkeit".**

21e

Vier-Feldertafeln, Test nach Fisher

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, http:/www.uni-lueneburg.de 14. Februar 2007

Es geht darum, ob zwei verschiedene Gruppen, hier Typ A und Typ B genannt, bezüglich eines ja/nein-Merkmals E unterschiedlich sind. Der Einfachheit halber wird hier von Personen gesprochen.
Es werden n Personen untersucht, von denen a vom Typ A und b vom Typ B sind.
Nach der Befragnung haben e Personen das Merkmal E und ne haben es nicht.

	E	nE	
A	ea	na	a
B	eb	nb	b
	e	ne	n

zum Beispiel

	E	nE	
A	3	2	5
B	1	6	7
	4	8	12

Interessant ist nun, dass die Aufteilung der e Personen auf Typ A und B durchaus verschieden sein kann, auch wenn die Gruppen bzgl. E gleich sind.

Null-Hypothese H_0: Die Gruppen unterscheiden sich nicht bzgl. Merkmal E.
Foschungshypthese H_1: Typ A weist weniger E auf, also Typ B mehr (oder umgekehrt).

Man beobachtet eine Aufteilung von e.

Ist nun $\frac{e}{n} \approx \frac{ea}{a} \approx \frac{eb}{b}$, so ist gar nichts mehr zu untersuchen, das gehört sicher zu H_0.
Weicht die Beobachtung deutlicher davon ab, so ist zu fragen, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter H_0 diese Tafel und weitere, die H_1 noch mehr stützen, auftreten.

$\alpha = P\left(\frac{ea|\cdot}{eb|\cdot} \text{ oder} \ldots\right)$

Es $\binom{a}{ea}$ gibt Möglichkeiten, ea Personen mit Merkmal E unter den a Personen vom Typ A "anzukeuzen".

Es $\binom{b}{eb}$ gibt Möglichkeiten, eb Personen mit Merkmal E unter den b Personen vom Typ B "anzukeuzen".

Es $\binom{n}{e}$ gibt Möglichkeiten, e Personen mit Merkmal E unter den n Personen überhaupt "anzukeuzen".

$$P\left(\frac{ea|\cdot}{eb|\cdot}\right) = \frac{\binom{a}{ea}\binom{b}{eb}}{\binom{n}{e}}$$

Der Zähler ist also die Zahl der Möglichkeiten, die die beobachtete Aufteilung von e in A und B aufweisen. Damit ist dies die Wahrscheinlichkeit für die beobachtete Tafel.

Im Beispiel ist dies 14%. Es kann sich keine Signifikanz mehr ergeben, auch wenn man die Wahrscheinlicheit für die noch günstigere Tafel berechnete.

	E	¬E	
A	4	1	5
B	0	7	7
	4	8	12

Dies ist die Tafel, ihre Wahrscheinlichkeit ist 1%. Damit ist klar, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit 15% wäre, wenn man behaupten würde, bei Typ B käme E seltener vor. Man behauptet also gar nichts.
Wenn man aber diese Tafel hier unten beobachtet hätte, hätte man H_1 annehmen können.
Weitere Überlegungen kann man in der zugehörigen MuPAD-Datei nachlesen.
Zusammenfassend ergibt sich: Man kann Zeilen und Spalten vertauschen, auch E und Nicht-E als Typen und A und B als alternative Merkmale ansehen, stets erhält man dieselben Wahrscheinlichkeits-Werte. Man muss nur darauf achten, dass man die Binomialterme entweder nur aus Zeilenelementen oder nur aus Spaltenelementen baut.
Aus didaktischer Sicht ist die oben verfolgte Begründung sinnvoller (als den Term aus Spalten zu bauen), da die Aufteilung in die Typen meist "vorgegeben" ist. Bücher sind da nicht immer geschickt.

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 4. Juni 2007

Krüge für den Handwerkermarkt

Toni plant, auf dem Handwerkermarkt im Herbst seine berühmten Krüge anzubieten. Bei der Kalkulation muss er allerlei fixe Kosten berücksichtigen, wie Standmiete, Unterkunft, Reise u.s.w.

Der Herstellungsprozess läuft bei Tonkrügen nicht völlig sicher ab. Im Wesentlichen entstehen unabhängig voneinander drei Arten von Fehlern:

1. Fo Formfehler, zusammengesunken, Henkel schief o.ä. Auftreten zu 25%
2. Gl Glasurfehler, Blasen bekommen, unglasierte Stellen o.ä. Auftreten zu 20%
3. Fa Farbfehler, verunreinigte Farbe, falscher Farbton, Flecken... Auftreten zu 15%

Krüge ohne Fehler kann er für 30 € verkaufen (I. Wahl). Krüge mit nur einem Fehler sind II. Wahl und bringen 20€ ein. Alle anderen kann er als III.Wahl (Ausschuss) noch zu 10€ loswerden.

Nun will er erstmal herausbeommen, was er eigentlich pro Krug im Mittel einnimmt. Danach kann er seine Kalkulation zuende führen.

Zufallsgröße: Verdienst V in € (eigentlich Einnahme ohne Berücksichtigung der Kosten)

Güte	V_i in €	$P(V=V_i)$	$V_i\cdot P(V=V_i)$	V bei 1000 Krügen in €
I	30	0,51	15,3	15300
II	20	0,3875	7,75	7750
A	10	0,1025	1,025	1025
		Σ 1 muss!!	⊕ 24,075 € Verdient pro Krug	24075 € für 1000 K.

Erwartungswert E(V)=24,075 €

Im Mittel kann er mit etwa 24 € Verdienst für jeden projektierten Krug rechnen. Glaubt er also, 200 Krüge absetzen zu können, muss er dafür Material kaufen u.s.w und kann mit einer Einnahme von 4800 € rechnen. Wenn der dann noch alle fixen Kosten berücksichtigt, kann er kalkulieren, ob sich die Teilnahme am Handwerkermarkt lohnt.

Voraussetzungen und Vokabeln: **Bernoulliversuch**

Es liegt ein **n-stufiger** ja/nein-Versuch vor. Der Ausgang 'ja' wird auch als 'Treffer' oder 'Erfolg' bezeichnet.
p ist die **Wahrscheinlichkeit** für einen einzelnen **Treffer** in einer beliebigen Stufe. Wichtig ist, daß dieses p für alle Einzelversuche (=Stufen) gleich groß ist, daß die Einzelversuche 'stochastisch unabhängig' sind.
$q=1-p$ ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu p, q ist also die Wahrscheinlichkeit für 'nein', bzw 'Mißerfolg'.
X ist die **Zahl der Treffer** im Gesamtversuch, in der Bernoullikette. Nun wird die **Zufallsgröße** X betrachtet.

Dann gilt folgendes: X **ist binomialverteilt.** Es gelten die Formeln und Tabellen der **Binomialverteilung**.

$\mu = np$ ist der **Erwartungswert** =mü für die Anzahl X der Treffer. Das ist der auch ohne Statistikkenntnis genannte Wert.
$\sigma^2 = npq$ **Varianz**, $\sigma = \sqrt{npq}$ **Standardabweichung** = **sigma**
Man bezeichnet mit $P(X=k)$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl X der Treffer gleich k ist.
Es gilt dann:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{bzw.} \qquad P(X\le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Für n=2; 3; 4; 5; 6; 10 und einige p ist der linke Term auf Seite 23 a) tabelliert. Die kumulierte (= von links aufsummierte) Verteilungsfunktion rechts ist für n=2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 20; 50; 100; auf den Seiten 23 a) und b) tabelliert.
Für kleine n, kleine k oder kleine $n-k$ kann man zumindest den linken Term direkt berechnen.
Dazu braucht man die **Binomialkoeffizienten,** die man entweder aus dem Pascalschen Dreieck beschafft, in einer Tafel nachsieht, dem Taschenrechner entnimmt oder nach einer der folgenden Formeln berechnet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)\cdot k}. \quad \text{Es ist } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ bzw. für Computer } \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

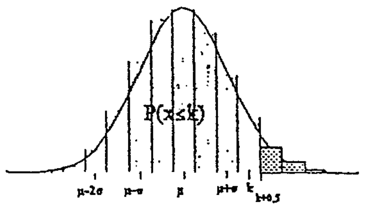
***Berechnungen näherungsweise**, wenn passende Tabellen fehlen:*

Ist n zwar größer als 10, aber p sehr klein ($p < 0{,}05$, **'selten'**) gilt die **Poissonverteilung** (S.29).

Ist die **Laplace-Bedingung** $\sigma^2 > 9$ (also $\sigma > 3$ oder $npq > 9$) erfüllt, kann die **Gaußsche Normalverteilung** verwendet werden. Sie ist eine umso bessere Näherung für die Binomialverteilung, je größer die Standardabweichung σ ist.
Die Trefferanzahl X ist eine **diskrete** Variable, deren Verteilung im Balkendiagramm dargestellt werden müßte. Die Normalverteilung aber hat eine glatte, stetige Randkurve = *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Darum muß es hier eine **Stetigkeitskorrektur** (von +0,5) geben. Wenn man diese Dichtefunktion noch mit dem Faktor σ waagerecht staucht und ihr Maximum von der Stelle μ auf den Ursprung verschiebt, entsteht die Dichtefunktion der **Standardnormalverteilung**. Tabelliert ist auf Seite 24 deren Integral von links ($-\infty$) bis z. Das Integral ist nicht geschlossen lösbar und kann auch von Computern nur näherungsweise berechnet werden.
Es gilt:

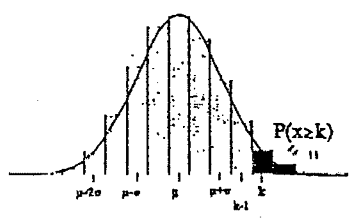
$$\boxed{P(X\le k) = \Phi(z) \quad mit \quad z = \frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}} \quad \text{und} \quad \boxed{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)} \quad \text{mit} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Die Zusammenhänge sind leicht verständlich, wenn man sich die Wahrscheinlichkeiten stets als Flächen im Balkendiagramm klarmacht. Die hier berechnete **Wahrscheinlichkeit, höchstens** k **Treffer zu haben,** wird annähernd dargestellt durch die Fläche unter der Gauß-Kurve von links bis einschließlich des zu k gehörigen "Balkens" (daher die +0,5).



Wie bei allen diskreten Verteilungen gilt:

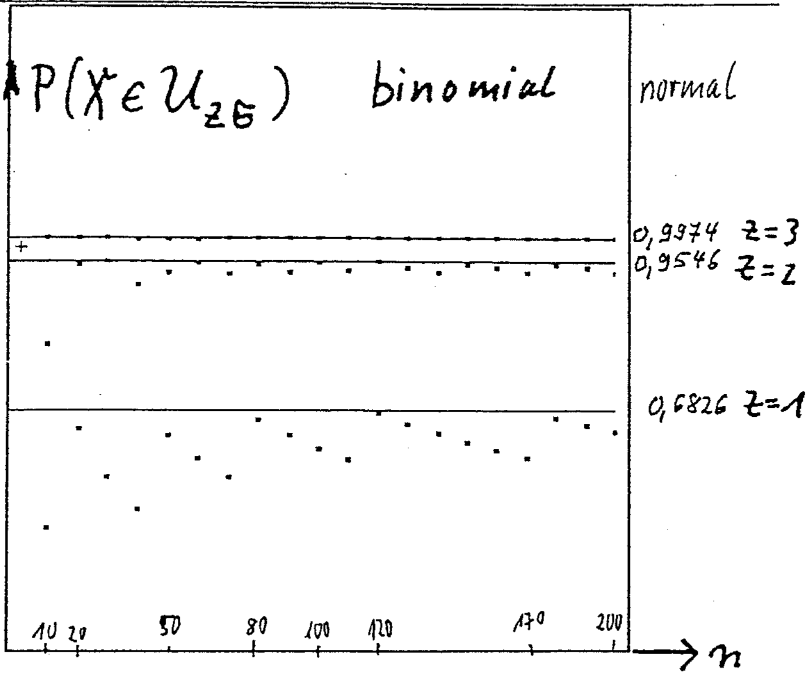
$$\boxed{P(X\ge k) = 1 - P(X\le k-1)} \quad \text{und} \quad \boxed{P(a\le X\le b) = P(X\le b) - P(X\le a-1)}$$



Häufig ist $\Phi(z)$ als statistische Sicherheit $1-\alpha$ schon bekannt, und man möchte das zugehörige z bestimmen. Dafür existiert auf Seite 24 rechts eine andersherum aufgebaute Tabelle, die zu einem Signifikanzniveau α das zugehörige z angibt.
Man kann z als "Sigmavielfaches" auffassen, $z=2$ entspricht $\mu+2\sigma$.

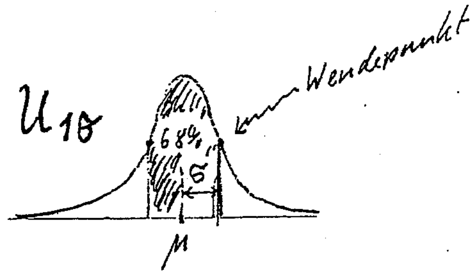
Statistik Genauigkeit bei z Sigma-Umgebungen Ha Kurs 1995

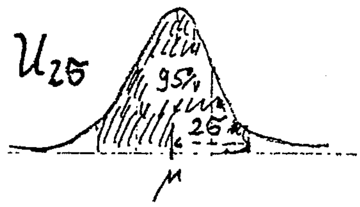
Bei Berechnungen mit der Binomialverteilung pflegt man die Werte aus der Normalverteilung zu nehmen, falls die Laplace-Bedingung erfüllt ist.
Man darf allerdings nicht meinen, daß diese Werte dann sofort "genau" sind.
Rechts sind mit Punkten die Wahrscheinlichkeiten für die 1-,2-, und 3-Sigma-Umgebung, also
* $P(\,|X-\mu| \le z\sigma\,)$ für z=1,2,3 dargestellt. Die Striche geben die der Normalverteilung entsprechenden Werte an.
Man sieht auch bei größeren n noch deutliche Abweichungen, insbesondere im 1-Sigma-Bereich.

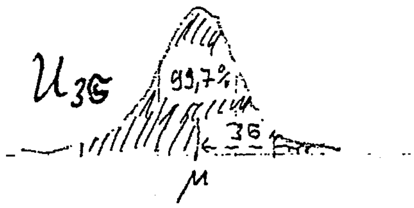


Die nachfolgenden Tabellen belegen dies mit Zahlen. Bei n=170 wird die Wahrscheinlichkeit relativ noch um 12 % "falsch" angegeben. Die rhythmische Struktur kommt dadurch zustande, daß immer ganze Balken des Histogramms genommen werden müssen .

n	* bei 1σ	n	* bei 2σ	n	* bei 3σ
10	0.466948	10	0.803342	10	0.998409
20	0.649160	20	0.947372	20	0.997923
30	0.559301	30	0.952907	30	0.995762
40	0.498705	40	0.912765	40	0.995019
50	0.636574	50	0.934681	50	0.995136
60	0.594397	60	0.950950	60	0.995639
70	0.559534	70	0.931107	70	0.996267
80	0.665467	80	0.948640	80	0.996892
90	0.637523	90	0.933534	90	0.997457
100	0.612742	100	0.950179	100	0.995722
110	0.590585	110	0.938376	110	0.996645
120	0.677194	120	0.953454	120	0.997376
130	0.658038	130	0.944043	130	0.996109
140	0.640364	140	0.934404	140	0.996998
150	0.623999	150	0.949797	150	0.995819
160	0.608796	160	0.941969	160	0.996790
170	0.594627	170	0.934002	170	0.995722
180	0.668479	180	0.948862	180	0.996719
190	0.655509	190	0.942290	190	0.995765
200	0.643238	200	0.935618	200	0.996749
	↓ 0,6826		↓ 0,9546		↓ 0,9974







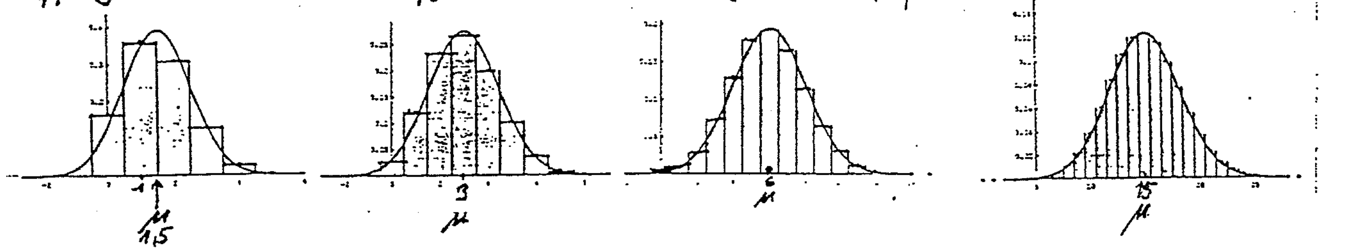
Laplace-Bedingung
$npq > 9$

Merke: Die Laplace-Bedingung ist nur eine **grobe** Faustregel. Sie ist bei p=0,3 zwar ab n=50 erfüllt, aber auch für größere n kommen ~~kommen~~ noch merkliche Abweichungen vor.

Wir betrachten die Veränderung der Form von **Binomialverteilungen bei wachsendem n.**   n = Länge der Bernoullikette = Stichprobenumfang

$p=0{,}3$

$n=5$ $n=10$ $n=20$ $\sigma^2=4{,}2 \not> 9$ $n=50$ $\sigma^2=10{,}5>9$

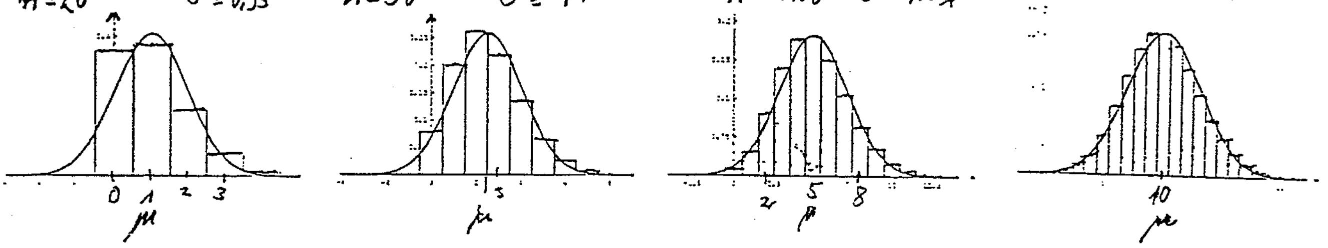


Also: Je größer n wird, desto mehr nähert sich die Binomialverteilung der Gauß'schen Normalverteilung an.

Wir vergleichen diese Veränderungsreihen bei **verschiedenen p.**
p = Wahrscheinlichkeit des einzelnen Erfolges.

$p=0{,}05$

$n=20$ $\sigma^2=0{,}95$ $n=50$ $\sigma^2=2{,}4$ $n=100$ $\sigma^2=4{,}75 \not> 9$ $n=200$ $\sigma^2=9{,}5>9$



Also: Je weiter p von 0,5 entfernt ist, desto größere **n muß** man nehmen, um eine gute Übereinstimmung mit der Normalverteilung zu haben.

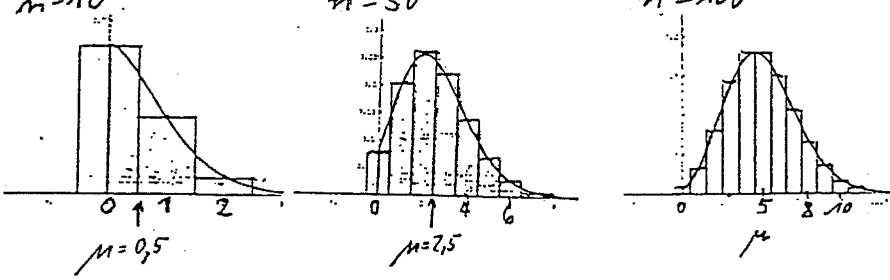
Faustregel für ein Übereinstimmung ist die

Laplace-Bedingung $n\,p\,q > 9$

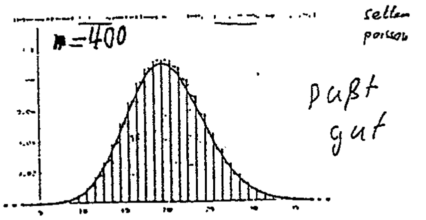
Bei seltenen Ereignissen, bei denen man auch mit größeren n diese Bedingung nicht erfüllen kann, liegt eine Übereinstimmung mit der Poissonverteilung vor.

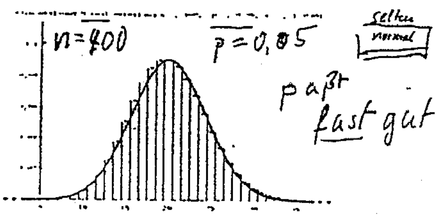
$p=0{,}05$

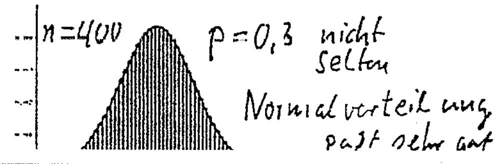
$n=10$ $n=50$ $n=100$



$p=0{,}05$ selten poisson





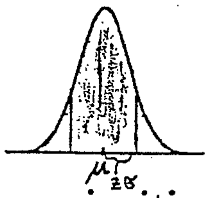
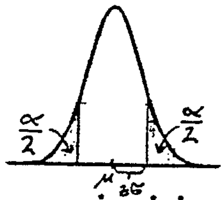
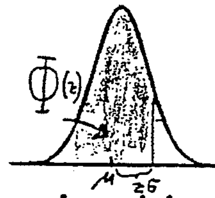
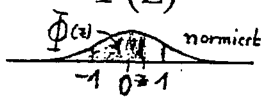
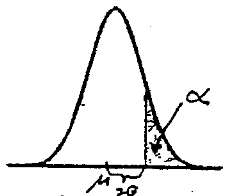


Wenn keine passenden Tabellen vorliegen, ist dennoch oft eine einfache Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei der Binomialverteilung (n, p) möglich. Die Zufallsgröße X ist die Trefferzahl.

Laplace-Bedingung $n\,p\,q > 9$

Wenn die Laplace-Bedingung erfüllt ist, gilt nämlich näherungsweise die folgende, der Normalverteilung entlehnte Tabelle, und zwar umso besser, je weiter npq von 9 entfernt ist.
Die Tabelle gilt auch, wenn **X Einzelwert einer Meßgröße** ist. Stellt man sich unter **X den Mittelwert einer Meßreihe** aus n Werten vor, so ist statt σ nun $\sigma / \sqrt{n}$ einzusetzen. (Näheres hierzu auf Seite 26.)

$P(\,|X-\mu| \le z\sigma\,)$ $\qquad\qquad$ $P(X \le \mu + z\sigma)$

$z \cdot \sigma$ Abstand von μ z	 zweiseitig innen	 zweiseitig außen α	 einseitig $\Phi(z)$ 	 einseitig außen α
1	0,6826	0,3174	0,8413	0,1587
2	0,9546	0,0 454	0,9773	0,0227
3	0,9974	0,0026	0,9987	0,0013
1,64	0,9	0,1	0,95	0,05
1,96	0,95	0,05	0,975	0,025
2,33	0,98	0,02	0,99	0,01
3,72	0,998	0,002	0,999	0,001

Tabellen der **Normalverteilung** (Seite 24) enthalten sämtliche z in Hundertstelschritten (oder feiner) und die hier in der vorletzten Spalte aufgeführten Wahrscheinlichkeiten. Sie werden mit $\Phi(z)$ bezeichnet, und es gilt der folgende Zusammenhang für eine **diskrete** annähernd normalverteilte Zufallsgröße X:

$$P(X \le k) = \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}, \ \text{also} \ z = \frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma},$$

der Summand +0,5 bewirkt eine Stetigkeitskorrektur, denn z.B. ist die Binomialverteilung **diskret**, während die Normalverteilung **stetig** ist.

Konfidenzintervall

Konfidenzintervall = Vertrauensintervall. Bei einer **Bernoullikette** wurden unter **n** Einzelversuchen **k** Treffer gezählt. Es soll nun angegeben werden, mit welchen **wahren Trefferwahrscheinlichkeiten p** dieses Ergebnis **verträglich** (auf dem Niveau α) ist. Dabei ist α vorgegeben und z wird aus der Tabelle oben (zweiseitiger Fall) oder auf Seite 24 rechts abgelesen. Man kann nun **genau, näherungsweise oder grob** rechnen, je nachdem, ob man den ersten, den zweiten oder den dritten Wurzelterm als rechte Seite nimmt.

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| \le z\,\frac{\sigma}{n} = z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx z \cdot \sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}} \le z \cdot \sqrt{\frac{1}{4n}}$$

Es wird eine Angabe der Art $p_1 \le p \le p_2$ errechnet. Mit einer statistischen Sicherheit von $1-\alpha$ liegt das der Stichprobe zugrundeliegende wahre p in diesem (bzw. näherungsweise oder grob in diesem) Intervall $[p_1\ p_2]$. Die Näherung ist etwa für $0{,}3 \le k/n \le 0{,}7$ zulässig. Die Wurzelgleichung bei der genauen Rechnung reagiert numerisch empfindlich auf Rundungsfehler.

Tabelliert ist hier links die Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion der Binomialverteilung

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ für n = 2, n = 3, n = 4, n = 5, n = 6, n = 10. *Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer.*

Tabelliert ist links unten und rechts die **kumulierte** Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion.

$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ für n= 10 und n= 100.

Für n=2... 9 , n=20 und n=50 siehe Seite 23 b.

Beispiele: n=10, p=0,4 P(X=2)=0,1209≈12%, P(X≤ 2)=0,1673≈ 17%. *Wahrscheinlichkeit für nicht mehr als k Treffer.*
n=100, p=0,6 P(X≤ 58)= 1-abgelesener Wert = 1- 0,6225 = 0,3775 ≈ 38%. *d.h. Wahrscheinlichkeit für k oder weniger Treffer.*

Binomialverteilung
kumulierte Verteilungsfunktion

$F_B(k; n; p) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = P(X \le k)$

n = 100

k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	1/6	0,20	0,30	1/3	0,40	0,50	k
0	0,1326	0476	0169	0059	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	99
1	4033	1946	0872	0371	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000	98
2	6767	4198	2321	1183	0019	0000	0000	0000	0000	0000	0000	97
3	8590	6472	4295	2578	0078	0000	0000	0000	0000	0000	0000	96
4	9492	8179	6289	4360	0237	0001	0000	0000	0000	0000	0000	95
5	9845	9192	7884	6160	0576	0004	0000	0000	0000	0000	0000	94
6	9959	9688	8936	7660	1172	0013	0001	0000	0000	0000	0000	93
7	9991	9894	9525	8720	2061	0038	0003	0000	0000	0000	0000	92
8	9998	9968	9810	9369	3209	0095	0009	0000	0000	0000	0000	91
9		9991	9932	9718	4513	0213	0023	0000	0000	0000	0000	90
10		9998	9978	9885	5832	0427	0057	0000	0000	0000	0000	89
11			9993	9957	7030	0777	0126	0000	0000	0000	0000	88
12			9998	9985	8018	1297	0253	0000	0000	0000	0000	87
13				9995	8761	2000	0469	0001	0000	0000	0000	86
14				9999	9274	2874	0804	0001	0000	0000	0000	85
15					9601	3877	1285	0004	0000	0000	0000	84
16					9794	4942	1923	0010	0001	0000	0000	83
17					9900	5994	2712	0022	0001	0000	0000	82
18					9954	6965	3621	0045	0005	0000	0000	81
19					9980	7801	4602	0089	0011	0000	0000	80
20					9992	8481	5595	0165	0024	0000	0000	79
21					9997	8998	6540	0288	0043	0000	0000	78
22					9999	9370	7389	0479	0091	0001	0000	77
23						9621	8109	0755	0164	0003	0000	76
	0,98	0,97	0,96	0,95	0,90							

k	1/6	0,20	0,30	1/3	0,40	0,50	k
24	0,9783	8686	1136	0231	0006	0000	75
25	9881	9125	1631	0458	0012	0000	74
26	9938	9442	2244	0713	0024	0000	73
27	9969	9658	2964	1066	0046	0000	72
28	9985	9800	3768	1524	0084	0000	71
29	9993	9888	4623	2093	0148	0000	70
30	9997	9939	5491	2766	0248	0000	69
31	9999	9969	6331	3525	0398	0001	68
32		9985	7107	4344	0615	0002	67
33		9993	7793	5188	0913	0004	66
34		9997	8371	6019	1303	0009	65
35		9999	8839	6803	1795	0018	64
36		9999	9201	7511	2386	0033	63
37			9470	8123	3068	0060	62
38			9660	8630	3822	0105	61
39			9790	9034	4621	0176	60
40			9875	9341	5433	0284	59
41			9928	9566	6225	0443	58
42			9960	9724	6967	0666	57
43			9979	9831	7635	0967	56
44			9989	9900	8211	1356	55
45			9995	9943	8689	1841	54
46			9997	9969	9070	2421	53
47			9999	9983	9362	3087	52
48			9999	9991	9577	3822	51
	5/6	0,80	0,70	2/3	0,60	0,50	k

k	1/3	0,40	0,50	k
49	0,9996	9729	4602	50
50	9998	9832	5398	49
51	9999	9900	6178	48
52		9942	6914	47
53		9968	7579	46
54		9983	8159	45
55		9991	8644	44
56		9996	9033	43
57		9998	9334	42
58		9999	9557	41
59			9716	40
60			9824	39
61			9895	38
62			9940	37
63			9967	36
64			9982	35
65			9991	34
66			9996	33
67			9998	32
68			9999	31
	2/3	0,60	0,50	k

Beispiel: F_B (60; 100; 0,50) = 0,9824; Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000.

-n=100 p=0,5
P(X≦60)=0,9824
p > 0,5 => k rechts
P(X≦k)=1-abgel. Wert

Binomialverteilung
Wahrscheinlichkeitsfunktion

P(X=k) = $f_B(k; n; p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	1/6	0,20	0,30	1/3	0,40	0,50	k
2	0	0,9604	9409	9216	9025	8100	6944	6400	4900	4444	3600	2500	2
	1	0192	0582	0768	0950	1800	2778	3200	4200	4444	4800	5000	1
	2	0004	0009	0016	0025	0100	0278	0400	0900	1111	1600	2500	0
3	0	0,9412	9127	8847	8574	7290	5787	5120	3430	2963	2160	1250	3
	1	0576	0847	1106	1354	2430	3472	3840	4410	4444	4320	3750	2
	2	0012	0026	0046	0071	0270	0694	0960	1890	2222	2880	3750	1
	3			0001	0001	0010	0046	0080	0270	0370	0640	1250	0
4	0	0,9224	8853	8493	8145	6561	4823	4096	2401	1975	1296	0625	4
	1	0753	1095	1416	1715	2916	3858	4096	4116	3951	3456	2500	3
	2	0023	0051	0088	0135	0486	1157	1536	2646	2963	3456	3750	2
	3		0001	0002	0005	0036	0154	0256	0756	0988	1536	2500	1
	4					0001	0008	0016	0081	0123	0256	0625	0
5	0	0,9039	8587	8154	7738	5905	4019	3277	1681	1317	0778	0313	5
	1	0922	1328	1699	2036	3281	4019	4096	3602	3292	2592	1563	4
	2	0038	0082	0142	0214	0729	1608	2048	3087	3292	3456	3125	3
	3	0001	0003	0006	0011	0081	0322	0512	1323	1646	2304	3125	2
	4					0005	0032	0064	0284	0412	0768	1563	1
	5						0001	0003	0024	0041	0102	0313	0
6	0	0,8858	8330	7828	7351	5314	3349	2621	1176	0878	0467	0156	6
	1	1085	1546	1957	2321	3543	4019	3932	3025	2634	1866	0938	5
	2	0055	0120	0204	0305	0984	2009	2458	3241	3292	3110	2344	4
	3	0002	0005	0011	0021	0146	0536	0819	1852	2195	2765	3125	3
	4				0001	0012	0080	0154	0595	0823	1382	2344	2
	5					0001	0006	0015	0102	0165	0369	0938	1
	6							0001	0007	0014	0041	0156	0

Binomialverteilung
Wahrscheinlichkeitsfunktion

$f_B(k; n; p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

n = 10

k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	1/6	0,20	0,30	1/3	0,40	0,50	k
0	0,8171	7374	6648	5987	3487	1615	1074	0282	0173	0060	0010	10
1	1667	2281	2770	3151	3874	3230	2684	1211	0867	0403	0098	9
2	0153	0317	0519	0746	1937	2907	3020	2335	1951	1209	0439	8
3	0008	0026	0058	0105	0574	1550	2013	2668	2601	2150	1172	7
4		0001	0004	0010	0112	0543	0881	2001	2276	2508	2051	6
5				0001	0015	0130	0264	1029	1366	2007	2461	5
6					0001	0022	0055	0368	0569	1115	2051	4
7						0002	0008	0090	0163	0425	1172	3
8							0001	0014	0030	0106	0439	2
9								0001	0003	0016	0098	1
10										0001	0010	0

Binomialverteilung
Verteilungsfunktion

$F_B(k; n; p) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = P(X \le k)$

n = 10

k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	1/6	0,20	0,30	1/3	0,40	0,50	k
0	0,8171	7374	6648	5987	3487	1615	1074	0282	0173	0060	0010	9
1	9838	9655	9418	9139	7361	4845	3758	1493	1040	0464	0107	8
2	9991	9972	9938	9885	9298	7752	6778	3828	2991	1673	0547	7
3		9999	9996	9990	9872	9303	8791	6496	5593	3823	1719	6
4				9999	9984	9845	9672	8497	7869	6331	3770	5
5					9999	9976	9936	9527	9234	8338	6230	4
6						9997	9991	9894	9803	9452	8281	3
7							9999	9984	9966	9877	9453	2
8								9999	9996	9983	9893	1
9										9999	9990	0

Tabelliert ist links unten und rechts die **kumulierte** Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion für n=2... 9, n=20 und n=50. *Wahrscheinlichkeit für k oder weniger Treffer.*

Beispiel: n=20, p=0,1 $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,867 = 0,133 \approx 13\%$.

n=10 und n=100 siehe Seite 23 a.

Binomialverteilung

Verteilungsfunktion

$P(X \leq k) =$ $F_B(k;n;p) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	1/6	0,20	0,30	1/3	0,40	0,50	k	n
2	0	0,9604	9409	9216	9025	8100	6944	6400	4900	4444	3600	2500	1	2
	1	9996	9991	9984	9975	9900	9722	9600	9100	8889	8400	7500	0	
3	0	0,9412	9127	8847	8574	7290	5787	5120	3430	2963	2160	1250	2	3
	1	9988	9974	9953	9928	9720	9259	8960	7840	7407	6480	5000	1	
	2			9999	9999	9990	9954	9920	9730	9630	9360	8750	0	
4	0	0,9224	8853	8493	8145	6561	4823	4096	2401	1975	1296	0625	3	4
	1	9977	9948	9909	9860	9477	8681	8192	6517	5926	4752	3125	2	
	2		9999	9998	9995	9963	9838	9728	9163	8889	8208	6875	1	
	3					9999	9992	9984	9919	9877	9744	9375	0	
5	0	0,9039	8587	8154	7738	5905	4019	3277	1681	1317	0778	0313	4	5
	1	9962	9915	9852	9774	9185	8038	7373	5282	4609	3370	1875	3	
	2	9999	9997	9994	9988	9914	9645	9421	8369	7901	6826	5000	2	
	3					9995	9967	9933	9692	9547	9130	8125	1	
	4						9999	9997	9976	9959	9898	9688	0	
6	0	0,8858	8330	7828	7351	5314	3349	2621	1176	0878	0467	0156	5	6
	1	9943	9875	9784	9672	8857	7368	6554	4202	3512	2333	1094	4	
	2	9998	9995	9988	9978	9842	9377	9011	7443	6804	5443	3438	3	
	3				9999	9987	9913	9830	9295	8999	8208	6563	2	
	4					9999	9993	9984	9891	9822	9590	8906	1	
	5							9999	9993	9986	9959	9844	0	
7	0	0,8681	8080	7514	6983	4783	2791	2097	0824	0585	0280	0078	6	7
	1	9921	9829	9706	9556	8503	6698	5767	3294	2634	1586	0625	5	
	2	9997	9991	9980	9962	9743	9042	8520	6471	5706	4199	2266	4	
	3			9999	9998	9973	9824	9667	8740	8267	7102	5000	3	
	4					9998	9980	9953	9712	9547	9037	7734	2	
	5						9999	9996	9962	9931	9812	9375	1	
	6								9998	9995	9984	9922	0	
8	0	0,8508	7837	7214	6634	4305	2326	1678	0576	0390	0168	0039	7	8
	1	9897	9777	9619	9428	8131	6047	5033	2553	1951	1064	0352	6	
	2	9996	9987	9969	9942	9619	8652	7969	5518	4682	3154	1445	5	
	3		9999	9998	9996	9950	9693	9437	8059	7414	5941	3633	4	
	4					9996	9954	9896	9420	9121	8263	6367	3	
	5						9996	9988	9887	9803	9502	8555	2	
	6							9999	9987	9974	9915	9648	1	
	7								9999	9998	9993	9961	0	
9	0	0,8337	7602	6925	6302	3874	1938	1342	0404	0260	0101	0020	8	9
	1	9869	9718	9522	9288	7748	5427	4362	1960	1431	0705	0195	7	
	2	9994	9980	9955	9916	9470	8217	7382	4628	3772	2318	0898	6	
	3		9999	9997	9994	9917	9520	9144	7297	6503	4826	2539	5	
	4					9991	9911	9804	9012	8552	7334	5000	4	
	5					9999	9989	9969	9747	9576	9006	7461	3	
	6						9999	9997	9957	9917	9750	9102	2	
	7								9996	9990	9962	9805	1	
	8									9999	9997	9980	0	
n		0,98	0,97	0,96	0,95	0,90	5/6	0,80	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000.

$q = 1 - p$

Bei rot unterlegtem Eingang: $P(X \leq k) = F_B(k;n;p) = 1 -$ abgelesener Wert

Beispiele: $F_B(2;6;0{,}1) = 0{,}9842$; $F_B(5;9;0{,}8) = 1 - 0{,}9144 = 0{,}0856$

$n = 6;\ p = 0{,}1 \quad P(X \leq 2) = ?$ $= P(X \leq 5)$ bei $n = 9 \quad p = 0{,}8$

Binomialverteilung

Verteilungsfunktion

$P(X \leq k) =$ $F_B(k;n;p) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	1/6	0,20	0,30	1/3	0,40	0,50	k	n
20	0	0,6676	5438	4420	3585	1216	0261	0115	0008	0003	0000	0000	19	20
	1	9401	8802	8103	7358	3917	1304	0692	0076	0033	0005	0000	18	
	2	9929	9790	9561	9245	6769	3287	2061	0355	0176	0036	0002	17	
	3	9994	9973	9926	9841	8670	5665	4114	1071	0604	0160	0013	16	
	4		9997	9990	9974	9568	7687	6296	2375	1515	0510	0059	15	
	5			9999	9997	9887	8982	8042	4164	2972	1256	0207	14	
	6					9976	9629	9133	6080	4793	2500	0577	13	
	7					9996	9887	9679	7723	6615	4159	1316	12	
	8					9999	9972	9900	8867	8095	5956	2517	11	
	9						9994	9974	9520	9081	7553	4119	10	
	10						9999	9994	9829	9624	8725	5881	9	
	11							9999	9949	9870	9435	7483	8	
	12								9987	9963	9790	8684	7	
	13								9997	9991	9935	9423	6	
	14									9998	9984	9793	5	
	15										9997	9941	4	
	16											9987	3	
	17											9998	2	
50	0	0,3642	2181	1299	0769	0052	0001	0000	0000	0000	0000	0000	49	50
	1	7358	5553	4005	2794	0338	0012	0002	0000	0000	0000	0000	48	
	2	9216	8108	6767	5405	1117	0066	0013	0000	0000	0000	0000	47	
	3	9822	9372	8609	7604	2503	0238	0057	0000	0000	0000	0000	46	
	4	9968	9832	9510	8964	4312	0643	0185	0002	0000	0000	0000	45	
	5	9995	9963	9856	9622	6161	1388	0480	0007	0001	0000	0000	44	
	6	9999	9993	9964	9882	7702	2506	1034	0025	0005	0000	0000	43	
	7		9999	9992	9968	8779	3911	1904	0073	0017	0000	0000	42	
	8			9999	9992	9421	5421	3073	0183	0050	0002	0000	41	
	9				9998	9755	6830	4437	0402	0127	0008	0000	40	
	10					9906	7986	5836	0789	0284	0022	0000	39	
	11					9968	8827	7107	1390	0570	0057	0000	38	
	12					9990	9373	8139	2229	1035	0133	0002	37	
	13					9997	9693	8894	3279	1715	0280	0005	36	
	14					9999	9862	9393	4468	2612	0540	0013	35	
	15						0,9943	9692	5692	3690	0955	0033	34	
	16						9978	9856	6839	4868	1561	0077	33	
	17						9992	9937	7822	6046	2369	0164	32	
	18						9998	9975	8594	7126	3356	0325	31	
	19						9999	9991	9152	8036	4465	0595	30	
	20							9997	9522	8741	5610	1013	29	
	21							9999	9749	9244	6701	1611	28	
	22								9877	9576	7660	2399	27	
	23								9944	9778	8438	3359	26	
	24								9976	9892	9022	4439	25	
	25								9991	9951	9427	5561	24	
	26								9997	9979	9686	6641	23	
	27								9999	9992	9840	7601	22	
	28									9997	9924	8389	21	
	29									9999	9966	8987	20	
n		0,98	0,97	0,96	0,95	0,90	5/6	0,80	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000.

k	0,40	0,50	k
30	0,9986	9405	19
31	9995	9675	18
32	9998	9836	17
33	9999	9923	16
34		9967	15
35		9987	14
36		9995	13
37		9998	12
	0,60	0,50	k

$q = 1 - p$

Bei rot unterlegtem Eingang: $F_B(k;n;p) = 1 -$ abgelesener Wert

Beispiel: $F_B(17;50;0{,}6) = 1 - 0{,}9998 = 0{,}0002$

$n = 50 \quad p = 0{,}1 \quad P(X \leq 17) =$

Tabelliert ist die **kumulierte** Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion der Standard- Normalverteilung. Mit der Vorsilbe "Standard" drückt man aus, daß der Erwartungswert = 0 und die Standardabweichung = 1 ist. Ihr Gebrauch ist für diskrete Zufallsgrößen (z.B. Trefferzahlen im Bernoulliversuch) auf Seite 22 erklärt. Für Meßgrößen finden sich die Hinweise auf Seite 26.

Schranken der Standardnormalverteilung

Diese Tabelle rechts ergänzt die unteren vier Zeilen der Tabelle von Seite 22 z. Sie ist passend für die **Vorgabe des Signifikanzniveaus α** eingerichtet.

Beispiele: Mit α=1% Wahrscheinlichkeit wird das Ergebnis des Versuchs (der gemessene Wert der Zufallsgröße) außerhalb der 2,576·σ -Umgebung des Erwartungswertes μ liegen: $P(|X-\mu| \geq 2{,}576\cdot\sigma) \approx 1\ \%$

Mit 98% Wahrscheinlichkeit wird das Ergebnis des Versuchs (der gemessene Wert der Zufallsgröße) innerhalb der 2,326·σ -Umgebung des Erwartungswertes μ liegen: $P(|X-\mu| \leq 2{,}326\cdot\sigma) = 98\%$

Ein Wert, der mehr als 3,72·σ größer ist als der Erwartungswert, ist hochsignifikant zu groß (Niveau 0,01% beim einseitigen Test) .
$P(X \leq \mu + 2{,}326\cdot\sigma) = 98\%$

p / α	zweiseitig z	einseitig z
0,000001	4,891638	4,753424
0,00001	4,417173	4,264891
0,0001	3,890592	3,719016
0,001	3,290527	3,090232
0,005	2,807034	2,575829
0,01	2,575829	2,326348
0,02	2,326348	2,053749
0,025	2,241400	1,959964
0,03	2,170090	1,880794
0,04	2,053749	1,750686
0,05	1,959964	1,644854
0,06	1,880794	1,554774
0,07	1,811911	1,475791
0,08	1,750686	1,405072
0,09	1,695398	1,340755
0,1	1,644854	1,281552
0,2	1,281552	0,841621
0,3	1,036433	0,524401
0,4	0,841621	0,253347
0,5	0,674490	0,000000

X=z Normierte Normalverteilung z ↓ Φ(z) ↓

z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9773	2.50	0.9938	3.0	0.9987
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.01	0.9778	2.51	0.9940	3.1	0.9990
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.02	0.9783	2.52	0.9941	3.2	0.9993
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.03	0.9788	2.53	0.9943	3.3	0.9995
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.04	0.9793	2.54	0.9945	3.4	0.9997
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.05	0.9798	2.55	0.9946	3.5	0.9998
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.06	0.9803	2.56	0.9948	3.6	0.9998
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.07	0.9808	2.57	0.9949	3.7	0.9999
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.08	0.9812	2.58	0.9951	3.8	0.9999
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.09	0.9817	2.59	0.9952	3.9	0.9999
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	2.10	0.9821	2.60	0.9953		
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	2.11	0.9826	2.61	0.9955		
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	2.12	0.9830	2.62	0.9956		
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	2.13	0.9834	2.63	0.9957		
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	2.14	0.9838	2.64	0.9959		
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	2.15	0.9842	2.65	0.9960		
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	2.16	0.9846	2.66	0.9961		
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	2.17	0.9850	2.67	0.9962		
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	2.18	0.9854	2.68	0.9963		
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	2.19	0.9857	2.69	0.9964		
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	2.20	0.9861	2.70	0.9965		
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	2.21	0.9864	2.71	0.9966		
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	2.22	0.9868	2.72	0.9967		
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	2.23	0.9871	2.73	0.9968		
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	2.24	0.9875	2.74	0.9969		
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	2.25	0.9878	2.75	0.9970		
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	2.26	0.9881	2.76	0.9971		
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	2.27	0.9884	2.77	0.9972		
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	2.28	0.9887	2.78	0.9973		
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	2.29	0.9890	2.79	0.9974		
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	2.30	0.9893	2.80	0.9974		
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649	2.31	0.9896	2.81	0.9975		
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656	2.32	0.9898	2.82	0.9976		
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664	2.33	0.9901	2.83	0.9977		
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671	2.34	0.9904	2.84	0.9977		
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678	2.35	0.9906	2.85	0.9978		
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686	2.36	0.9909	2.86	0.9979		
0.37	0.6443	0.87	0.8079	1.37	0.9147	1.87	0.9693	2.37	0.9911	2.87	0.9979		
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699	2.38	0.9913	2.88	0.9980		
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706	2.39	0.9916	2.89	0.9981		
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713	2.40	0.9918	2.90	0.9981		
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719	2.41	0.9920	2.91	0.9982		
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726	2.42	0.9922	2.92	0.9983		
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732	2.43	0.9925	2.93	0.9983		
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738	2.44	0.9927	2.94	0.9984		
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744	2.45	0.9929	2.95	0.9984		
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750	2.46	0.9931	2.96	0.9985		
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756	2.47	0.9932	2.97	0.9985		
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761	2.48	0.9934	2.98	0.9986		
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767	2.49	0.9936	2.99	0.9986		

Beim **Hypothesentest** gilt:
P (X aus kritischem Gebiet) = α

Das **kritische Gebiet** ergibt sich **entweder** aus dem vorgegebenen α und dem danach oben abgelesenen Wert für z,
oder aus dem Versuchsergebnis und den im Sinne der Hypothese H_1 noch günstigeren Werten. In diesem Fall wird α mit der linken Tabelle bestimmt.

Beispiel:
Ist das Versuchsergebnis kleiner als μ - 2,4·σ, so ist das eine signifikante Abweichung auf dem Niveau von
$\alpha = \Phi(-2{,}4) = 1-\Phi(2{,}4) = 1-0{,}9918 =$ 0,2% beim einseitigenTest.
Beim zweiseitigen Test ist das Signifikanzniveau dann 0,4%.

Beim Hypothesentest möchte man eine Hypothese H_1 **statistisch sichern**. Dazu formuliert man die Hypothese H_1 in einer dem Problem entsprechenden mathematischen Form und stellt ihr logisches Gegenteil als Nullhypothese H_0 gegenüber.
Beide Hypothesen beziehen sich auf eine mögliche Eigenschaft der Grundgesamtheit.
Um die Entscheidung herbeizuführen, macht man einen **Zufallsversuch.**
Man klärt die Voraussetzungen und entscheidet sich für ein **mathematisches Modell**. Zu diesem gehört dann eine **Prüfgröße.**
Nun ist die **Prüfgröße zu bestimmen**,
das ist bei Verwendung der Binomialverteilung die beobachtete Zahl k der Erfolge, bei der Normalverteilung ist es z, bei der t-Verteilung t, bei der F-Verteilung F,....
Man entscheidet sich, ob zwei- ober einseitig zu testen ist. Ein einseitiger Test ist nur zulässig, wenn man **vorher** eine begründete Aussage über die Richtung des Versuchsausgangs machen kann.

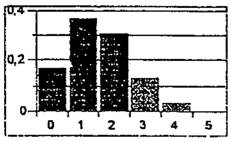
Die Prüfgröße (also: das Versuchsergebnis) und alle im Sinne der Hypothese H_1 noch günstigeren Fälle definieren das **kritische Gebiet.**
Direkt oder mit Hilfe von Tabellen bestimmt man nun die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Versuchsergebnis eines ebensolchen Versuchs rein zufällig in das kritische Gebiet fällt, **wenn** die Nullhypothese **H_0 gilt.** Diese Wahrscheinlichkeit heißt **Irrtumswahrscheinlichkeit** α . Ist α klein, entscheidet man sich für die Annahme von H_1.
Mit der Wahrscheinlichkeit α gilt tritt aber die Beobachtung ein, wenn in Wahrheit H_0 gilt, mit dieser Wahrscheinlichkeit irrt man sich also.
$\alpha \approx 5\%$ schwach s., $\alpha \approx 3\%$ signifikant, $\alpha \approx 1\%$ sehr s., $\alpha \approx 0{,}1\%$ hochsignifikant
Man sagt: H_1 kann mit der statistischen Sicherheit von 1-α angenommen werden. H_1 kann mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α angenommen werden. H_0 kann mit...... verworfen werden.
Ist aber α größer als man bei dem Problem akzeptieren kann, so muß man H_0 (noch) beibehalten und es ist **nicht entschieden**, was nun richtig ist. "Man konnte H_0 aufgrund dieser Untersuchung nicht verwerfen".
Es ist **falsch** zu sagen: Ho ist mit der Sicherheit 1- α erwiesen, daher ist auch das Wort Annahmebereich für H_0 falsch, es kann nur Beibehaltungsbereich von H_0 heißen.
α ist die Wahrscheinlichkeit für den **Fehler 1.Art**. Der **Fehler 2.Art** ist, H_0 beizubehalten, obwohl H_1 in Wahrheit zutrifft. Seine Wahrscheinlichkeit ß kann man meist nur grob abschätzen, denn man kennt lediglich beim Alternativtest die Parameter der zu H_1 gehörenden Verteilung.
<u>andere Möglichkeit:</u> Man legt ein Signifikanzniveau α fest, (wie es für solche Probleme "üblich" ist) und bestimmt die zu diesem α gehörige Prüfgröße und deren kritisches Gebiet bei Gültigkeit von H_0. Fällt dann die zum Versuchsergebnis gehörige Prüfgröße in dieses kritische Gebiet (=Ablehnungsbereich von H_0, Verwerfungsbereich von H_0) , so nimmt man H_1 auf dem Signifikanzniveau α an. (Sonstige Redeweisen wie oben.) Dieses Vorgehen bietet sich insbesondere an, wenn der Versuch oft bei gleichen Voraussetzungen gemacht wird, wie es in der Qualitätskontrolle der Fall ist. D.h. man "arbeitet mit einer **Entscheidungsregel**".

> Durch einen Zufallsversuch gilt etwas (die Hypothese H_1) als **statistisch erwiesen auf dem Niveau** α, wenn bei Annahme des Gegenteils (nämlich bei Annahme von H_0) das Versuchsergebnis nur die geringe Wahrschcinlichkeit α hat.

Das Kükenproblem
H_1 : Küken lieben von Geburt an runde Körner.
Pickversuch
ja=● nein =▲
viele, Attrappen, dann ist p konstant.

Es hat 3 runde unter 5 Körnern gepickt.
k=3
Binomialverteilung

einseitig, da man weiß, daß später nur runde Körner gepickt werden.
H_0 $p \le 0{,}3$
H_1 $p > 0{,}3$



kritisches Gebiet
{3 , 4, 5}
α=P(X≥ 3)=
P(X=3)+P(X=4)
P(X=5)= 13%+
2,8%+0,2%=
16% *α ist sehr groß.*

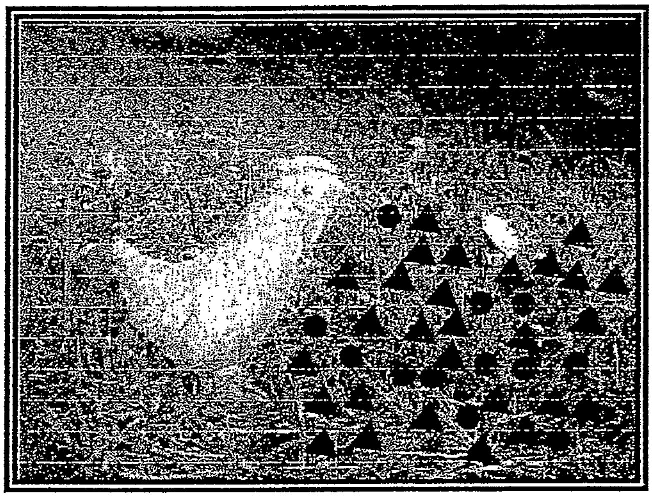
Dieser Pickversuch konnte noch nicht unsere Vermutung bestätigen. Wir werden nun längere Pickserien prüfen.
neue Beobachtung
n=20 k=12
α=P(X≥ 12)
1-P(X≤11)
=1- 0.9949
=0,51%
Dieser Versuch zeigt sehr signifikant die angeborene Vorliebe von Küken für runde Körner.

zu 25

Vorlieben von Küken?

Dr. Dörte Haftendorn Sept 97

Einführungsbeispiel zum Hypothesentest (Grundidee Arthur Engel) Hyp.-Seite 1



Mathix arbeitet nun am Konrad-Lorenz-Institut als Verhaltensforscher.

Schritt 1 Anlass und Planung

Weil erwachsene Hühner fast ausschließlich auf **runde** Körner picken fragen die Forscher, ob das ein erlerntes oder ein angeborenes Verhalten ist. Sie planen, frisch geschlüpften Küken Kreis- und Dreiecks-Attrappen vorzulegen.

Schritt 2 Pickversuch

Das Küken pickt n-mal, dabei trifft es klar entscheidbar Kreis oder Dreieck. (Die Attrappen dürfen sich nicht überlappen.)

Die Wahrscheinlichkeit p, einen Kreis zu picken, ist für jedes Picken gleich,

- wenn alles Attrappen sind,
- wenn eine große Anzahl Attrappen da ist.

Damit ist der Pickversuch eine Bernoullikette und die Verteilung der Zufallsgröße X=Anzahl der gepickten Kreise ist die Binomialverteilung.

Schritt 3 Formulierung der Hypothesen

Nullhypothese H_0

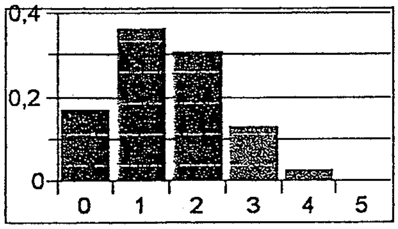
Die Küken haben keinerlei angeborene Vorliebe,
p ist (höchstens) gleich dem Anteil der Kreise unter allen Attrappen,
p=30%

Forschungshypothese H_1

Die Vorliebe für Kreise ist angeboren, p ist größer als es dem Anteil der Kreise nach sein dürfte, p>30%

Schritt 4 Beobachtung und Rechnungen unter H_0

Mathix beobachtet, wie ein Küken schlüpft und 5-mal pickt, dabei sind 3 Kreise.



k	P(X=k)
0	0,1681
1	0,3602
2	0,3087
3	0,1323
4	0,0284
5	0,0024

Gemäß H_0 ist n=5, k=3.

Das kritische Gebiet ist {3,4,5}, die Beobachtung und alle im Sinne von H_1 noch günstigeren Fälle. $\alpha = P(X\geq3)=0{,}1323+0{,}0284+0{,}0024= 0{,}1631=16\%$

Diese Irrtumswahrscheinlichkeit ist viel zu hoch.

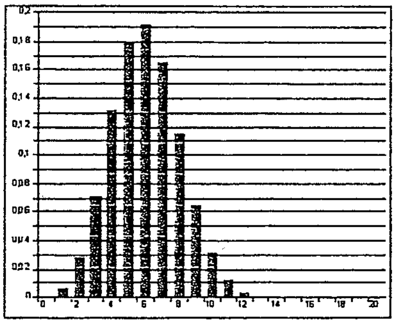
Mit diesem Versuch kann man gar nichts beweisen. (Auch nicht H_0 !!)

Schritt 4 ***Zweite Beobachtung und Rechnungen unter H_0***

Mathix beobachtet nochmals, wie ein Küken schlüpft und 20-mal pickt, dabei sind 12 Kreise.

Gemäß H_0 ist n=20, k=12 und es gilt folgende Verteilung:

k	P(X=k)	P(X≤k)
0	0,0008	0,0008
1	0,0068	0,0076
2	0,0278	0,0355
3	0,0716	0,1071
4	0,1304	0,2375
5	0,1789	0,4164
6	0,1916	0,6080
7	0,1643	0,7723
8	0,1144	0,8867
9	0,0654	0,9520
10	0,0308	0,9829
11	0,0120	0,9949
12	0,0039	0,9987
13	0,0010	0,9997
14	0,0002	1,0000
15	0,0000	1,0000



Das kritische Gebiet ist {12,13,...20}, die Beobachtung und alle im Sinne von H_1 noch günstigeren Fälle.

$\alpha = P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) =$
$1 - 0{,}9949 = 0{,}0051 = 0{,}5\% < 0{,}6\%$

Diese Irrtumswahrscheinlichkeit α ist sehr klein.

Antworten (alternativ)

- Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit unter 1% kann man behaupten, Küken haben eine angeborene Vorliebe für runde Körner.
- Auf einem Signifikanzniveau von weniger als 1% kann man die Behauptung, Küken haben eine angeborene Vorliebe für runde Körner, halten.
- Mit einer statistischen Sicherheit von mindestens 99% haben Küken eine angeborene Vorliebe für runde Körner, lernen also nicht erst durch Erfahrung, dass nur runde Körner schmecken.
- Wir konnten mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit unter 1% die Nullhypothese, Küken lernten das günstige Picken erst durch Erfahrung, verwerfen. Damit vertreten wir die Hypothese, ihre Vorliebe für runde Körner sei angeboren.
- Unser Pickversuch zeigte eine hochsignifikante (Niveau kleiner als 1%) Erhöhung des Pickanteils für Kreise. Daher glauben wir eher an eine angeborene Vorliebe.
- Wenn Küken wirklich erst durch Erfahrung lernten, dass nur runde Körner schmecken, wäre unser Versuchsergebnis nur mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 1% eingetreten. Mit dieser geringen Wahrscheinlichkeit begehen wir also einen Irrtum, wenn wir nun im Gegenteil behaupten, ihre Vorliebe sei angeboren.
- *Beziehen Sie die Antwort stets auf die Aufgabensituation!*

Anmerkung: n=10, k=6 kann gut vorher noch betrachtet werden. Beachten Sie, dass bei dieser Beispielserie n und k stets im gleichen Verhältnis stehen.

Hypothesentest

Dr. Dörte Haftendorn, Johanneum Sep. 97 Hyp-3-

auf der Grundlage einer Bernoullikette

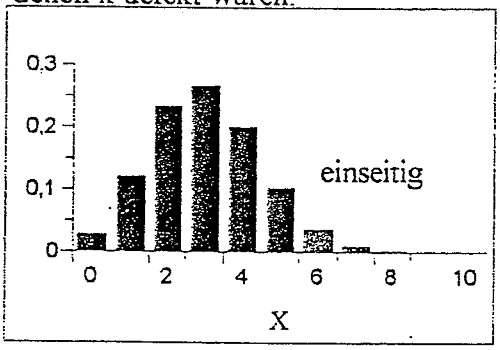
Bei einem **Bernoulliversuch** muss eine eindeutige ja/nein-Entscheidung möglich sein. Erfolg (ja) trete mit der Wahrscheinlichkeit p ein.

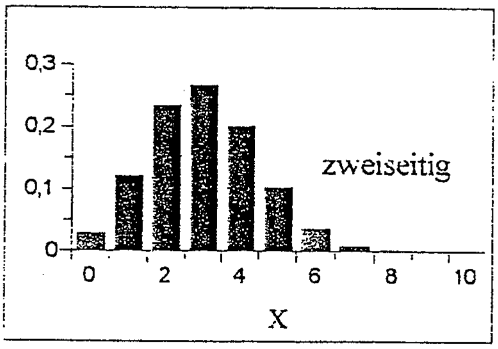
Eine **Bernoullikette** der **Länge n** besteht aus n Bernoulliversuchen, also n eindeutigen ja/nein-Entscheidungen. Dabei muss die **Erfolgswahrscheinlichlichkeit jedesmal p** sein. m.a.W. **p muss konstant sein,** die einzelnen Bernoulliversuch müssen unabhängig sein.

Die **Zufallsgröße X** ist die Zahl der Erfolge (der ja-Antworten, der Treffer) in der Bernoullikette.
Dann ist **X binomialverteilt.** Dann wird also die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl der Erfolge rein zufällig k ist so berechnet: $P(X=k)=$ (n über k) $p^k q^{n-k}$
Weiter gilt für den Erwartungswert μ von X $\mu = n\,p$
und für die Standardabweichung $\sigma =$ Wurzel(n p q) .

Im Folgenden liege also ein Zufallsversuch vor, der eine Bernoullikette der Länge n ist. n heißt auch Stichprobenumfang. **Unter den n Versuchen habe man k Erfolge gehabt.**

Beispiele für solche Zufallsversuche sind:
Eine Umfrage unter n zufällig aus genügend großer Anzahl ausgewählten Personen, von denen k mit "ja" geantwortet haben.
Eine Stichprobe von n zufällig aus genügend großer Anzahl ausgewählten Geräten, von denen k defekt waren.





Das Versuchsergebnis k und alle imSinne der (eigentlichen) Hypothese noch günstigeren Werte für X bestimmen **das kritische Gebiet**. Die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Versuchsergebnis rein zufällig in das kritische Gebiet fällt, wenn Ho richtig ist.
Ein einseitiger Test ist nur zulässig, wenn man vor der Durchführung begründen kann, warum die Abweichung vom Üblichen vermutlich nur in einer Richtung zu erwarten ist.

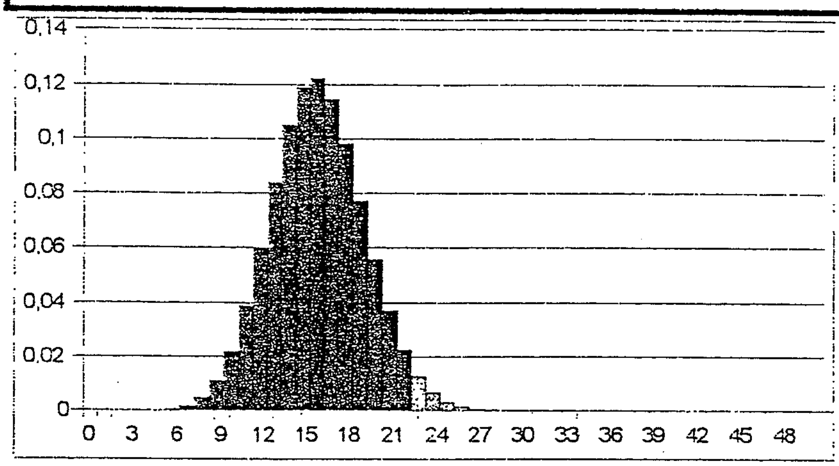
Beispiel			Werte entsprechend Ho		
	n	k	po =	μo	σo
	10	6	0,3	3	1,45
Hypothesen	einseitig		einseitig		zweiseitig
Ho	po<= p		p<=po		p=po
H1	p<po		po<p		p ≠po
	P(X<=k)		P(X >= k)	etwa das Doppelte	des einseitigen
	0,9894	α	0,0473		α
		0,0473			0,0947

Ist nun α kleiner als 5%, so kann man H1 annehmen und Ho verwerfen.
H1 ist dann auf dem 5% -Signifikanzniveau statistisch gesichert.
Mit einer statistischen Sicherheit von 95% nimmt man H1 an.
Bei diesem Beispiel kann man also H1 annehmen, wenn ein einseitiger Test zulässig war.

Hypothesentest

Dr. Dörte Haftendorn, Johanneum Sep. 97

Aufgabe: Im **Hotel "Goldener Würfel"** waren bisher immer 30% der Gäste "Durchreisende", die nur eine Nacht blieben. Der Hotelier greift auf der Kartei 50 Gäste zufällig heraus und stellt fest, dass 22 von ihnen bei ihrem letzten Besuch nur eine Nacht blieben. Kann er behaupten, der Anteil der Durchreisenden habe sich verändert?



Kritisches Gebiet
Einseitiger Test
{22,23,24,25,.......}

Zweiseitiger Test
{0,1,....,6,7,8, 22,23,24...}
Nährungsweise wird P(X>=22) berechnet und dieser Wert doppelt genommen.

Beispiel			Werte entsprechend Ho		
	n	k	po =	µo	σo
	50	22	0,3	15	3,24
Hypothesen	einseitig		einseitig		zweiseitig
Ho	po<= p		p<=po		p=po
H1	p<po		po<p		p ≠po
	P(X<=k)		P(X >= k)	das Doppelte des einseitigen	
	0,9877	α	0,0251		α
		0,0251			0,0502

Dieser Block berechnet jeden Hypothensentest des Bernoullityps. Für dieses Beispiel hätte man die erste einseitig-Spalte nicht gebraucht.
Wegen dieser allgemeinen Anwendungsmögichkeit in der Tabellenkalkulation wird das einseitige Alpha als Minimum der beiden Werte berechnet.
Genauerer Wert für zweiseitig: P(X<=8)+P(X>=22)= 0,0433

Antwort: Er hat eine schwach signifikante Abweichung von einem Durchreisenden-Anteil von 30% beobachtet.

Aufgaben-Variante: Der Hotelier vom "goldenen Würfel" hat schon lange den Eindruck, dass es mehr durchreisende Gäste gibt als früher, wo es stets 30% waren. Er greift aus der Kartei 50 Gäste zufällig heraus und stellt fest, dass 22 von ihnen bei ihrem letzten Besuch nur eine Nacht blieben. Kann er behaupten, der Anteil der Durchreisenden habe sich erhöht?

Rechnung siehe oben.
Antwort: Er hat eine signifikante Erhöhung (Signifikanzniveau 2,5%) des Durchreisenden-Anteils beobachtet. Mit einer statistischen Sicherheit von etwa 97,5% kann er davon ausgehen, dass es nun mehr Durchreisende gibt als früher.
*(Hier war **einseitiger Test** erlaubt, da er vorher schon eine Erhöhung vermutet hatte.)*

Anmerkung
Diese Seite wurde erstellt mit StarCalc, der Tabellenkalkulation des den Schulen kostenlos zur Verfügung gestellten StarOffice der Firma StarDivision.

Hyp 4a

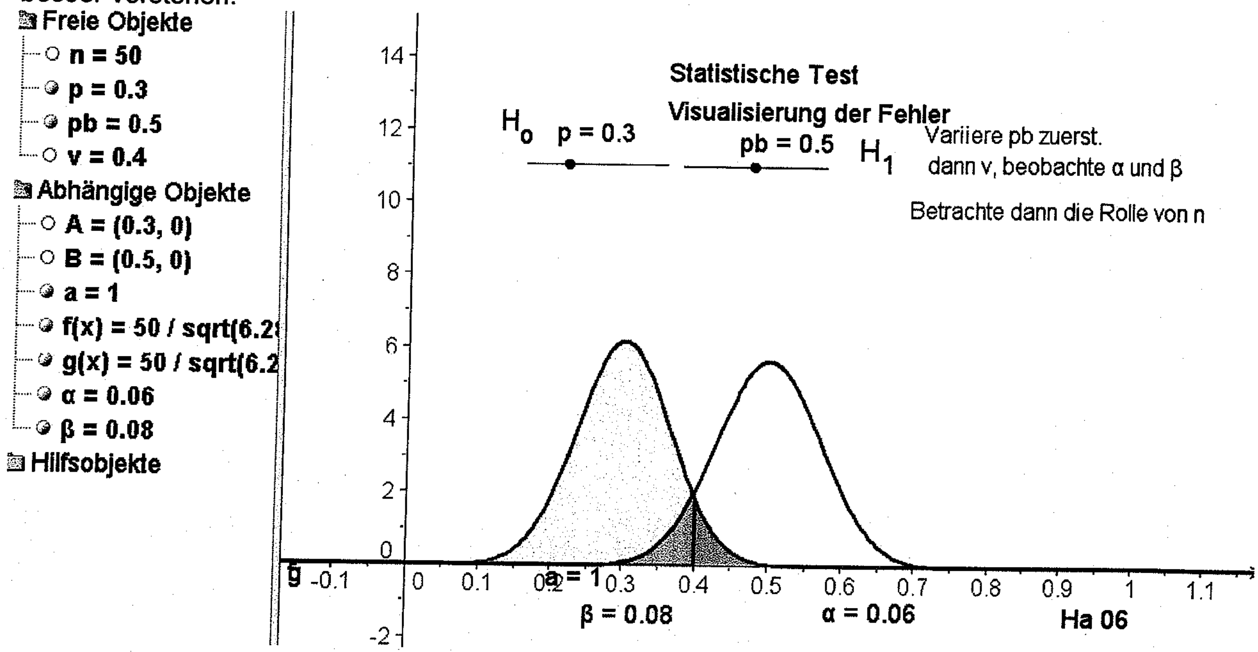
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, Mathematik Lehramt 31. Okt. 2006
http://haftendorn.uni-lueneburg.de www.mathematik-verstehen.de

Stochastik Tests und Fehler

Betrachtet wird eine zu H_0 gehörige Verteilung und ein einseitiger Test mit $H_1: \quad p > p_0$. Weiter hat man eine Versuchsergebnis $v = \frac{k}{n}$ und kann daraus das Signifikanzniveau α berechnen, im Bild dargestellt. Das ergibt einen "Signifikanztest". In anderer Auffassung kann man sich auch α vorher gewählt denken und das v bestimmen, das dann er Versuch erreichen muss, damit man H_1 auf diesen Niveau annimmt.
Vorausgesetzt wird in der zu diesem Bild gehörigen GeoGebra-Datei, dass es sich um eine binomialverteilte Zufallsgröße handelt, die man mit der Normalverteilung angenähert darstellt. Dadurch hat man eine stetige Kurve und Kenntnis von $\sigma = \sqrt{n\,p(1-p)}$.
Die Gleichung der Randkurve (Wahrscheilichkeits-Dichte-Funktion) ist

$$f(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\, e^{-\frac{(x-p)^2}{2\,np(1-p)}}.$$

In der linken Verteilung ist $H_0: \quad p = p_0$, die rechte entspricht $H_1: \quad p = p_b$.
Der Signifikanztest sagt bekanntlich nichts über die Größe von p_b aus.
Je nach Größe von ergeben sich andere Beta-Fehler.
Bei gleicher größe von p_b sinkt der Beta-Fehler aber auch, wenn n gößer wird. Der Test wird "trennschärfer". Dann reichen auch schon kleinere v für eine Signifikant aus. Diese Zusammenhänge kann man in der GeoGebra-Datei erkunden. Sonst werden OC-Kurven (Operationscharakteristik) zum Unterscheiden von Testssituatuonen und zum Betrachten der Beta-Fehler genutz. Diese OC-Kurven kann man hiermit besser verstehen.



OC-Kurven

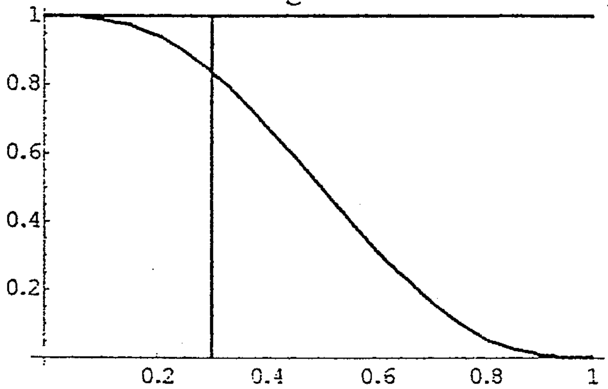
Dr. Dörte Haftendorn Sept 97

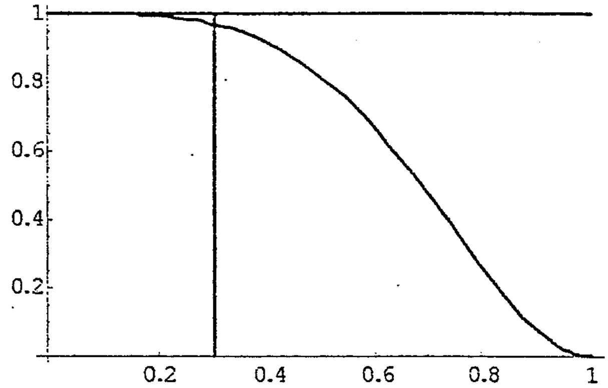
Gegeben ist ein Hypothesentest mit H_0 und H_1. Zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau oder aus einem Versuch hat man ein kritisches Gebiet A_1 ermittelt. Wenn die binomialverteilte Zufallsgröße in das Gebiet A_1 fällt, gedenkt man H_1 anzunehmen, anderenfalls wird man Ho beibehalten. Der Beibehaltungsbereich heiße A_0

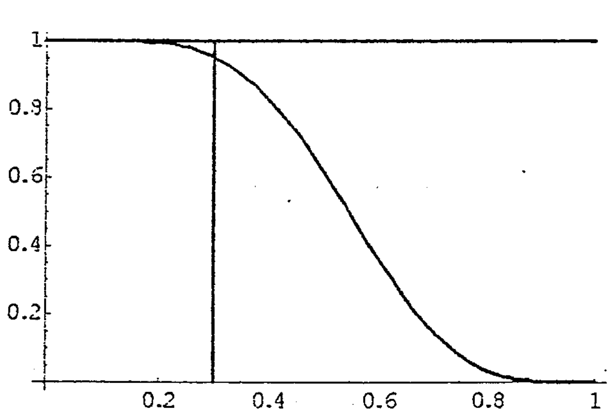
Ist H_1 richtig und behält man dennoch H_0 bei, so begeht man einen Fehler, den sogenannten Fehler 2. Art, den β-Fehler.

Dieser Fehler wiegt insofern nicht schwer, als man in diesem Fall ja gar nicht behaupten darf, H_0 sei richtig.

Die OC-Kurve zu diesem Test gibt nun die Wahrscheinlichkeit $P(X\in A_0)$ in Abhängigkeit der "wahren" Erfolgswahrscheinlichkeit p an.

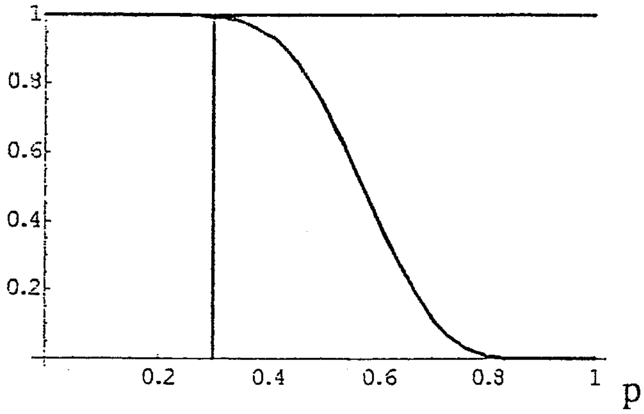


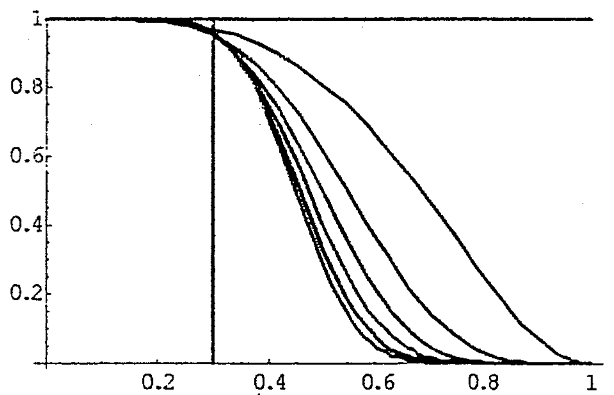




In Anlehnung an das Beispiel mit den Küken sind für $H_0: p = p_0 = 0{,}3$ $\quad H_1: p > p_0$ OC-Kurven dargestellt:

n=5 A1={3,4,5}	n=5 A1={4,5}
n=10 A1={6,7,...}	
n=20 A1={12,....}	$\alpha = 5\%$ $n\in\{5,10,....,30\}$





Rechts vom senkrechten Strich zeigt der Funktionswert bei jedem p an, mit welcher Wahrscheinlichkeit man den ß-Fehler begeht, also H_0 fälschlich beibehält, obwohl H_1 gilt, denn dort rechts ist das p ja größer als p_0.

Im Bild rechts unten ist gezeigt, dass bei gleichem Signifikanzniveau die "Trennschärfe" des Test mit zunehmendem n steigt, die OC-Kurven werden in der Mitte steiler.

OC-Kurven

Zwanzig Wissenschaftler führen denselben Signifikanz-Test auf dem 5%-Niveau durch. Bei allen trifft die Nullhypothese zu, ihre eigentliche Forschungshypothese ist falsch.
Welches der Bilder spiegelt ihre Stimmung nach dem Test? Warum?

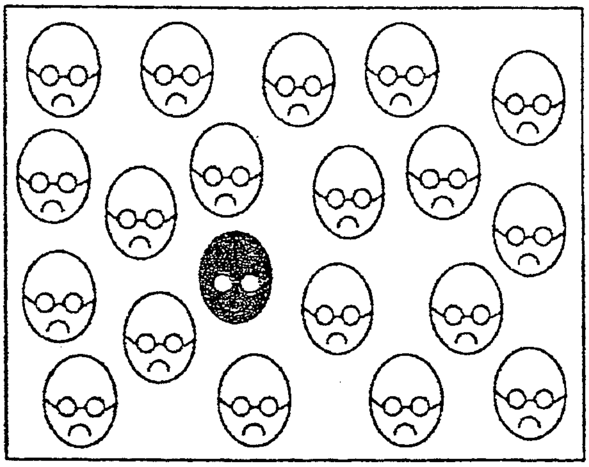
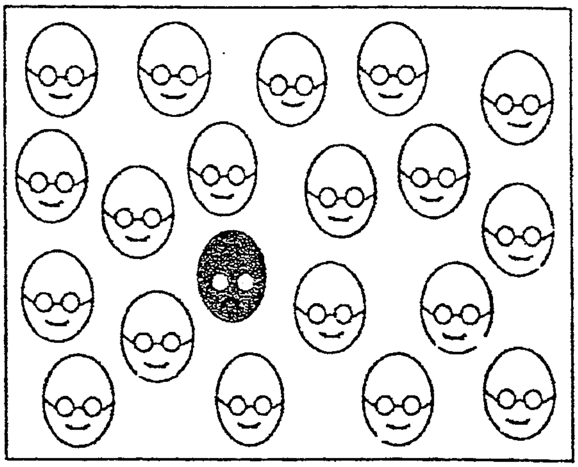


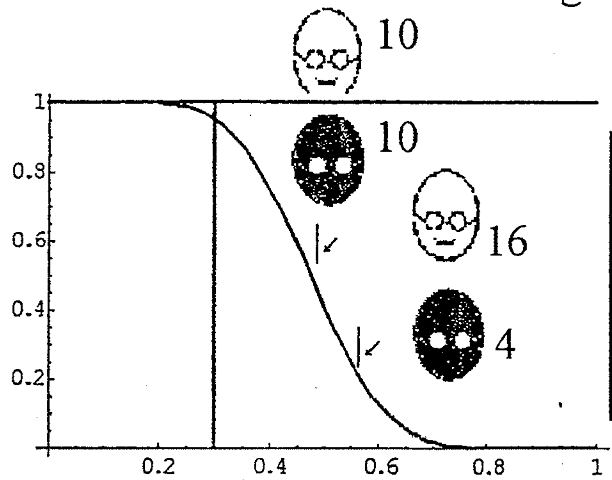
Bild 9.13: Zwanzig Wissenschaftler nach Durchführung eines Signifikanztestes



Zwanzig Wissenschaftler nach Durchführung eines Signifikanztestes

Das linke Bild stammt aus einem Schulbuch. Die Autoren meinen, 19 Forscher seien traurig, weil sie ihre Forschungshypothese nicht halten konnten.
Da aber H_1 gar nicht stimmt, sollten Sie eher froh sein, dass sie nicht aus Versehen den Fehler 1. Art (α-Fehler) begangen haben. Der eine, der sich zunächst freut, wird noch mit wissenschaftlichen Angriffen zu rechnen haben, denn seine Behauptung kann nicht von vielen anderen Versuchen gestützt werden (kann nicht verifiziert werden).
Wenn aber nun die Forschungshypothese stimmt, ergibt sich je nach dem "wahren" p ein anderer Anteil von Forschern, die sich freuen können, die richtige Erkenntnis auch wirklich signifikant (5%) nachgewiesen zu haben.

OC-Kurve für einen Test mit $p_0=0{,}3$



Je deutlicher der Effekt wirklich ist, desto leichter läßt er sich statistisch nachweisen.

Hyp-7-

TI-92 Statistik

Umfassendes TutorSkript für den Einsatz im Unterricht

Dr. Dörte Haftendorn Johanneum   Datei binomisk.92p   15. Juni 1997 und 10/98

:Binomialverteilung
C:setFold(arbeit)
:waehle gleich Funktion und Skript
C:arbeit()   *Arbeit( ) ruft ein Programm auf, das über Dialogboxen beim Einstellen hilft.*
C:setFold(statisti)
C:define B(k,n,p)=nCr(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k)   *Binomialverteilung*
:Also ist P(X=k)=B(k,n,p)
:Dabei ist nCr(n,k) gleich n ueber k   *Binomialkoeffizienten*
C:nCr(10,3)
C:define cumbin(k,n,p)=∑(B(i,n,p),i,0,k)   *kumulierte Binomialverteilung*
:Also ist P(X<=k)=cumbin(k,n,p)
:Festlegung der Parameter
C:10»n: 0.3»p   **» ist die Taste Sto▹**
:Berechnungen
C:n*p»μ : μ»mu   © 2nd char 1 b   ***© ist das Kommentarzeichen , 2nd X***
C:√(n *p *(1-p))»σ: σ»sig   2nd char 1g
:Darstellung
C:μ-3 *σ»xmin
C:μ+3 σ»xmax
C:0»ymin:1/(2*σ)»ymax
C:seq(k,k,0,n)»xi   *Listen für die Graphen*
C:seq(B(k,n,p),k,0,n)»binlist
C:newData bin, xi,binlist   *Dies ist lohnend, weil man nun mit Apps 6 bin die*
:zur besseren Uebersicht   *Listen ansehen kann*
C:plotsoff   *Schaltet etwa noch vorhandene andere Plots ab.*
C:newPlot 1,1,xi,binlist   *Die erste Zahl ist die Nummer der Plots.*
C:newPlot 2,2,xi,binlist   *Die zweite Zahl ist der Typ, 1=Scatter 2=xyline*
Mit Newplot werden die Graphen erst Definiert. Und sie bekommen in y=Fenster ein Häkchen.
Beim nächsten Graph-Befehl werden sie angezeigt

C:define normbin(x)= $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$ ***Normalverteilung***

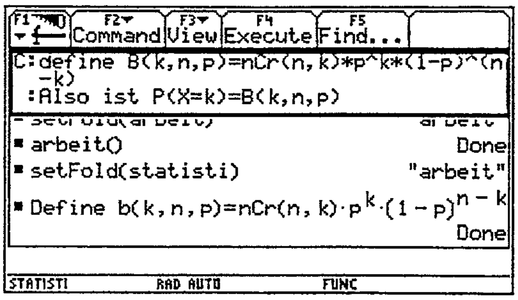
C:normbin(5)
C:normbin(x)»y1(x)
:diese Taufe ermoeglicht im y= mit F6 den Style auf dick umzustellen.
C:graph normbin(x),x
:Tippe 2nd Apps für den Wechsel ins Graph-Fenster
:im Graph-Fenster kann dann mit F5 7
:sofort das Integral berechnet werden
:********weitere Moeglichkeiten
C:define gauss(x)=1/√(2*π)*e^(-x^2/2)   ***Standardnormalverteilung***
C:-3»xmin:3»xmax:0»ymin:0.5»ymax   *Neue Fensterkoordinaten*
C:plotsoff:Fnoff: *Ausschalten der bisherigen Funktionen, die nicht passen.*
C:graph gauss(x)
C:(x-μ)/σ»z
C:define φ(z)=nInt(gauss(x),x,-4,z)   ***kumulierte Standardnormalverteilung***
:Dabei ist φ 2nd 1 i,   kumuliert
C:φ(1)   *Beschaffung der "Tafel"-Werte*
:********* **Histogramm**
:Noetig: Liste fuer xi muss eine Liste
:ganzer Zahlen als Frequenzen sein, daher Faktor 100
C:μ-3*σ»xmin :μ+3*σ»xmax
C:0»ymin:100/(2*σ)»ymax ©Werte 100*oben
C:fnoff: plotsoff
C:round(100*binlist,0)»binzahl
Mit Eintragen von Binzahl bei c3 kann man die Werte in Apps 6 bin übersichtlicher sehen.
C:newPlot 3,4,xi,,binzahl
:Tippe 2nd Apps , dann Graph-Fenster
:Hierzu passt die 100-fache Normalvert.
C:define normzahl(x)=100*normbin(x)
C:graph normzahl(x)

Einrichten der Arbeitsumgebung

APPS 9 2 ▹ statisti ▿ ▹ binomisk ENTER ENTER

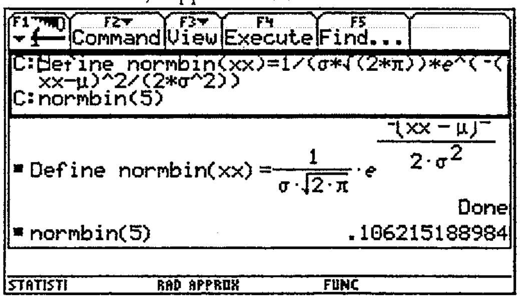
Es wird das links stehende TutorSkript geladen. Nun muss man erstmal mit Halten des Cursors ganz nach oben laufen.

Alle Zeilen, die vorn ein C: stehen haben, können mit F4 zur Ausführung gebracht werden.

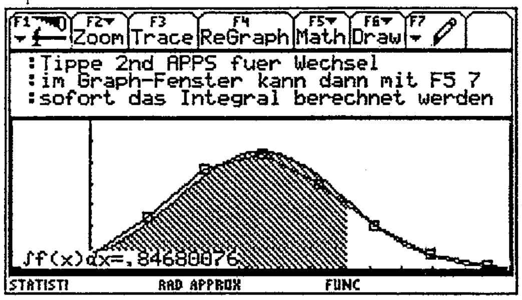


Der Wechsel zwischen den beiden Fenstern findet mit 2nd APPS statt.

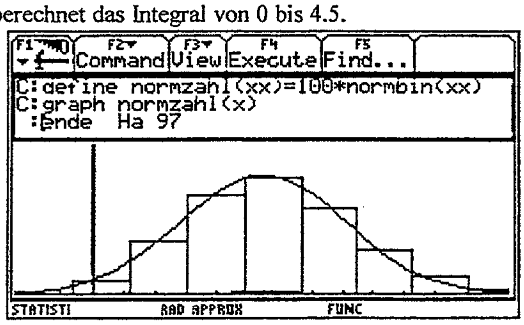
Dadurch kann das TutorSkript immer stehenbleiben. Sollte es dennoch einmal verschwunden sein, gehe ins ober Fenster, Tippe APPS 9 Enter.



Die Karos sind also von Plot1, die Kurve durch die Karos von Plot 2 gemacht. Die andere Kurve ist die Normalverteilung und durch den Nachfolgenden Graphbefehl entstanden.



Im Graph-Fenster F5 7 0 Enter 4 Enter zeigt und berechnet das Integral von 0 bis 4.5.



TI-92 Statistik

TutorSkript Binomialverteilung und Hypothesentest

Hyp8 -

Dr.Dörte Haftendorn Johanneum Datei hypbinsk.92p 30. September 1997

```
:Hypothesentest mit Binomialverteilung
C:setfold(statisti) nur wenn Sie diesen Ordner haben
C:20»n                          Belegung der Variablen
C:.3»p
C:n*p»µ : µ»mu       ©2nd char 1 b
                     © ist das Kommentarzeichen, 2nd X
C:√(n *p *(1-p))»σ: σ»sig ©2nd char 1g
 :Darstellung
C:floor(µ-3 *σ)»xmin
C:floor(µ+3 σ+1)»xmax
C:0»ymin:1/(2*σ)»ymax
 :Typ1  moeglichst n<100
C:seq(k,k,0,n)»xi               Sonst zu lange Listen
C:seq(B(k,n,p),k,0,n)»binlist
 :Typ1  moeglichst n>50
C:seq(k,k,xmin,xmax)»xi   Vorher in dem Ordner schon
                  einmal binomisk abgeschickt haben !!!
C:seq(B(k,n,p),k,xmin,xmax)»binlist ©n>100
 :weiter beide Typen
C:cumsum(binlist)»cbinlist
C:newData bindaten, xi,binlist,cbinlist
 :zur besseren Uebersicht
C:plotsoff:Fnoff
   Ausschalten der bisherigen Funktionen, die nicht passen
C:newPlot 1,1,xi,binlist
   Die erste Zahl ist die Nummer der Plots, die zweite legt den Typ fest.,
C:newPlot 2,2,xi,binlist
 :Fenster wechseln, dann Graphfenster
 :Cumulierter Graph
C:1»ymax
C:plotsoff:Fnoff
C:newPlot 3,1,xi,cbinlist
C:newPlot 4,2,xi,cbinlist
 :Fenster wechseln, dann Graphfenster
 :Ha 9|97
 :
```

Laden Sie dieses Skript. Teilen Sie den Bildschirm passend ein, z.B. mit meinem Programm arbeit( ). Es ist vernünftig, sich einen Ordner `statisti` anzulegen, in dem können dann die grundlegenden Definitionen, die mit `binomisk` vorgenommen werden, erhalten bleiben. Dieses Skript greift darauf zurück.

APPS 9 2 ▹ `statisti` ▿ ▹ `hypbinsk` ENTER ENTER

Es wird das links stehende TutorSkript geladen. Nun muss man erstmal mit Halten des Cursors ganz nach oben laufen.

Alle Zeilen, die vorn ein C: stehen haben, können mit F4 zur Ausführung gebracht werden.

Der Wechsel zwischen den beiden Fenstern findet mit 2nd APPS statt.

Dadurch kann das TutorSkript immer stehenbleiben. Sollte es dennoch einmal verschwunden sein, gehe ins ober Fenster, Tippe APPS 9 Enter.

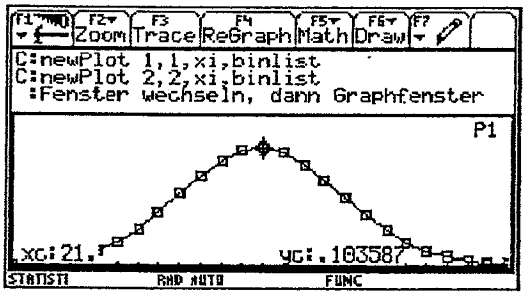
Tragen Sie n und p nach Wunsch ein und schicken Sie die nachfolgenden Zeilen ab.

Für kleinere n kann die gesamte Verteilung in eine Liste aufgenommen werden, für große n wird die Liste auf die 3σ-Umgebung von µ verkürzt.

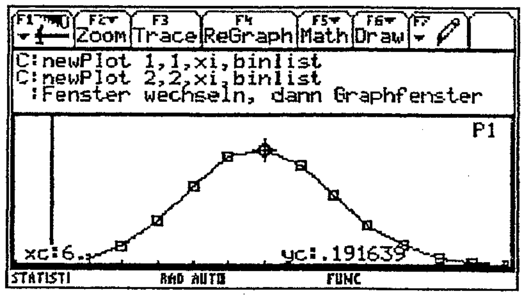
Im Data-Matrix-Editor könnte man nach dem Befehl newData unter dem Namen bindaten die Listen der xi, der Dichte und der cumulierten Verteilungsfunktion der Binomialverteilung ansehen.

Nun werden die Graphen definiert, einmal der durchgezogene und einmal der mit den Quadraten.

Nun muss man mit 2nd Apps in die breitere Fensterhälfte wechseln und mit Diamant Graph kommt etwa folgendes Bild.

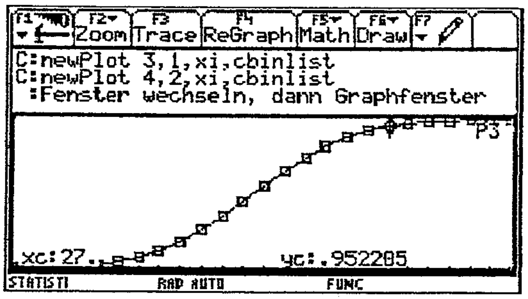


n = 70 , p = 0,3



Mit F3 Trace ⟶ kann man das Kreuz von Punkt zu Punkt bewegen.

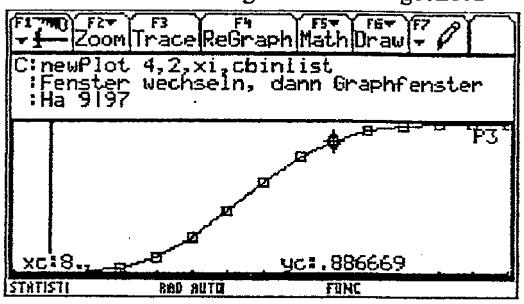
Um einen Graphen direkt zu Entscheiden zu benutzen, braucht man den cumulierten Graphen. Er wird durch die nachfolgenden Befehle gebildet.



Mindestens 28 Erfolge muß man beim rechts einseitigen Test haben, um mit einer statistischen Sicherheit von mindestens 95,2% die Hypothese H1 halten zu können.

$$\alpha = P(X \geq 28)$$
$$= 1 - P(X \leq 27)$$
$$= 1 - 0{,}952205 = 4{,}8\%$$

Hypothesentest direkt am Bild !



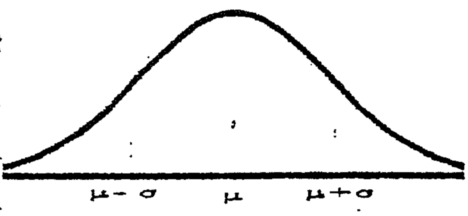
In ihm kann man durch Bewegen des Kreuzes (F3) sofort ablesen, ab welchem k man welches Signifikanzniveau hat.

zu 26

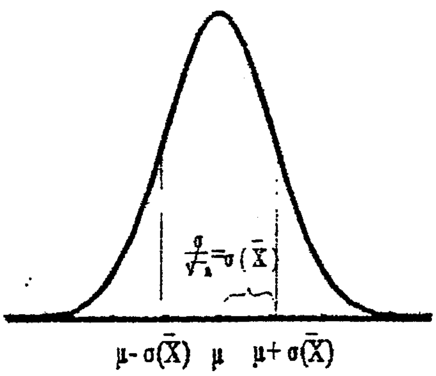
Stetige Messgrößen

Dr. Dörte Haftendorn Sept 97

Merksatz der Messtechnik



Beruhen die Fehler, mit denen der einzelne Messwert behaftet ist, auf vielen kleinen zufälligen unabhängigen Einflüssen, so sind bei einer langen Messreihe die einzelnen Werte annähernd normalverteilt.



Das heißt, dass etwa 68% von ihnen in einer 1σ-Umgebung von μ liegen.

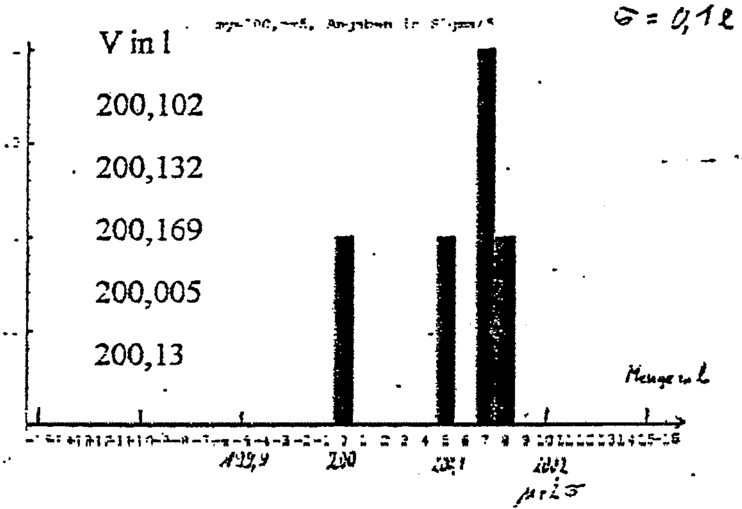
Meist ist aber weder μ noch σ bekannt.

Man versucht beide aus Messreihe der Länge n zu gewinnen.

Nun ist klar, dass die sich so ergebenden Mittelwerte nicht mehr so stark streuen,

Es ist zwar so, dass der Erwartungswert der Mittelwerte $\bar{X}$ weiterhin μ ist, aber die Standardabweichung der Mittelwerte hängt von n ab und muss (nach Gauß) mit $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ berechnet werden.

Hypothesentest



(Ein-Stichproben-Gauß-Test)

Durch eine Messreihe der Länge n und einen Test soll statistisch erwiesen werden, ob diese Maschine, die normalerweise 200 l Bier mit einer Standardabweichung für Einzelwerte von 0,1 l abfüllt, nun nachgeregelt werden muß.

Der Werkmeister hat schon seit geraumer Zeit den Eindruck, es sei zu viel. (Also kann der Test einseitig sein.)

Messung von 5 Abfüllungen. Berechnung des Mittelwertes

$\bar{X}$=200,1076 l≈200,1 l Prüfgröße $z = \dfrac{200{,}1 - 200}{\dfrac{0{,}1}{\sqrt{5}}} = 2{,}236 \rightarrow \Phi(z) = 0{,}9874$

Der Wert liegt außerhalb der 2σ-Grenzen, weicht also signifikant ab.

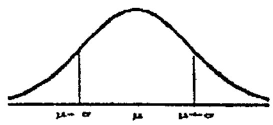
Irrtumswahrscheinlichkeit α=1-0,9874=1,3%. (Zweiseitig wäre α=2,6%).

Die Maschine sollte nachgeregelt werden.

Wird derselbe physikalische Sachverhalt mehrfach gemessen, so entsteht eine Meßreihe, deren Werte mehr oder weniger schwanken. Meist kann man davon ausgehen, daß der einzelne Meßwert einer Summe von vielen kleinen zufälligen Einflüssen unterliegt. Dann handelt es sich um eine **normalverteilte Meßgröße.**

Trotz der Grenzen, die das Ablesegerät setzt, betrachtet man eine übliche **Meßgröße als stetig**. Das bedeutet, daß bei großem Stichprobenumfang n die einzelnen Meßwerte gemäß einer Normalverteilung verteilt sind. Der Erwartungswert μ ist der (meist unbekannte) **wahre** physikalische Wert der Meßgröße. Ebenso unbekannt ist meist die **wahre** Standardabweichung σ, die zu diesem Meßprozeß gehört. Eine übliche Situation ist, daß man mit Hilfe der Meßreihe **Schätzwerte** für μ und σ angeben will. **(Punktschätzung)**.

Verteilung der Einzelmeßwerte

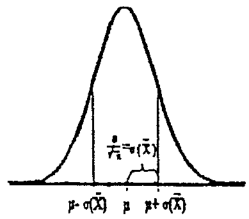


Der beste Schätzwert für μ ist der Mittelwert der Meßreihe $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$,

Der beste Schätzwert für die Standardabweichung σ der Einzelwerte ist

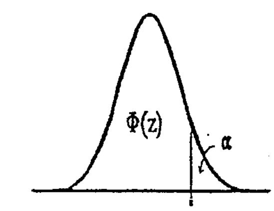
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - n(\overline{X} - a)^2\right)}$$,a ist eine beliebige Zahl.

Verteilung der Mittelwerte bei n Messungen



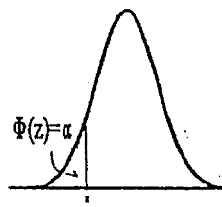
Das so mit n-1 berechnete s heißt **empirische Standardabweichung.**
In theoretischen Zusammenhängen, in denen dann auch μ theoretisch bekannt ist, wird σ als Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung von μ , also mit n statt mit n-1 im Nenner, berechnet.
Wenn es sich also um eine Normalverteilung handelt, sollten bei langen Meßreihen 68 % der einzelnen Meßwerte in einer 1-sigma-Umgebung um den wahren Wert μ liegen. Für die z·σ-Umgebung siehe Seite 22z.Werden aber nun viele solcher Messungen mit demselben n gemacht, so streuen die so errechneten Mittelwerte nicht so stark, d.h., die Verteilung der Mittelwerte hat eine kleinere Standardabweichung, sie ist enger. Es gilt $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Für diesen theoretischen Wert der Standardabweichung solcher Mittelwerte ist $s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ der beste Schätzwert.

Angabe des Meßergebnisses : $\overline{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}$, also z.B. R= 56,7 Ω ± 0,6 Ω



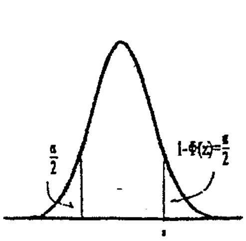
Hypothesentest mit normalverteilten Meßgrößen:

Situation: Man geht davon aus, daß man σ aus langer Erfahrung gut kennt. Ist dies nicht der Fall, ist die Student-t-Verteilung (Seite 28) anzuwenden. Durch eine Meßreihe vom Umfang n soll geprüft werden, ob die Meßgröße sich signifikant (auf dem Niveau α) von einen (bisherigen) Wert μ_0 unterscheidet. μ_0 entpricht also der Nullhypothese. Beim zweiseitigen Test ist $H_1 : \mu \neq \mu_0$, beim einseitigen steht ≤ oder ≥ .



Der gemessene Mittelwert sei $\overline{X_{gem}}$.Entsprechend dem auf Seite 25 beschriebenen allgemeinen Vorgehen berechnet man die Prüfgröße z $z = \frac{\overline{X_{gem}} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ mit der

Bedeutung $P(\overline{X} \leq \overline{X_{gem}}) = \Phi(z)$, Tabelle Seite 24.



Beim **genauen** einseitigen **Hypothesentest**, ist Φ(z), bzw. 1- Φ(z) die **Irrtumswahrscheinlichkeit** α . Beim zweiseitigen Hypothesentest ist α das Doppelte dieses Wertes.

Wenn α **vorgegeben** ist, so ist z_{Tab} in der Tabelle Seite 24 rechts abzulesen.

Ist nun $z \geq z_{Tab}$, so ist die beobachtete Abweichung der Messung signifikant auf dem Niveau α. Das bedeutet: Mit der (kleinen) Wahrscheinlichkeit α kommt die beobachtete Messung als reine Zufallsschwankung vor, wenn doch das μ_0 der Nullhypothese der Messung zugrunde lag. Wenn α also klein ist, halten wir es für **statistisch erwiesen**, daß ein anderer Wert als μ_0 der Messung zugrunde lag.

FISHERsche F-Verteilung

FISHERsche F-Verteilung: Quantile f_{α, m_1, m_2}

m = FG $\alpha = 5\%$ einseitig (m_1) $\alpha = 10\%$ zweiseitig

m_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	30	40	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	250,0	251,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,46	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,74	8,64	8,62	8,59	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,75	5,72	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,50	4,46	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,81	3,77	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,38	3,34	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	3,08	3,05	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,86	2,83	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,70	2,66	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,57	2,53	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,51	2,47	2,43	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,60	2,42	2,38	2,34	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,31	2,27	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,25	2,20	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,19	2,15	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	2,15	2,10	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	2,11	2,06	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	2,07	2,03	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	2,04	1,99	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	2,01	1,96	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,98	1,94	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,37	2,20	2,00	1,96	1,91	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,94	1,89	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,92	1,87	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,90	1,85	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,31	2,13	1,93	1,88	1,84	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,12	1,91	1,87	1,82	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,28	2,10	1,90	1,85	1,80	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,84	1,79	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,15	2,00	1,79	1,74	1,69	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,65	1,59	1,39
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,55	1,49	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,75	1,52	1,46	1,39	1,00

m = FG $\alpha = 1\%$ einseitig (m_1) $\alpha = 2\%$ zweiseitig

m_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	30	40	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6235	6261	6287	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,37	99,42	99,46	99,47	99,47	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,50	26,41	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,84	13,74	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,47	9,38	9,29	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31	7,23	7,14	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,99	5,91	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	5,20	5,12	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,65	4,57	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	4,25	4,17	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,94	3,86	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,70	3,62	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,30	3,96	3,59	3,51	3,43	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,14	3,80	3,43	3,35	3,27	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	3,21	3,13	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	3,10	3,02	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,46	3,08	3,00	2,92	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,00	2,92	2,84	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	2,92	2,84	2,76	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,78	2,69	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,72	2,64	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,75	2,67	2,58	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,62	2,54	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,66	2,58	2,49	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,54	2,45	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,50	2,42	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,47	2,38	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,76	3,53	3,23	2,90	2,52	2,44	2,35	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,49	2,41	2,33	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,38	2,30	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	2,20	2,11	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	2,03	1,94	1,60
125	6,84	4,78	3,94	3,48	3,17	2,95	2,66	2,33	1,94	1,85	1,75	1,37
∞	6,63	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	1,70	1,59	1,00

Hat man zwei Messungen gemacht, die die empirischen Standardabweichungen

$$s_1 \text{ und } s_2$$

aufweisen, so kann getestet werden, ob der **Unterschied** zwischen s_1 und s_2 **signifikant** ist.

Die F-Verteilung von Fisher ist dafür die Grundlage.

Mit s_1 sei die größere der beiden Standardabweichungen bezeichnet.

Hat man keinen vernünftigen Grund dafür, daß s_1 größer ausfällt, so ist **zweiseitig** zu testen, anderenfalls **einseitig.**

Man gibt sich ein Signifikanzniveau α vor. Mit den Tabellen auf dieser Seite sind nur 5% und 1% einseitig, bzw 10% und 2% zweiseitig möglich.

Die **Prüfgröße** F ist zu berechnen:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad \text{mit} \quad s_1 \geq s_2$$

n_1 und n_2 seien die beiden Stichprobenumfänge.

Dann sind $m_1 = n_1 - 1$

und $m_2 = n_2 - 1$

die beiden **Freiheitsgrade.**

In der Tabelle ist nun der Tafelwert

F_{α, m_1, m_2} abzulesen.

Ist das berechnete F **größer** als der Tafelwert, so ist der Unterschied der Varianzen, bzw. der Unterschied der Standardabweichungen signifikant auf dem Niveau α.

Normalverteilung + Deskriptive Statistik + F-Test t-Test

zu 27/28

QuattroPro Ha 1/95

Nummer	Mann	Frau
1	80,15754	81,13279
2	103,8032	89,03997
3	90,53971	92,68185
4	77,0355	91,18387
5	107,3293	93,03952
6	98,08068	98,61216
7	112,8666	101,9149
8	104,8149	88,9375
9	101,6387	103,5131
10	107,3775	53,7889
11	100,4584	96,22073
12	110,1553	85,9725
13	97,3614	104,9674
14	104,6098	84,91335
15	101,1216	85,80628
16	90,28156	76,43054
17	87,45128	92,23377
18	91,0205	98,95554
19	100,6751	104,3425
20	103,8954	86,64642
21	104,9263	112,4361
22	107,6205	96,12473
23	113,635	120,9926
24	113,7958	79,39686
25	114,3264	90,03892
26	107,9764	85,1855
27	93,19531	77,76207
28	104,5104	81,53144
29	116,4688	102,1275
30	97,47837	77,75287
31	91,628	116,9761
32	114,0056	97,14974
33	94,73782	92,11605
34	97,42825	88,16064
35	90,29081	80,206
36	102,0689	92,5696
37	109,2229	90,76758
38	104,3627	126,0104
39	97,04129	97,68469
40	97,00809	97,56513
41	85,9757	97,60308
42	106,2043	
43	101,5504	
44	84,61223	
45	100,6372	
46	98,42823	
47	90,00216	
48	93,75985	
49	97,96327	
50	107,4668	
51	103,8691	
52	109,0544	
53	106,6238	
54	116,0437	
55	112,6298	
56	99,7607	
57	99,2623	
58	93,81918	
59	88,01593	
60	101,4653	
61	86,35527	

normal verteilt

Spalte 1		*Spalte 1*	
Mittelwert	100,4246	Mittelwert	92,93881
Standardfehler	1,168273	Standardfehler	2,033156
Median	101,1216	Median	92,23377
Modalwert	NV	Modalwert	NV
Standardabweichung	9,1245	Standardabweichung	13,01855
Varianz	83,25651	Varianz	169,4827
Kurtosis	-0,302825	Kurtosis	1,821266
Schiefe	-0,350037	Schiefe	0,058593
Bereich	39,43328	Bereich	72,22151
Minimum	77,0355	Minimum	53,7889
Maximum	116,4688	Maximum	126,0104
Summe	6125,901	Summe	3810,491
Anzahl	61	Anzahl	41
Konfidenzniveau	2,289772	Konfidenzniveau	3,984913

F-Test: 2 Stichproben

zu -27-

	Variable 1	*Variable 2*
Mittelwert	100,4246	92,938811862544
Varianz	83,25651	169,48270676801
Beobachtungen	61	41
Freiheitsgrade	60	40
F	2,035669	
P(F<=f) einseitig	0,009336	
F Kritischer Wert einsei	1,467157	
F(0,2,40,60) zweis.	1,75	
F=(s groß/s klein)^2		
s groß	13,01855	
s klein	9,1245	
F gemessen	2,035669	

Auf dem 2%Niveau ist nachgewiesen,
daß der Werte der Männer und Frauen unterschiedlich weit streuen.

t-Test

zu -28-

t gemessen	3,192366
df=(n1+n2-2)/ 2	50
t kritisch 0,5% einseitig	2,678
t kritisch 0,1% einseitig	3,245

Männer sind haben hochsignifikant größere Werte als Frauen

t-Test: Gepaarte Stichprobe für ungleiche Varianz

	Variable 1	*Variable 2*
Mittelwert	100,4246	92,938811862544
Varianz	83,25651	169,48270676801
Beobachtungen	61	41
Pearson-Korrelation	NV	
Gepoolte Varianz	117,747	
Freiheitsgrade	66	
t	3,192366	
P(T<=t) einseitig	0,001081	0,05
t Kritischer Wert einseit	1,668271	
P(T<=t) zweiseitig	0,002162	
t Kritischer Wert zweise	1,996564	

Einstichproben-t-Test

Es sei eine Nullhypothese H_0 : $\mu=\mu_0$ über eine Meßgröße aufgestellt. Hat man zur Überprüfung eine Messung vom Stichprobenumfang n, dem Mittelwert $\overline{X}$ und der "empirischen" Stichproben-Standardabweichung s (berechnet mit n-1) gemacht, so bräuchte man für das zur Normalverteilung gehörige z die unter H_0 geltende Standardabweichung σ, bzw $\sigma/\sqrt{n}$.
Ist nun aber σ nicht bekannt, muß man s bzw. $s / \sqrt{n}$ nehmen, dann ist aber statt mit der Normalverteilung mit der **t-Verteilung** nach Student zu arbeiten. Dazu berechnet man die Prüfgröße

$$t = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

. Zum Freiheitsgrad FG = n-1 und dem vorgesehenen α liest man nun in der Tabelle eine Dezimalzahl $t_{FG\alpha}$ ab.

Ist das berechnete t größer als der Tabellenwert $t_{FG,\alpha}$, so kann die Hypothese H_1 auf dem Signifikanzniveau α angenommen werden, H_0 wird dann verworfen. Anderenfalls muß H_0 beibehalten werden und es ist nichts geklärt. "Aufgrund dieser Messung konnte H_0 nicht verworfen werden, die Messung ist (noch) verträglich mit H_0."
Wie immer ist ein einseitiger Test nur zulässig, wenn man **vorher** die Richtung der Abweichung angeben kann. Die α für **einseitigen** Test sind bei der Tabelle **unten** notiert, für den **zweiseitigen** Test **oben**.

Irrtumswahrscheinlichkeit α für den zweiseitigen Test									
FG \ α	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619	6366,198
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598	99,992
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924	28,000
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	15,544
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	11,178
5	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	9,082
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7,885
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	7,120
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	6,594
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	6,211
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	5,921
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	5,694
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	5,513
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	5,363
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	5,239
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	5,134
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	5,044
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	4,966
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,561	3,579	3,883	4,897
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,345	3,552	3,850	4,937
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,331	3,527	3,819	4,784
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	4,736
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767	4,693
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	4,654
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	4,619
25	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	4,587
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	4,558
29	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	4,530
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	4,506
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	4,482
32	0,682	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622	4,441
34	0,682	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601	4,405
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591	4,389
36	0,681	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582	4,374
38	0,681	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566	4,346
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	4,321
42	0,680	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698	3,296	3,538	4,298
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281	3,520	4,269
47	0,680	1,300	1,678	2,012	2,408	2,685	3,273	3,510	4,251
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	4,225
55	0,679	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	3,245	3,476	4,196
50	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	4,169
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435	4,127
30	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	4,096
90	0,677	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402	4,072
100	0,577	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	4,053
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373	4,025
200	0,676	1,286	1,553	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	3,970
500	0,675	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	3,922
1000	0,575	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300	3,906
-	0,675	1,292	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,290	3,591
FG / α	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,00005
Irrtumswahrscheinlichkeit α für den einseitigen Test									

Vergleich zweier Mittelwerte

Will man testen, ob sich die Mittelwerte unabhängiger Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten signifikant unterscheiden, berechnet man die Prüfgröße t und den zugehörigen Freiheitsgrad FG. Andere Bezeichnungenfür FG sind m, v,df.

$$t = \frac{|\overline{x_1} - \overline{x_2}|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad \text{und} \quad FG = \frac{n_1 + n_2 - 2}{2}$$

Man vergleicht wie oben t mit dem Tabellenwert. Eine Formulierung kann dann sein: "Die beiden Grundgesamtheiten haben signifikant unterschiedliche Mittelwerte (auf dem Niveau α)."

Literaturhinweise zur Stochastik :
Nebenstehende Tabelle wurde dem Buch: Lothar Sachs: Angewandte Statistik (Springer-Verl.) entnommen. Dieses grundlegende Buch bietet sicher Antwort auf fast alle Fragen der Statistik.
An den Ingenieur wendet sich
Lothar Papula Mathematik... Bd.3
Eine gute Zusammenstellung bietet
Lothar Sachs: Statistische Methoden, Planung und Auswertung
(Alle sind in der Bibliothek mehrfach vorhanden.)

Liegt eine Bernoullikette vor, dh. n ja/nein Entscheidungen, die einzeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit p eintreten, so ist die Binomialverteilung anzuwenden. Handelt es sich nun aber um ein seltenes Ereignis, so hat man Probleme mit einer Annäherung durch die Normalverteilung, da die Laplacebedingung $npq>9$ nicht erfüllt ist. In diesem Fall ist die Poisson-Verteilung anzuwenden.

S . wieder X die Zahl der Treffer und $\lambda = \mu = np$, so gilt

$$P(X=k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Diese Werte kann man mit dem TR berechnen, sie^s/ind^ aber auch nebenstehend tabelliert.

Beispiel: Ist die Wahrscheinlichkeit, Kinderlähmung (gehabt) zu haben $p=0{,}0001$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß keins oder nur eins der 2000 einzuschulenden Kinder diese Behinderung hat

bei $\mu=0{,}0001 \cdot 20000 = 0{,}2$ damit $P(X \le 1) = P(X=0)+P(X=1) = 0{,}9825$

$$F_P(k;\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

Poissonverteilung

Verteilungsfunktion

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	k
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679	3329	3012	0
1	9953	9825	9631	9384	9098	8781	8442	8088	7725	7358	6990	6626	1
2	9998	9989	9964	9921	9856	9769	9659	9526	9371	9197	9004	8795	2
3		9999	9997	9992	9982	9966	9942	9909	9865	9810	9743	9662	3
4				9999	9998	9996	9992	9986	9977	9963	9946	9923	4
5							9999	9998	9997	9994	9990	9985	5
6										9999	9999	9997	6

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000.

k \ λ	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	k
0	0,2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353	1225	1108	1003	0907	0
1	6268	5918	5578	5249	4932	4628	4337	4060	3796	3546	3309	3084	1
2	8571	8335	8088	7834	7572	7306	7037	6767	6496	6227	5960	5697	2
3	9569	9463	9344	9212	9068	8913	8747	8571	8386	8194	7993	7787	3
4	9893	9857	9814	9763	9704	9636	9559	9473	9379	9275	9162	9041	4
5	9978	9968	9955	9940	9920	9896	9868	9834	9796	9751	9700	9643	5
6	9996	9994	9991	9987	9981	9974	9966	9955	9941	9925	9906	9884	6
7	9999	9999	9998	9997	9996	9994	9992	9989	9985	9980	9974	9967	7
8					9999	9999	9998	9998	9997	9995	9994	9991	8
9									9999	9999	9999	9998	9

k \ λ	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	k
0	0,0821	0743	0672	0608	0550	0498	0450	0408	0369	0334	0302	0273	0
1	2873	2674	2487	2311	2146	1991	1847	1712	1586	1468	1359	1257	1
2	5438	5184	4936	4695	4460	4232	4012	3799	3594	3397	3208	3027	2
3	7576	7360	7141	6919	6696	6472	6248	6025	5803	5584	5366	5152	3
4	8912	8774	8629	8477	8318	8153	7982	7806	7626	7442	7254	7064	4
5	9580	9510	9433	9349	9258	9161	9057	8946	8829	8705	8576	8441	5
6	9858	9828	9794	9756	9713	9665	9612	9554	9490	9421	9347	9267	6
7	9958	9947	9934	9919	9901	9881	9858	9832	9802	9769	9733	9692	7
8	9989	9985	9981	9976	9969	9962	9953	9943	9931	9917	9901	9883	8
9	9997	9996	9995	9993	9991	9989	9986	9982	9978	9973	9967	9960	9
10	9999	9999	9999	9998	9998	9997	9996	9995	9994	9992	9990	9987	10
11					9999	9999	9999	9999	9998	9998	9997	9996	11
12										9999	9999	9999	12

k \ λ	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	k
0	0,0247	0224	0202	0183	0166	0150	0136	0123	0111	0101	0091	0082	0
1	1162	1074	0992	0916	0845	0780	0719	0663	0611	0563	0518	0477	1
2	2854	2689	2531	2381	2238	2102	1974	1851	1736	1626	1523	1425	2
3	4942	4735	4532	4335	4142	3954	3772	3594	3423	3257	3097	2942	3
4	6872	6678	6484	6288	6093	5898	5704	5512	5321	5132	4946	4763	4
5	8301	8156	8006	7851	7693	7531	7367	7199	7029	6858	6684	6510	5
6	9182	9091	8995	8893	8786	8675	8558	8436	8311	8180	8046	7908	6
7	9648	9599	9546	9489	9427	9361	9290	9214	9134	9049	8960	8867	7
8	9863	9840	9815	9786	9755	9721	9683	9642	9597	9549	9497	9442	8
9	9952	9942	9931	9919	9905	9889	9871	9851	9829	9805	9778	9749	9
10	9984	9981	9977	9972	9966	9959	9952	9943	9933	9922	9910	9896	10
11	9995	9994	9993	9991	9989	9986	9983	9980	9976	9971	9966	9960	11
12	9999	9998	9998	9997	9997	9996	9995	9993	9992	9990	9988	9986	12
13			9999	9999	9999	9999	9998	9998	9997	9997	9996	9995	13
14								9999	9999	9999	9999	9999	14

$$f_P(k;\lambda) = F_P(k;\lambda) - F_P(k-1;\lambda)$$

Beisp.: $F_P(6;3{,}8) = 0{,}9091$; $f_P(3;0{,}8) = F_P(3;0{,}8) - F_P(2;0{,}8) = 0{,}9909 - 0{,}9526 = 0{,}0383$

Sind n und p gegeben, kann man den Erwartungswert μ berechnen.

Bei Anwendungen zur Poissonverteilung ist es aber auch durchaus üblich und möglich, dass man weder n noch p, sondern nur μ kennt.

Hier ist also die **kumulierte Verteilungsfunktion** tabelliert.

$$\boxed{P(X \le k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu}}$$

, bei $\mu=2{,}6$, $k=5$ folgt $P(X \le 5) = \sum_{j=0}^{5} \frac{2{,}6^j}{j!} e^{-2{,}6} = 0{,}9510$.

Wegen der Verfügbarkeit der e-Funktion auf dem Taschenrechner kann man sich **Einzelwerte** von Hand beschaffen. Meist braucht man aber die Summen.

Bei $\mu=2{,}6$, $k=5$ folgt $P(X = 5) = \frac{2{,}6^5}{5!} e^{-2{,}6} = 0{,}0735$.

Mit dem χ^2 -Test (Chi-Quadrat-Test) läßt sich prüfen, ob eine vorgegebene (gemessene) Verteilung von einer anderen (meist einer theoretischen) Verteilung auf dem Niveau α signifikant abweicht, oder mit einer Statistischen Sicherheit $1-\alpha$ mit ihr verträglich ist.

▸ **Gemessene Verteilung**: Man hat eine Zufallsgröße X gemessen.

A: Es ist X **eine stetige Meßgröße.** Dann werden die gemessenen n Werte $X_1..X_i..X_n$ in k Klassen $I_1..I_i..I_k$ unterteilt. Möglichst sollten mindestens 5 Meßwerte in einer Klasse sein. Die Häufigkeiten $N_1..N_i..N_k$, Anzahl der Meßwerte in der jeweiligen Klasse, müssen bestimmt werden. Man muß also ein Histogramm (Balkendiagramm) sinnvoll erstellen können. Das Histogramm ist ein Bild für die gemessene Verteilung.

B: **X ist eine diskrete Größe** oder ein **Merkmal** (z.B. die Anzahl der Treffer oder die Augenzahl eines Würfels o.ä.). Dann bildet entweder jeder Wert oder jedes Merkmal seine eigene Klasse oder man faßt wieder geeignet.zusammen.Versuchsanzahl n. Wie bei A muß ein Histogramm erstellt werden können.

▸ **Theoretische Verteilung** oder **"die Verteilung, die der Nullhypothese entspricht."**

Man bestimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit p_i "theoretisch", bzw. "gemäß der Nullhypothese",
A ein Meßwert in die Klasse I_i fällt und bestimmt die theoretische Häufigkeit $H_i= n\ p_i$
B der Wert X_i bzw. jedes Merkmal angenommen wird und bestimmt die theoretische Häufigkeit $H_i= n\ p_i$

Man nimmt gemeinsam in einer Tabelle auf:

Klasse I_i bzw X_i (bei B) bzw. Merkmal	N_i gemessen	p_i theoretisch	$H_i = n\ p_i$ theoretisch	$\Delta N_i = N_i - H_i$	$\frac{(\Delta N_i)^2}{H_i}$

Chi-Quadrat-Tabelle

FG	5 %	1 %	0,1%	FG	5 %	1 %	0,1%
1	3.84	6,63.	10.8	22	33,9	40,3	48,3
2	5,99	9,21	13,8	24	36.4	43,0	51,2
3	7,81	11,3	16,3	26	38.9	45,6	54,0
4	9,49	13,3	18,5	28	41,3	48,3	56,9
5	11,1	15,1	20,5	30	43,8	50,9	59,7
6	12,6	16,8	22,5	35	49,8	57,3	66,6
7	14,1	18,5	24,3	40	55,8	63,7	73,4
8	15,5	20,1	26,1	45	61,7	70,0	80,1
9	16,9	21,7	27,9	50	67,5	76,2	86,7
10	18.3	23,2	29,6	55	73,3	82,3	93,2
11	19,7	24,7	31,3	60	79,1	88,4	99,6
12	21,0	26,2	32,9	70	90,5	100	112
13	22,4	27,7	34,5	80	102	112	125
14	23,7	29,1	36,1	90	113	124	137
15	25,0	30,6	37,7	100	124	136	149
16	26,3	32,0	39,3	110	135	147	162
17	27,6	33,4	40,8	120	147	159	174
18	28,9	34,8	42,3	130	158	170	186
19	30,1	36,2	43,8	140	169	182	197
20	31,4	37,6	45,3	150	180	193	209

Die Summe der 6. Spalte ist $\hat{\chi}^2$.

Dies ist die links tabellierte Prüfgröße.
Der **Freiheitsgrad** ist **FG = k - 1**
Bei B ist FG um 1 kleiner als die Zahl der verschiedenen X_i bzw. Merkmale.

Ist $\chi^2_{(FG,\alpha)} \leq \hat{\chi}^2$, dann kann man mit einer Irrtumswahrscheilichkeit α behaupten, daß den gemessenen Werten wohl **eine andere Verteilung** als die theoretische Verteilung der Nullhypothese **zugrundeliegt.**
Die gemessene und die theoretische Verteilung unterscheiden sich signifikant .

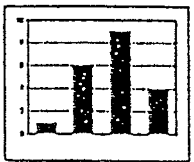
A1) Man hat n=200 Meßwerte, die 1. Klasse sind etwa die 5 kleinsten (oder mehr) Werte , die letzte Klasse entsprechend die größten Werte. Den Bereich dazwischen teilt man meist mit gleicher Klassenbreite auf. So erhält man z.B. k=15 Klassen. Mit evt. einiger Mühe sind mit der Normalverteilung die p_i zu bestimmen,usw. mit der Tabelle. $\hat{\chi}^2$ wird dann aus 15 Summanden berechnet.
B1) Von einem römischen Astragalus (Knochenwürfel) weiß man die diskrete Verteilung : *unten:10%, Oben: 40%, links:20%, rechts: 30%.* Mit einem im römischen Bad gefundenen Würfel wird n=200 mal gewürfelt. *Unten* erschien 24 mal .... Hier ist k=4 und FG=3 , Die p_i sind unter der Nullhypothese, es handele sich um einen "üblichen römischen Würfel", die obigen %-Angaben. Ergibt sich nun z.B. $\hat{\chi}^2$ =8, so kann man mit einer Statistischen Sicherheit von 95% behaupten, daß es kein typischer römischer Würfel sei (im Sinne der genannten Tabelle) .
B2) X sei die Anzahl der "Pudel" bei 10 Wurf auf der Kegelbahn. Im Klub wurden 200 Serien von 10 Wurf notiert. Die X_i sind die Zahlen 0 bis 10, also ist k=11, N_i=Zahl der 10-Serien mit genau i "Pudeln". Die Nullhypothese könnte sein: Es handelt sich um eine Binomialverteilung N=10, p ist die Wahrscheinlichkeit, daß **ein** Wurf ein "Pudel" wird, p ist etwa im Klub bekannt, oder man schätzt p aus obigen 2000 Einzelwurf. p_i=P(X=i) für i=0..1 aus Tabelle S.23 links (obere). H_i=200 p_i. Es ist FG=10. Ist $\hat{\chi}^2$ =30 kann man "Binomialverteilung" mit ziemlicher Sicherheit (99% Statistische Sicherheit) ablehnen. Vermutlich ist z.B. p doch nicht für jeden Wurf konstant.(Panik der Versager).

Beispiel zum Chiquadrat-Test *zu -30-*

Diskete Verteilung

Nummer	Wert1	Wert2	Wert3	Wert4	Wert5
1	3	3	1	3	4
2	2	4	2	1	4
3	2	2	1	4	3
4	4	4	4	4	2
5	4	2	4	4	4
6	4	3	3	4	3
7	3	1	3	2	3
8	3	3	4	4	3
9	2	1	2	3	4
10	3	3	3	3	3
11	3	4	2	1	3
12	3	3	1	2	3
13	3	2	3	4	3
14	2	3	3	2	2
15	2	1	1	2	4
16	4	3	4	3	4
17	3	2	3	3	2
18	1	3	4	1	3
19	3	3	3	2	1
20	2	4	3	2	4

	Intervall	*Häufigkeit*
Wert1	1	1
	2	6
	3	9
	4	4

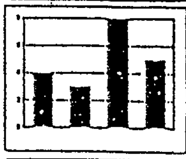


①

	Intervall	*Häufigkeit*
Wert2	1	3
	2	4
	3	9
	4	4

②

	Intervall	*Häufigkeit*
Wert3	1	4
	2	3
	3	8
	4	5



③

	Intervall	*Häufigkeit*
Wert4	1	3
	2	6
	3	5
	4	6

④

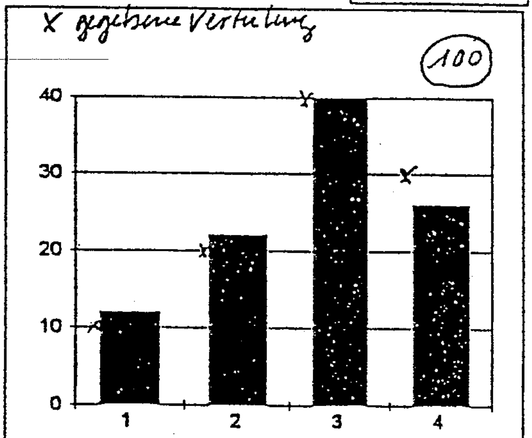
	Intervall	*Häufigkeit*
Wert5	1	1
	2	3
	3	9
	4	7

⑤

5 mal 20 Werte mit QuqttroPro erzeugt und ausgewertet

diskrete Verteilung		Intervalle	*Intervall*	*Häufigkeit*
1	0,1	1	1	12
2	0,2	2	2	22
3	0,4	3	3	40
4	0,3	4	4	26

gegebene Verteilung



Chiquadrattest auf Gleichverteilung

Intervall	*ni*	*pi*	*n pi*	delta ni	(de ni)^2/(n pi)
1	12	0,25	25	-13	6,76
2	22	0,25	25	-3	0,36
3	40	0,25	25	15	9
4	26	0,25	25	1	0,04
Summe					Chi Quadrat
	100				16,16

$n=100$

Wert 4 Chiquadrattest auf Gleichverteilung

Intervall	*ni*	*pi*	*n pi*	delta ni	(de ni)^2/(n pi)
1	3	0,25	5	-2	0,8
2	6	0,25	5	1	0,2
3	5	0,25	5	0	0
4	6	0,25	5	1	0,2
Summe					Chi Quadrat
	20				1,2

Wert 5 Chiquadrattest auf Gleichverteilung

Intervall	*ni*	*pi*	*n pi*	delta ni	(de ni)^2/(n pi)
1	1	0,25	5	-4	3,2
2	3	0,25	5	-2	0,8
3	9	0,25	5	4	3,2
4	7	0,25	5	2	~~0,2~~
	$n=20$				$\chi^2=8$

Freiheitsgrade = Klassenzahl − 1

$FG = 4-1 = 3$

χ^2 Tabelle

FG	5%	1%	0,1%
3	7,81	11,34	16,27

Also: (100) weicht hochsign. von der Gleichverteilung ab

(4) ist mit Gleichverteilung verträglich

(5) weicht auf 5% Niveau von Gleichverteilung ab.

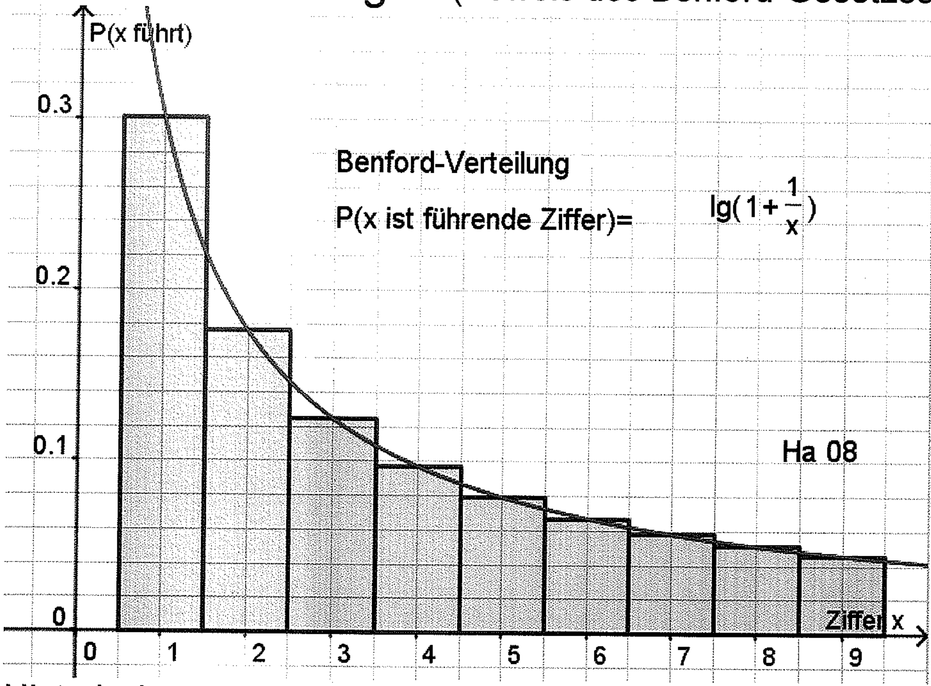
(3) ist verträglich mit der gegebenen Verteilung.

[illegible]

Wert 3 Chiquadrattest auf die gegebene Verteilung

					$(\Delta n_i)^2$	
1	4	0,1	2	2	4	2
2	3	0,2	4	−1	1	0,25
3	8	0,4	8	0	0	0
4	5	0,3	6	−1	1	0,17
						$2,42 = \chi^2$

Benford-Verteilung (Beweis des Benford-Gesetzes auf Seite 2)

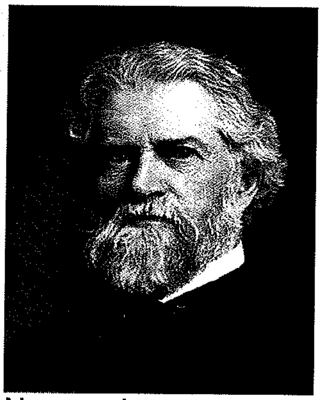


	A	B
1	x	lg(1 + 1 / x)
2	1	0.301
3	2	0.176
4	3	0.125
5	4	0.097
6	5	0.079
7	6	0.067
8	7	0.058
9	8	0.051
10	9	0.046
11		1
12		

Historisches

Im Jahre 1881 entdeckte der Mathematiker Simon Newcomb, dass die Seiten einer fünfstelligen Logarithmentafel für die kleine führende Ziffernfolgen wesentlich stärker abgegriffen waren als für große.

1. Für die Zahl 132,6 bestimmt man die zugehörige Zehnerpotenz, hier die 2.
2. Dann sieht man in der Tafel die sogenannte „Mantisse“ für die Ziffernfolge 1326 nach. 1326 heißt „Numerus“ der gegebenen Zahl.
3. Man findet 12254. Dieses nimmt man als Nachkommastellen hinter der 2.
4. Damit hat man lg(132,6)=2.12254 bestimmt.


Newcomb


Logarithmentafel


Benford

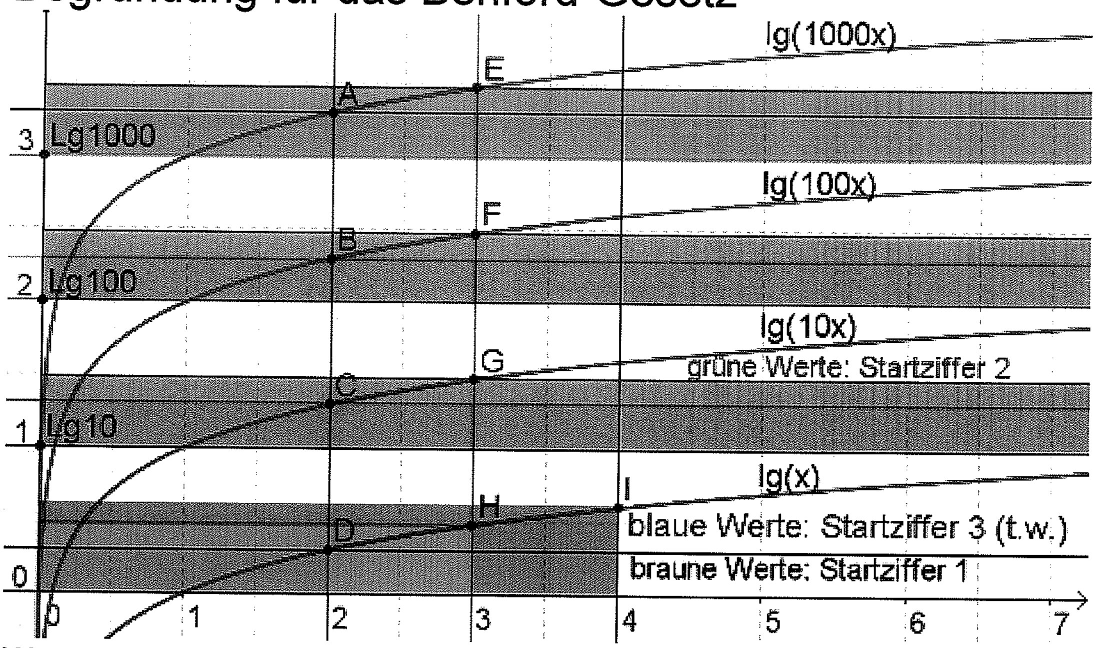
Bilder und Informationen aus: Norbert Hüngerbühler, EthZürich http://www.educ.ethz.ch

Newcomb veröffentlichte seine Beobachtung, stellte auch schon eine logarithmische Formel auf, aber seine Arbeit wurde nicht beachtet.

Im Jahr 1938 entdeckte der Physiker Frank Benford das Gestetz neu und untermauerte es mit Daten. Er bewies es aber nicht.

Erst 1995 deckte der Mathematik Theodore Hill genaueres auf und bewies auch noch weitere Zusammenhänge. Diese setzte der Mathematiker Mark Negrini in einem Analyseprogramm um, mit dem man die Echtheit von Daten prüfen kann, die „Benford-verteilt“ sein müssten. Dazu gehören vor allem Daten aus exponentiellen zusammenhängen, aber aggregierte Daten, die selbst nicht benford-verteilt sind, folgen der Benford-Verteilung. Auf diese Weise kann man Wirtschafts- und Bankdaten, wissenschaftliche Messdaten u.a. prüfen und Betrug aufdecken.

Begründung für das Benford-Gesetz



Wegen der Logarithmengesetze gilt: $lg(10x) = lg(x) + lg(10) = lg(x) + 1$

Darum sind die hier gezeichneten Logarithmusfunktionen alle um den Wert 1 gegeneinander verschoben.

Betrachten wir den grünen Streifen zwischen 2 und 3 auf der x-Achse. D und H haben dann die Ordinaten $lg(2)$ und $lg(3)$. Der grüne waagerechte Streifen färbt den Ordinaten-Unterschied. Wir berechnen diesen Unterschied gleich allgemein:

$$\Delta(x) = lg(a\cdot(x+1)) - lg(a\cdot x) = lg\left(\frac{a\cdot(x+1)}{a\cdot x}\right) = lg\left(\frac{x+1}{x}\right) = lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Setzt man x=2, so erhält man mit $\Delta(2) == lg\left(1+\frac{1}{2}\right) = 0{,}176...$ die Höhe **jedes** grünen Balkens, denn unter dem a, das hier herausfällt, kann man sich 10, 100, 1000 u.s.w. vorstellen.

Die Wahrscheinlichkeit, an eine grüne Stelle zu treffen, wenn man irgendwo an die Ordinatenachse tippt, ist also ***P(2 führt)= (Summe aller grünen Stücke) / Gesamtlänge***

$= \frac{k\Delta(2)}{k} = \frac{\Delta(2)}{1} = \Delta(2) = 0{,}1763...$ Die zugehörigen Abszissen sind genau alle Zahlen, die die führende tragende Ziffer 2 haben. Beispiele sind 29870// 25,7 // 0,0234 // 0,00002019.

Also ist die Wahrscheinlichkeit für führende Ziffer 2: $P(2\,führt) = \Delta(2) = 0{,}176...$

Genauso kann man für die anderen führenden Ziffern argumentieren.

Braune Streifen entsprechen der führenden Ziffer 1, also $P(1\,führt) = \Delta(1) = 0{,}3010...$

Blaue Streifen entsprechen der führenden Ziffer 3: $P(3\,führt) = \Delta(3) = 0{,}1249...$

Da die Logarithmen die Umkehrfunktionen des natürlichen exponentiellen Wachstums sind, gilt für "natürlich" wachsende Zahlen, also etwa Maßzahlen von Größen, allgemein das

Benford-Gesetz Die Wahrscheinlichkeit, dass die führende Ziffer x ist, wird bestimmt durch $P(x\,führt) = lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Mathematik-Klausur Nr.3 Kurs 12 m (gk) Ha am 13.3.96 Name:

Aufgabe 1 Was kann man schon erwarten?

Mathusalem ist jetzt pensioniert. Er geht im Winter jeden Werktag in den Lesesaal der Unibibliothek und liest alle Tageszeitungen, die dort ausliegen. Deren Anzahl schwankt zufällig. Mit den hier angegebenen Wahrscheinlichkeiten P_k liegen k Zeitungen aus.

k	3	4	5	6	7
P_k	40%	25%	0%	20%	15%

a) Wieviele Zeitungen kann Mathusalen am einem beliebigen Tag erwarten?

b) Er braucht für jede der ersten vier Zeitungen 15 Minuten Lesezeit, dann kennt er die Nachrichten schon und braucht für jede weitere Zeitung 3 Min weniger als für die vorige. Wielange liest Mathusalem im Mittel (erwartungsgemäß) die Zeitungen im Lesesaal?

Aufgabe 2 Ein Toast auf Toaster !

Mathix ist Fabrikant geworden und stellt Toaster passend in Form und Farbe zu den Servicen bekannnter Firmen her.
Nach der Fertigstellung werden die Toaster auf drei Eigenschaften hin geprüft:
Mängel in der Form sind selten. Sie treten nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% auf.
Bei der Farbprüfung aber fallen etwa 20% der Toaster durch.
15% der Geräte sind funktionsuntüchtig.

An den Einzelhandel verkauft Mathix nur vollständig einwandfreie Geräte zum Preis von 69,-DM
An Kaufhäuser werden zum Preis von 54,- DM auch solche verkauft, die entweder Mängel in der Form oder in der Farbe haben.
Funktionstüchtige Geräte mit Mängeln in Form und Farbe kann jeder für 20 DM bei der Fabrik kaufen.
Geräte, die nicht funktionieren, werden gar nicht verkauft. Sie werden ausgeschlachtet. Unter Berücksichtigung der Arbeitskosten werden sie mit 4 DM Gewinn veranschlagt.
Welche Einnahme an einem Taoster kann Mathix erwarten?
In welcher Reihenfolge sollte er prüfen?
Wo sind Verbesserungsmaßnahmen in seiner Produktion besonders nötig?

Aufgabe 3 Pause !

Großumfragen haben ergeben, daß 20 % der Schüler kein Schulbrot mit zur Schule nehmen.
In unserem Forum soll dazu eine Umfrage gemacht werden.
Worauf ist dabei zu achten, damit es sich um einen Bernoulliversuch handelt?
Gehen Sie im folgenden davon aus, daß sich unsere Schüler nicht anders verhalten als andere Schüler im Lande.

a) Es werden 10 Schüler befragt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau 2 kein Schulbrot mithaben? (Formel und Tabelle) .
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens 2 kein Schulbrot mithaben? (Tabelle)

b) Es werden 100 Schüler befragt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Zahl die der Schüler ohne Schulbrot zwischen 15 und 25 (incl.) liegt ? (Tabelle) .

Aufgabe 4 Die Erleuchtung! In meinem Wohnzimmer habe ich 8 Lampen.

a) Wieviele Beleuchtungsarten gibt es, wenn ich genau 4 der 8 Lampen einschalte?

b) 3 Familienmitglieder kommen nacheinander herein. Jedes schaltet eine der 8 Lampen an. Wieviele verschiedene Anschaltvorgänge gibt es?

c) Beim Musizieren soll es sehr hell sein, und ich schalte hintereinander alle 8 Lampen ein. Auf wieviele Arten kann ich das tun? Werde ich in meinem Leben diese Möglichkeiten voll ausschöpfen können?

Statigk1.KL3.wpd

Mathematik-Klausur Nr.1 Kurs 12 M (Lk) Ha am 11.10.99 Name:

Teil 1 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik

Aufgabe 1 Forschungsschiff Kombinaris

Auf der Kombinaris fahren 6 Franzosen, 10 Briten und 5 Deutsche durch das Eismeer.

I) Es soll ein Personalrat zusammengestellt werden.

a) Wie viele mögliche Namenslisten mit drei Namen gibt es, wenn jede Nation genau einmal vertreten sein soll? Die Reihenfolge auf der Liste ist egal.

b) Wie viele mögliche Listen mit drei Namenspaaren gibt es, wenn jede Nation genau einen Sprecher und seinen Vertreter entsenden soll. Es soll unterschieden werden, ob Bert Sprecher und Bella Vertreterin der Briten ist oder umgekehrt.

c) Wie viele mögliche Namenslisten mit sechs Namen gibt es, wenn jede Nation genau zweimal vertreten sein soll. Die Reihenfolge auf der Liste ist egal.

II) Für eine Bootsfahrt werden drei Forscher ausgewählt, wobei die Nationalität und die Reihenfolge keine Rolle spielen.

a) Wie viele verschiedene Nationalitätenzusammenstellungen gibt es?

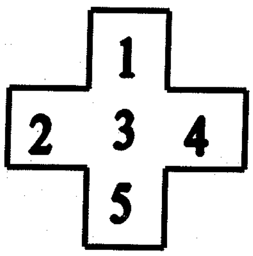
b) Wie viele Namenslisten gibt es?

c) Im Boot gibt es die Aufgaben Rudern, Messen und Steuern. Auf wie viele Arten können die drei ausgewählten Forscher diese Aufgaben unter sich verteilen?

d) Bert und Dora mögen sich gern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie (bei vollkommen zufälliger Auswahl) zusammen im Boot.

III) Im Auswahlseminar für die Forschungsreise musste Mathix eine Formel über die Binomialkoeffizienten beweisen: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Wofür braucht man diese Formel? Beweisen Sie sie ebenfalls.



Aufgabe 2 Mengen und Wahrscheinlichkeiten

Kennzeichnen Sie auf Karopapier entsprechend der rechten Figur die Mengen

A= Menge der geraden Zahlen

B= Menge der Primzahlen

C= Menge der ungeraden Zahlen

D= Menge der Zahlen, die nicht kleiner als drei sind.

Ein Laplacewürfel habe die Ergebnisse 1,2,3,4,5. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser und der folgenden Ereignisse jeweils direkt und an passenden Stellen zusätzlich mit einer mit einer sinnvollen Formel. Stellen Sie diese Ereignisse auch als Figur dar.

$P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(D)$, $P(A\cup C)$,
$P(\neg D \cup A)$, $P(\neg(B\cup D))$.

Teil 2 Grundelemente der Analysis

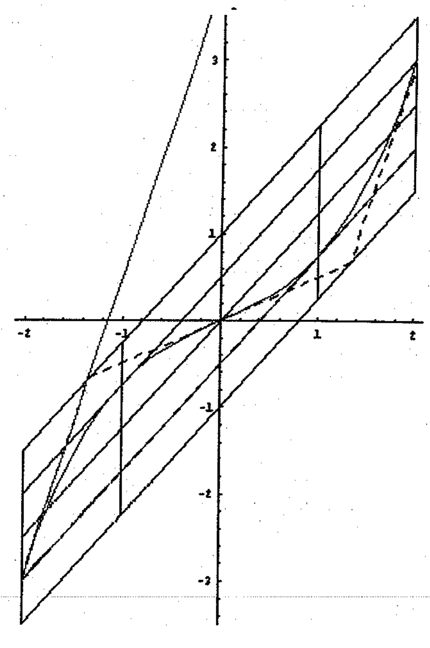
Aufgabe 3 Polynom im Affenkasten

Gegeben ist f mit $f(x) = \frac{1}{4} x \left(x^2 + 2 \right)$

und die Tangente für x=1.

Weisen Sie die dargestellten Eigenschaften nach.

Könnte es sein, dass diese Eigenschaften nicht nur für dieses spezielle Polynom gelten sondern für viele oder sogar alle Polynome 3. Grades? Was kann man zur Begründung heranziehen? Skizzieren Sie freihand einige Fälle.



StatistikLk1099kl1.wpd

Leuphana Universität Lüneburg Mathematik NAME:__________________________

Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen **Seite 1/3**

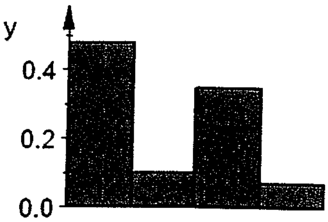
Prof. Dr. Dörte Haftendorn (Mit CAS-Taschenrechner TI-nspire o.ä.) März 2011

Aufgabe 1 Stochastik

Mathix ist jetzt Spielefabrikant geworden. Die römischen Astragali waren aus den Fußknöchelchen von Schafen, er möchte sie aber aus Holz schnitzen lassen.

a) Man kann beim Würfeln mit Astragali vier Fälle unterscheiden und der Tabelle rechts sind die üblichen Wahrscheinlichkeiten zu entnehmen. Mathix will prüfen, ob bei den Astragali aus Holz diese Vorgaben eingehalten werden und würfelt Bauch 70, Platte 26, Kuhle 64, Bucht 20 mal. Auf welchem Signifikanzniveau kann er mit dem Chiquadrattest behaupten, die Astragali seien nicht gut genug geformt? (Ausführliche Bearbeitung mit eigener Tabelle). im Mittel

Merkmal	P(Merkmal)
Bauch	0,48
Platte	0,10
Kuhle	0,35
Bucht	0,07



b) Eine Grundform wird maschinell gedrechselt, aus ihr wird die Astragalusform geschnitzt. Für 150 Astragali hat das Schnitzerteam 6 Std +/- 30 Min gebraucht. Nachdem Mathix nun ein ernstes Wörtchen mit seinem Team geredet hat, dass die Astragali sorgfältiger geschnitzt werden müssen, hat er den Eindruck, dass sie nun länger für 150 Astragali brauchen. Er misst für je 150 Astragali 6,4 h// 6,1 h// 6,8 h// 6,7 h//6,6 h Stunden Arbeitszeit. Geben Sie die mittlere Arbeitszeit als Messwert an. Deuten Sie an, wie die Berechnungen in einer Tabelle mit Excel eigenständig durchzuführen **wären** (jeweils 1. Zeile incl. Formel notieren). Entnehmen Sie aber die Werte dem TI-Tool.

c) Führen Sie einen Gauß-Test durch. Nennen Sie auf die Aufgabe bezogen die Hypothesen und erläutern Sie das Vorgehen mit Hilfe einer Skizze. Führen Sie auch einen t-Test und einen F-Test durch und formulieren Sie jeweils einen auf die Aufgabe bezogenen Antwortsatz.

d) Die Römer würfelten mit den Astragali um den Rat der Götter zu erfahren. Ein Wurf mit vier Astragali gleichzeitig, der alle vier Seiten zeigte, hieß „Venuswurf". Er war ein gutes Zeichen für das Vorhaben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt ein „Venuswurf" beim Astragali-Orakel ~~genau~~ rein zufällig ein? (Mit Begründung.)

e) Beim Priester Mathitus waren unter 20 Würfen mit je vier Astragali 4 Venuswürfe. Hat Mathitus eine besonders gute Beziehung zu den Göttern? Untersuchen Sie mit einem genauen binomialen Hypothesentest (nehmen Sie p=0,1, wenn Sie d) nicht haben), ob bei Mathitus signifikant mehr Venuswürfe auftreten als man erwarten sollte.

f) Mathusalem hat historische Forschungen betrieben, bei denen er in Quellen gefunden hat, dass bei 123 Vorhaben des Senates 78 mal vorher das Astragali-Orakel befragt wurde. (Es gab noch andere Orakel: Vogelflug, Eingeweideschau usw..) Schätzen Sie den Anteil der Astragali-Orakel-Befragungen bei Senatsvorhaben mit einem 5%-Konfidenzintervall. Wägen Sie exaktes und näherungsweises Vorgehen gegeneinander ab. Was schreibt Mathusalem als Ergebnis in der Zeitschrift „Damals"?

Statistik-Aufgaben *Thema:* Beurteilende Statistik *Inhalt:* **Schulistan**
Voraussetzungen: i.w.bis 4a *Begriffe:* Notw. n, Konfidenzint. Hyp.test ,Fehler 2.Art
Quelle keine Ha Kurs 95

Der Kultusminister von **Schulistan** hat versprochen, die geplante Schulrefom nur dann durchzuführen, wenn statistisch gesichert werden kann, daß mehr als 60% der Schulistaner die Reform gutheißen.

Die Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Nach Aussagen eines Lehrerverbandes soll es etwa 70% Befürworter geben. Das Statistische Amt wird beauftragt, auf dieser Grundlage den notwendigen Stichprobenumfang zu berechnen, wenn mit mindestens 98%-iger Sicherheit mindestens 300 Befürworter angetroffen werden sollen. *Berechnen Sie dies auch.*

b) Es werden nun 500 Schulistaner befragt, und obwohl 313 von ihnen die Reform gutheißen, entscheidet sich der Kultusminister getreu seiner Versprechung gegen eine Einführung zu diesem Zeitpunkt. Führen sie zur Begründung einen genauen Hypothesentest durch und schreiben Sie als Antwort eine kurze Radioansprache, die jedem Schulistaner diese Entscheidung **verständlich** macht.

c) Formulieren Sie auf die Aufgabe bezogen die Fehler 1. und 2. Art, und erläutern Sie kurz, welcher Fehler für den Kultusminister die schlimmeren politischen Folgen hätte.
Der Schuldezernent wettert, beim dem günstigen Umfrageergebnis aus b) hätte man doch die Reform durchführen sollen. Er behauptet, der Kultusminister mache nämlich mit seiner Entscheidung den Fehler 2.Art. Berechnen Sie den Fehler 2.Art unter der Voraussetzung, daß es in Wahrheit 65% Befürworter der Reform unter den Schulistanern gibt.

d) Der Lehrerverband behauptet, die Erhebung sei durch Fehler beeinträchtigt. Nennen Sie auf die Situation bezogen drei mögliche Fehler, die bei solchen Umfragen grundsätzlich vermieden werden müssen.

e) Um nun Klarheit zu erlangen wird, eine neue Umfage durchgeführt, bei der unter 2000 Schulistanern 1252 Befürworter der Schulreform gezählt werden.
Warum schreibt Otto Vorschnell in der Landeszeitung :"Teure neue Umfrage, dasselbe Ergebnis" . Kommentieren Sie diese Schlagzeile und berechnen Sie ein Konfidenzintervall für dieses Umfrageergebnis e1) grob e2) näherungsweise e3) genau.
Wenn Sie nicht alle drei Arten rechnen wollen, begründen Sie die Zulässigkeit Ihrer Wahl.

Hinweise: a) wird leichter, wenn man die "mindestens" wegläßt, das sollte man in Grundkursen auch tun oder diesen Teil auslassen. Die anderen Fragen sind für beide Kurstypen geeignet, in Gk evt. ohne e3)

Ergebnisse kurz: a)

$P(X \geq 300) \geq 98\% \Leftrightarrow \Phi(z) \leq 2\%$ also $z = \dfrac{299{,}5 - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \leq -2{,}0537$

ergibt $n \geq 457$ (Ergänzungsmöglichkeit für Lk : analytische Methoden für z(n) oder für den quadratischen Term, der beim Lösen auftritt.) b) $P(X \geq 313) = \ldots = 1 - \Phi\left(\dfrac{312{,}5-300}{10{,}95}\right) = \ldots = 12{,}7\% = \alpha$ H_0 beibehalten.

c) ß=14% .....d) i.a. nicht repr, keine ja/nein-Entsch., p nicht konstant

e) näherungsweise $60{,}44\% \leq p \leq 64{,}8\%$

Statistik-Aufgaben *Thema:* Beurteilende Statistik *Inhalt:* **Mondburg**
Voraussetzungen: i.w.bis 4a *Begriffe:* Notw. n, Konfidenzint. Hyp.test ,~~Fehler 2. Art~~
Quelle keine Binomialtabelle n=100 Ha Kurs 95

Diese Aufgabe war in der LK-Klausur vom 14.6.89, sie ist aber auch als Gk-Aufgabe oft ausprobiert. Die Klausur vom 14.6.89 war mit Aufg.1 bis 4 zu lang, besonders wegen 3d)

2) Die Stadt Mondburg will in einem nahen Wald eine Mülldeponie bauen. Im Wahlkampf hat der Bürgermeister allerdings zugesichert, daß nicht gebaut werden soll, wenn mehr als 80% der Mondburger dagegen sind.

a) Eine Bürgerinitiative (BI) gegen den Bau der Deponie besteht auf einer Prüfung, und es werden von einem städtischen Angestellten 100 Personen befragt , 83 davon sind gegen die Deponie in dem Wald. Begründen Sie durch einen Hypothesentest, warum die Stadt nach dieser Umfrage das Bauvorhaben nicht stoppt. Nennen Sie die zugrungelegen-den Voraussetzungen. (Antwortsatz bei b))

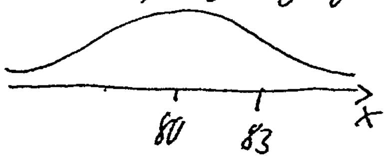
b) Der Abiturient Johannes Schein berechnet, wieviele Gegner man unter 100 Befragten hätte antreffen müssen, damit mit einer statistischen Sicherheit von mindestens 98 % hätte behauptet weden können, mehr als 80% der Mondburger seien gegen die Deponie . Berechnen Sie dies auch und schreiben Sie für Johannes Schein eine Rede, mit der er der Versammlung der BI klarmacht, daß das Verhalten der Stadt zwar ärgelich, aber nicht anfechtbar ist.

c) Am nächsten Tag kommt heraus, daß die obige Umfrage an einem Freitagmorgen zwischen 9 und 11 Uhr vor einem Supermarkt durchgeführt worden ist. Wie begründet die BI ihre Forderung nach einer neuen Umfrage?

d) Nun werden 214 zufällig ausgewählte Erwachsene Mondburger befragt, davon sind 184 gegen den Bau der Deponie. Berechnen Sie mit der 2σ-Umgebung , ob der Bürgermeister, der sein Wahlkampfversprechenem halten will, nun auf einen Baustop eingeht.

e) Berechnen Sie für die BI ,welche wahren Gegneranteile in Mondburg aufgrund dieser Umfrage (aus d)) zu erwarten sind (Konfidenzintervall). Schätzen Sie damit bei 60000 erwachsenen Mondburgern die zu erwartende Zahl der Gegner.

a) Wenn gefragt wird, ob jemand gegen die Deponie ist, darf nur eine klare ja-nein Antwort akzeptiert werden. Die Umfrage muß repräsentativ stattfinden, damit die Wahrscheinlichkeit p, daß jemand dagegen ist, für jede Befragung gleich ist. Dann kann die Binomialvert. angewandt werden



Hypothese $p > 80\%$, Nullhypothese $p \leq 80$
mehr als 80% Gegner

Rechengrundlage $p = 80\%$ X = Zahl der Gegner unter den $n=100$ Befragten.

$$P(X \geq 83) = 1 - P(X \leq 82) = 1 - (1 - 27{,}12\%) = 27{,}12\% = \alpha$$

Würde man annehmen, es wären mehr als 80% Gegner, würde man mit $\approx 27\%$ Wahrsch. einen Fehler begehen. Daher wird H_0 beibehalten, also die Deponie gebaut.

b) $P(X \geq k) \leq 1 - 98\% \Leftrightarrow 1 - P(X \leq k-1) \leq 1 - 98\% \Leftrightarrow$ [illegible]$(k-1) \leq 2\%$

$\Rightarrow$ Tab. S 35 $\quad \overset{0{,}8}{\underset{0{,}8}{0{,}0206}} \rightarrow 88 \quad k-1 = 88 \Rightarrow k = 89$

Liebe Umweltfreunde! Leider sind bei der Umfrage nicht 89 oder mehr Gegner der Deponie angetroffen worden. Wo wart Ihr!!! Dann hätten wir nämlich mit einer stat. Sicherheit von 98% behaupten können, daß es mehr als 80% Gegner in der Stadt gibt. Ein Irrtum wäre dann nur mit 2% W. einzukalkulieren gewesen. So aber würde die Stadt nur mit 27% W. einen Irrtum begehen, wenn sie unsere Forderung erfüllte.

c) nicht repräsentativ (nur Hausfrauen). Vor dem Markt haben sich um den Reporter evtl. Gruppen gebildet, so daß p nicht konstant ist (Gruppendruck!)

d) näherungsweises Konfidenzintervall

$\frac{k}{n} = \frac{184}{214} \approx 86\%$; $\quad P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq z \frac{\sigma}{n}\right) \geq 1-\alpha$ Vorgegeben $z=2$, daher $1-\alpha = 95\%$

$\sigma^2 \approx 214 \cdot \frac{184}{214}\left(1 - \frac{184}{214}\right)$ $\quad \left|\frac{184}{214} - p\right| \leq 2 \cdot \frac{5{,}08}{214}$

$\sigma^2 \approx 25{,}8$ $\quad \frac{2\sigma}{n} = 0{,}0474$ $\quad |86\% - p| \leq 4{,}75\%$

$\sigma = 5{,}08$

$\boxed{80\% < 81{,}23\% \leq p \leq 90{,}73\%}$ Also ist die Annahme der Stadt (H_0) nicht verträglich mit dem Umfrageergebnis.

e) Ansatz

$$\left|\frac{184}{214} - p\right| \leq 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{214}} \Rightarrow p \text{ „exakt" rechnen } 0{,}8057 \leq p \leq 0{,}9007$$

d.h. auf dem 4,5% Niveau ist 80% nicht verträglich mit der Messung

Statistik-Aufgaben *Thema:* Beurteilende Statistik *Inhalt:* **Radio Eriwan**
Voraussetzungen: i.w.bis 4a *Begriffe:* Notw. k, Konfidenzintervall. Hyp.test
Quelle keine Binomialtabelle n=100 Ha Kurs 95

Diese Aufgabe gehört in eine Gk-Klausur und ist auch als P3-Abituraufgabe bewährt.
Die Zahlen in Klammern sind für Gruppe B oder eine Hausaufgabe.

(2)

Im Lande Eriwan soll das Rundfunkgesetz probeweise geändert werden. Nur wenn nach zwei Versuchsmonaten statistisch gesichert werden kann, daß mehr als 60% (70%) aller Eriwaner zufrieden sind, will man die Neuerung endgültig einführen, anderenfalls will man sie überdenken.
Da ein Volksbefragung zu kostspielig ist, will Radio Eriwan 100 Eriwaner nach ihrer Meinung fragen.

2a) Es wurden 65 (75) Zufriedene bei der Umfrage gezählt.
Berechnen Sie das zugehörige Konfidenzintervall genau und näherungsweise. Äußern Sie sich zu den zugrundeliegenden Voraussetzungen.

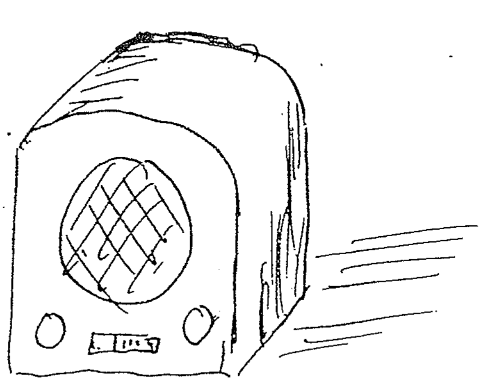
b) Es gibt 6,2 Mio Eriwaner, darunter 1,4 Mio Kinder unter 15 j., die in obiger Umfrage nicht berücksichtigt wurden.
Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus a)(oder ein sinnvoll ausgedachtes Intervall), um die Zahl der Eriwaner über 15J zu schätzen, die das neue Rundfunkgesetz befürworten.

c) Obwohl soger 65 (75) der befragten 100 Eriwaner zufrieden sind, erklärt Radio Eriwan den Versuch als gescheitert.
Begründen Sie diese Enßcheidung rechnerisch durch einen genauen Hypothesentest (Tabelle). Schreiben Sie für Radio Eriwan eine Antwort, die die Entscheidung jedem Eriganer verständlich macht.

d) Wieviele Zufriedene unter 100 Eriwanern hätte man denn antreffen müssen,, damit sich Radio Eriwan mit mind. 99%- iger Sicherheit für die Neuerung entschieden hätte? (Tabelle)

2 e) Welche größte Zahl Zufriedener unter 100 Befragten ist denn gerade noch verträglich mit einem wahren Zufriedenenanteil von 60% (70%)? Rechnen Sie mit 2σ - Umgebungen.

f) Von den oben genannten Verfahren wird man i.a. nur eins anwenden. Nennen Sie in Stichworten einige Vor- und Nachteile, und entscheiden Sie sich begründet für das beste Vefahren in diesem Fall.



② [illegible]

Radio Eriwan

a) X = Anzahl der Zufriedenen
p = Wahrsch., daß ein Zufriedener gefragt wird

Voraussetzungen: ja/nein: Zufrieden oder nicht
ohne Abstufungen

p konstant, wenn es sehr viel mehr als 100 Eriwaner gibt.

Also Bernoulliversuch, also Binomialverteilung

Zum Arbeiten mit σ-Umgebungen muß die Laplace-bedingung erfüllt sein: $npq \geq 9$ (ist erfüllt.)

Hier $n = 100$ $p = 60\%$ $100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 24 > 9$ | (B) $100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 21 > 9$

Konfidenzintervall: $X = 65$ $n = 100$ (B) $X = 75$

$\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 2\sigma_{\frac{X}{n}} = 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ p ist gesucht

$\left|\frac{65}{100} - p\right| \leq 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$ | $\left|\frac{75}{100} - p\right| \leq 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$

$\frac{65^2}{100^2} - \frac{130}{100}p + p^2 \leq 0{,}04\,p(1-p)$ | $0{,}75^2 - 1{,}5p + p^2 \leq 0{,}04\,p(1-p)$

$1{,}04p^2 - (1{,}3 + 0{,}04)p \leq -\frac{65^2}{100^2}$ | $1{,}04p^2 - 1{,}54p \leq -0{,}75^2$

$p^2 - \frac{1{,}34}{1{,}04}p + \frac{0{,}67^2}{1{,}04^2} \leq \frac{0{,}67^2}{1{,}04^2} - \frac{0{,}65^2}{1{,}04}$ | $p^2 - \frac{1{,}54}{1{,}04}p + \left(\frac{0{,}77}{1{,}04}\right)^2 \leq \left(\frac{0{,}77}{1{,}04}\right)^2 - \frac{0{,}75^2}{1{,}04}$

$(p - 0{,}6443)^2 \leq 0{,}00878$ | $(p - 0{,}74)^2 \leq 0{,}0073$

$|p - 0{,}644| \leq 0{,}0937$ | $|p - 0{,}740| \leq 0{,}085$

$0{,}55 \leq p \leq 0{,}738$ | $0{,}655 \leq p \leq 0{,}825$

Näherungsweise | $|0{,}75 - p| \leq 2\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{100}}$

$|0{,}65 - p| \leq 2\sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{100}}$ | $|0{,}75 - p| \leq 0{,}0866$

$|0{,}65 - p| \leq 0{,}0954$ | $0{,}663 \leq p \leq 0{,}837$

$0{,}55 \leq p \leq 0{,}745$ | $66\% \leq p \leq 84\%$

$55\% \leq p \leq 75\%$ Näherungsweise zu rechnen, ist bedingt möglich, da $p \neq 0{,}3$

Aufgrund des Versuchsergebnisses ist ein Zufriedenenanteil zwischen 55 und 74% (B) 66 und 83%) zu erwarten (Sicherh. 95,5%)

b) 6,2 Mio − 1,4 Mio Kinder = 4,8 Mio befragte Bevölkerung

$0{,}55 \cdot 4{,}8$ Mio $\leq X \leq 0{,}75 \cdot 4{,}8$ Mio (0,738) | (B) 3,17 Mio $\leq X \leq$ 3,98 Mio

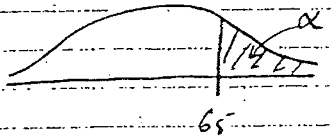
2,64 Mio $\leq X \leq$ 3,6 Mio (3,54)

X = Zahl der Zufrieden Eriwaner über 15 Jahre.

... Radio Eriwan

(2) c) H_0 $p \le 60\%$ nicht mehr als 60% sind zufrieden (B) $p \le 70\%$

H_1 $p > 60\%$ —— " " " " " $p > 70\%$



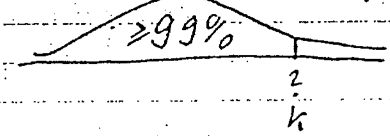
$\alpha = P(X \geqq 65)$ (B) $\alpha = P(X \geqq 75)$

Tab.: $0{,}17947 \leftarrow 65$, $\uparrow$ $0{,}6$ $0{,}16313 \leftarrow 75$, $\uparrow$ $0{,}7$

$\alpha = 0{,}18 = 18\%$ $\alpha \approx 16\%$

Diese Irrtumswahrscheinlichkeit ist zu groß, man muß H_0 beibehalten.

Antwort: Das günstige Umfrageergebnis berechtigt uns nicht, das neue Gesetz einzuführen, denn es könnte rein zufällig so gut ausgefallen sein, obwohl noch nicht mehr als 60% Eriwaner zufrieden sind. Ein solches Ergebnis tritt nämlich leichter ein, als daß jemand eine 6 würfelt.

d) 

H_0, H_1 wie oben

k gesucht mit

$P(X \geqq k) \le 1\%$ Tab $0{,}008 \rightarrow 72$, $\uparrow$ $0{,}6$ ($0{,}00889 \rightarrow 81$, $\uparrow$ $0{,}7$)

Also $P(X \geqq 72) < 1\%$ $P(X \geqq 81) < 1\%$

Man hätte 72 (B 81) zufriedene Eriwaner treffen müssen.

e) $p = 60\%$ $n = 100$ $\mu = n \cdot p = 60$ ($\mu = 70$)

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{24} = 4{,}899$ $\sigma = \sqrt{21} = 4{,}58$

$2\sigma = 9{,}8$ $2\sigma = 9{,}17$

$\mu + 2\sigma = 60 + 9{,}8 = 69{,}8$ $\mu + 2\sigma = 79{,}17$

69 Zufriedene sind gerade noch verträglich mit $p = 60\%$

(79 " " " " " $p = 70\%$)

f) Das Konfidenzintervall wertet das Versuchsergebnis unabhängig von einer Hypothese aus. (Vorteil) ist aber oft mühsam zu berechnen (Nachteil).

Die Binomialverteilung gibt die genauen Irrtumswahrsch. an (Vorteil) die hängt aber von der Hypothese ab und man braucht die Tabelle.

Mit 2σ-Umgebungen kann man am schnellsten verträglich–unverträglich klären.

Aufgaben zur Statistik *Lösungen im Internet* Ha 6. Januar 1994/ Juli 2002

www.uni-lueneburg.de/ Mathe-Lehramt

☞**Aufgabe 5** Man würfelt an einer Spielbude mit 2 Würfeln, der Einsatz beträgt 2 DM. Kommt wenigstens eine 5 oder eine 6 , so bekommt man den Einsatz zurück und noch 2 DM dazu. Anderenfalls ist der Einsatz verloren. Welchen Gewinn kann man auf Dauer erwarten?

Aufgabe 6 Ein Bauteil, das einen elektrischen Widerstand enthält, ist einige Zeit einer mechnischen Belastung ausgesetzt gewesen. Vorher war ein Widerstand von $R_v = (5{,}83 \pm 0{,}3)\ \Omega$ festgestellt worden. Man vermutet, daß sich der Widerstand verringert hat. Um dies zu testen mißt man:
R_i (5,36/ 5,40/ 5,39/ 5,58)Ω Hat sich der Widerstand signifikant verringert?
Testen Sie mit dem Gauß-Test und dem Einstichproben-t-Test unde dem F-Test.

☞**Aufgabe 7** In einer Stiuchprobe von 1000 erwachsenen Einwohner einer Großstadt zählte man 476 Männer. In welchen Intervall liegt mit einer statistischen Sicherheit von 95% der wahre Männeranteil in dieser Stadt.

☞**Aufgabe 8** Der Zulieferer einer Autofirma garantiert, daß mindestens 95% seiner gelieferten Zündkerzen einwandfrei sind. Die Autofirma entnimmt einer ankommenden Lieferungen stets 500 Zündkerzen und prüft sie. Sind darunter mehr als 30 defekte, wird die Sendung reklamiert.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (höchstens) wird zu Unrecht reklamiert?
b) Wie muß die Entscheidungsregel geändert werden, damit höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% zu Unrecht reklamiert wird?
c) Der Zulieferer hat versehentlich eine Kiste II.Wahl mit 20% Ausschuß (ohne entsprechende Kennzeichnung geschickt. Mit welche Wahrscheinlichkeit erkennt dies die Autofirma bei ihrem ersten Prüfverfahren?

☞**Aufgabe 9** Mathix braucht 100 einwandfreie Transistoren. Erfahrungs gemäß ist bei einer Sendung des benötigten Typs mit 10% Ausschuß zu rechnen. Er bestellt daher auch 10% mehr, nämlich 110 Stück. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen sie nicht? *Machen Sie ihr Vorgehen an einer Verteilungskurve deutlich.*
b) Schätzen Sie mit dem schon berechneten σ grob ab, wiviele er etwa bestellen muß, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 97% ausreichen.

Aufgabe 10 (Poisson) Als Onkel Mathusalem jung war, hatte er einen Computer mit 1000 Relais , von denen im Mittel täglich 2 ausfielen. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fiel an seinem Geburtstag kein einziges Relais aus? b) Wieviele solcher Relais darf eine Maschine etwa haben, damit die Wahrscheinlichkeit, daß sie einen Tag ohne Störung übersteht, wenigstens 90% ist?

☞**Aufgabe 11** Unten 417 Jeriwanern waren Personen waren 16 Farbenblinde. Geben Sie näherungsweise ein Konfidenzintervall (95% statistische Sicherheit) für den Anteil der Farbenblinden in Jeriwan an.

☞**Aufgabe 12** Schlaumeier will einen Test mit 100 ja/nein-Fragen ausschließlich durch Raten bestehen. Man muß mindestens 60 % richtig haben um es zu schaffen. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er durchfällt? *Lesen Sie möglichst in der Tabelle der Binomialverteilung ab.* b) Mit welcher statischen Sicherheit kann man behaupten, daß dieser Test nicht durch reines Raten zu bestehen ist? (Sie dürfen a) verwenden.)

Aufgabe 13 Tino behauptet in diesem kühlen Sommer sei sein Wein deutlich weniger süß. Im vorigen Jahr hat er 70 Grad Öchsle, nun aber hat Tino gemessen: 65°, 70°, 62°.
a) Berechnen Sie für die Messung den Mittelwert und **seine** Standardabweichung.
b) Testen Sie mit $\alpha = 5\%$ ob das Mostgewicht(in °Öchsle) signifikant gesunken ist.(t-Test und Gaußtest mit σ aus a)
Warum ist hier ein einseitiger Test erlaubt?

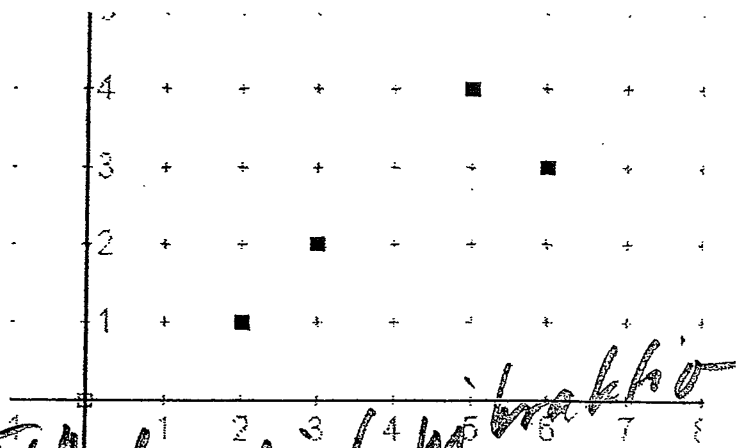
Statistik, Beweise zur Regression

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, 11.05.02

Gegeben sind Stützpunkte (x_i / y_i) mit $i=1 \text{ bis } n$.

Zu jeder Geraden $y = m\,x + b$ lassen sich mit $\hat{y}_i = m\,x_i + b$ die "Ordinatenfehler", die **Residuen** $y_i - \hat{y}_i$ bilden. Gesucht ist die Gerade

Für die die Summe der Quadrate der Ordinatenfehler minimal wird. In Bild 2 ist eine beliebige Gerade mit zugehörigen Fehlerquadraten eingezeichnet.



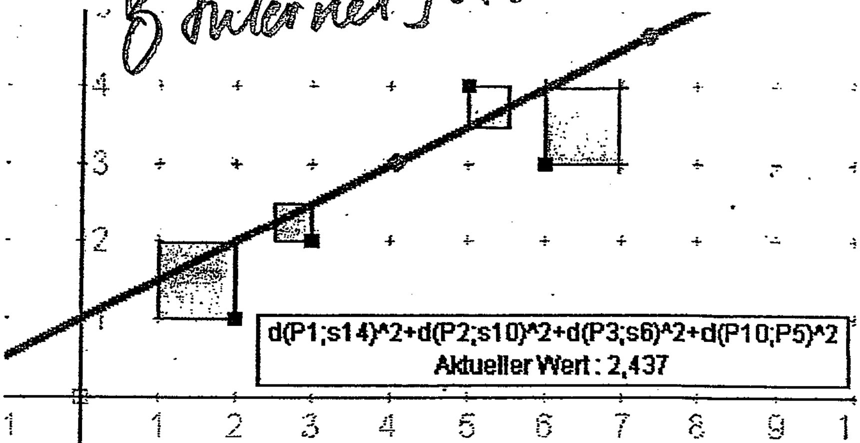
Schüler net jetz nur [illegible]

Aufstellen einer von m und b abhängigen Funktion

$$q(m,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - m x_i - b)^2$$

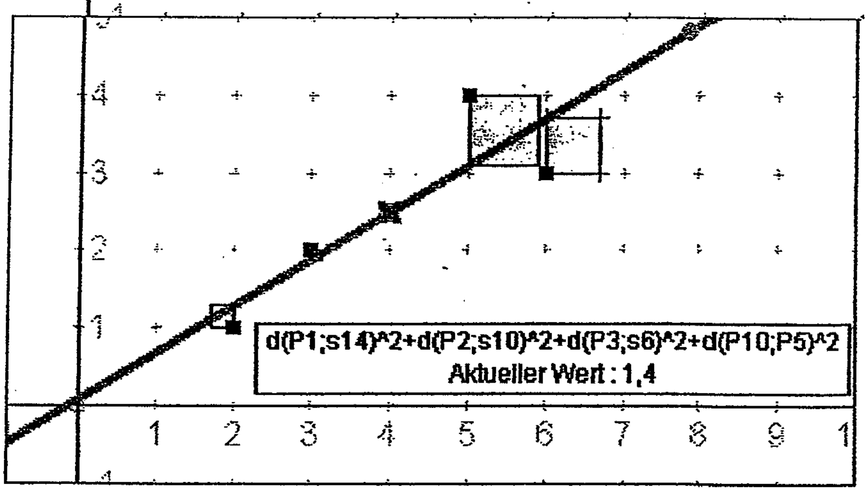
$$\frac{\partial q}{\partial m} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - m x_i - b)(-x_i)$$

$$= -2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$



$$\frac{\partial q}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - m x_i - b)(-1)$$

$$= -2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i - n\,b\right)$$



Beide partiellen Ableitungen müssen Null sein. Also aus der Ableitung nach b:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i = n\,b$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - m\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = b$$

$$\overline{y} \quad - m \quad \overline{x} \quad = b$$

Man sieht hier, dass die gesuchte Gerade durch den Schwerpunkt der Daten verlaufen muss, letzter ist rechts rot eingezeichnet.
In die Ableitung nach m eingesetzt ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{y} - m\,\overline{x})\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + m\,\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \overline{y}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Big|\cdot\frac{1}{n}$$

$$m\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$$

$$m = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2\right)} \quad \Big|\cdot\frac{n^2}{n^2}$$

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \overline{y} - m\,\overline{x}$$

In diesem Beispiel ist m=0,6 und b=0,1 die Gerade also

y=0,6 x + 0,1

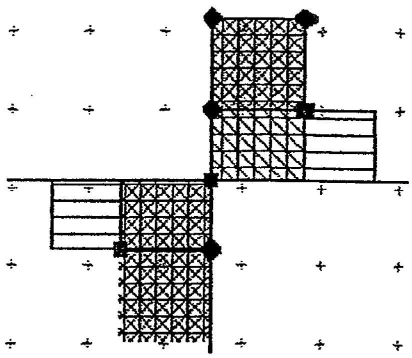
Übrigens ist damit auch

$$m = \frac{s_{xy}}{s_x^{\,2}}$$

Statistik, Formeln für Varianzen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, 12.05.02

Es geht im Folgenden um die Abweichungen vom Datenschwerpunkt. $(\overline{x}\,/\,\overline{y})$



Kovarianz: $s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$

Dies kann man als mittleres Abweichungsrechteck auffassen.

x-Varianz $\quad s_x^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

Dies kann man als mittleres Abweichungsquadrat in x-Richtung auffassen.

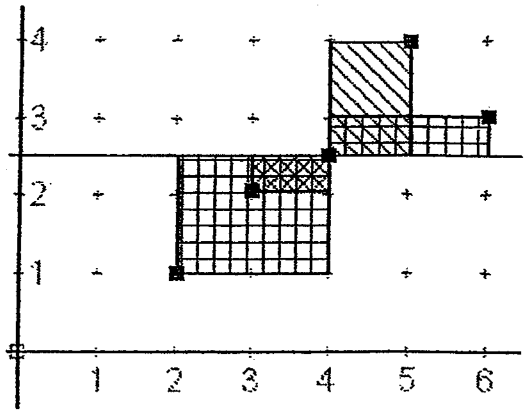
x-Standardabweichung $s_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ ist demnach die Kantenlänge dieses mittleren x-Abweichungsquadrates.

y-Varianz $s_y^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$

Das kann man als mittleres Abweichungsquadrat in y-Richtung auffassen.

y-Standardabweichung $s_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$

ist demnach die Kantenlänge dieses mittleren y-Abweichungsquadrates.
Damit das Produkt $s_x s_y$ auffassbar als Kantenlänge eines Rechtecks, das aus den beiden mittleren Abweichungsquadraten gebildet werden kann.
In dem oben dargestellten Sonderfall ist dieses Rechteck dasselbe, das auch durch die Kovarianz beschrieben wird. Damit ist der Quotient aus beiden im obigen Fall 1, ebenso in anderen Fällen. In denen die Daten auf einer Geraden liegen. Sonst ist er kleiner 1.
Man kann sich vorstellen, dass durch die Quotientenbildung eine Normierung vorgenommen wird. Dadurch entsteht eine Messgröße, die die Abweichung der Daten von einer Geraden sinnvoll beschreiben kann.



$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$, der Koorelationskoeffizient. $-1\le r\le 1$

Beweise für die alternativen Berechnungsformeln:

$$s_x^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2}-2\overline{x}\,x_i+\overline{x}^2\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\overline{x}^2\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\overline{x}^2+\overline{x}^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\overline{x}^2$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\overline{x}^2\right)$$

Ebenso

$$s_y^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}-\overline{y}^2$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}-n\overline{y}^2\right)$$

Beachte dabei

$$\sum_{i=1}^{n}a=a\sum_{i=1}^{n}1=an$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$

Fast ebenso

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_iy_i-\overline{y}\,x_i-\overline{x}\,y_i+\overline{x}\,\overline{y}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{x}\sum_{i=1}^{n}y_i+n\overline{x}\,\overline{y}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\,\overline{x}-\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,\overline{y}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{x}\,\overline{y}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}\right)$$

Problemstellung: Etliche Messpunkte sind gegeben und es soll eine Kurve gefunden werden, die den untersuchten Zusammenhang möglichst gut wiedergibt.
Zunächst muss man einen passenden Funktionstyp wählen. Entweder hat man dafür aus der Theorie Hinweise oder man sieht sich die Punktwolke im Koordinatensystem an.

Linearer Zusammenhang:

Um zu testen, ob ein linearer Zusammenhang vorliegt und die sogenannte Ausgleichsgerade zu bestimmen, kann man den Korrelationskoeffizienten r ausrechnen und prüfen, ob er bei 1 oder bei -1 liegt. Die Zwischenergebnisse dieser Rechnung führen zur Ausgleichsgeraden (Fitgeraden)

Gegeben: n Messpunkte, Koordinaten (x_i, y_i), $i=1..n$, $\sum x_i = x_1+x_2+...+x_n$ usw.

insbesondere sind die Mittelwerte: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$

Korrelation

Berechnung der Varianzen und Standardabweichungen, *a, b sind dabei beliebige praktische Zahlen.*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 - n(\bar{x}-a)^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right) \quad \text{x-Varianz}$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-b)^2 - n(\bar{y}-b)^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - n\bar{y}^2\right) \quad \text{y-Varianz}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)(y_i-b) - n(\bar{x}-a)(\bar{y}-b)\right) \quad \text{Kovarianz}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}\right)$$ ist die Kovarianz,

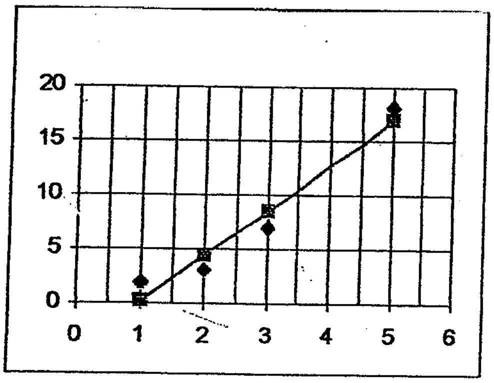
die Standardabweichungen sind $s_x = \sqrt{s_x^2}$ und $s_y = \sqrt{s_y^2}$.

Korrelationskoeffizient $\boxed{r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}}$ Es gilt immer: $-1 \le r \le 1$.

$|r| = 1$ heißt: Messpunkte auf einer Geraden, $|r| \approx 1$ heißt starke Korrelation, $|r| \approx 0$ fast keine Korrelation.

Nun ist die **Ausgleichsgerade** $y = mx + b$ schnell beschafft mit $m = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$, $b = \bar{y} - m\bar{x}$

Alternative Methoden



I) Sonderfall: proprortionales Gesetz:

Wenn $y = mx$ gesichert ist, dann gilt: $m = \frac{\sum (x_i y_i)}{\sum x_i^2}$

II) Allgemeine Gerade $y = mx + b$,

dann gilt: $m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$

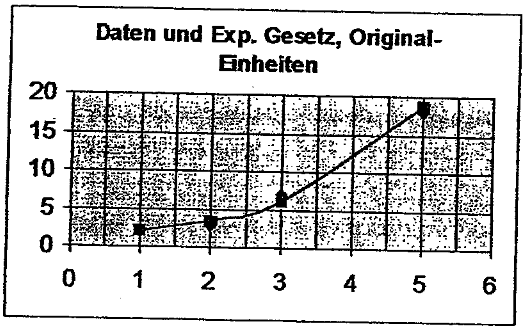
und wie oben folgt $b = \bar{y} - m\bar{x}$.

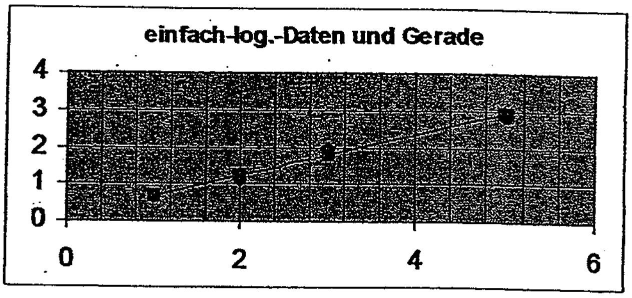
Problemstellung: Etliche Messpunkte sind gegeben, die nicht deutlich auf einer Geraden liegen. Sie könnten zu einer Exponentialfunktion, einer Potenzfunktion, einer beliebig platzierten Parabel oder zu einer hier nicht genannten Funktion passen. Oft hat man aus der Theorie oder der Gesamtbetrachtung des Problems Hinweise. Anderenfalls wählt man die Berechnungsmethode, bei der man den Korrelationskoeffizienten r bestimmt. Der beste Ansatz ist dann der mit dem betragsmäßig größten r.

Exponentialfunktion $y = c\, e^{kx}$ d.h. $\ln y = k\, x + \ln c$ also $z = k\, x + b$

Man logarithmiert also die ganze y_i - Spalte, tauft $z = \ln y$, bestimmt nach der ersten oder der letzen Methode von Seite 11 a die Ausgleichsgerade für die Variablen z und x, verwendet die Steigung k und bestimmt c aus $c = e^{b}$. Es handelt sich um **einfach-logarithmisches Vorgehen.**

Die Verwendung von einfach-logarithmischem Papier erübrigt sich, da heute das Berechnen der Logarithmen so leicht geworden ist.





Potenzfunktion

$y = c\, x^{k}$ d.h. $\ln y = k \ln x + \ln c$ also $z = k\, w + b$

Man logarithmiert also die ganze x_i - Spalte **und** die ganze y_i - Spalte, tauft $w = \ln x$ und $z = \ln y$, bestimmt nach der ersten oder der letzen Methode von Seite 11 a die Ausgleichsgerade für die Variablen z und w, verwendet die Steigung k und bestimmt c aus $c = e^{b}$.

Es handelt sich um **doppelt-logarithmisches Vorgehen.** Die Verwendung von doppelt-logarithmischem Papier erübrigt sich, da heute das Berechnen der Logarithmen so leicht geworden ist.

Parabel-Gesetz $y = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2$ Parabel in beliebiger Form und Lage.

Es gilt:
$$\begin{pmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma(x_i\, y_i) \\ \Sigma(x_i^2\, y_i) \end{pmatrix}$$

Das so beschriebene Gleichungssystem ist mit den üblichen Methoden zu lösen.

Lineares Gesetz $y = a_0 + a_1\, x$ Die letzte Methode von Seite 11 a ist in dieser Schreibweise übersichtlicher:
$$\begin{pmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma(x_i\, y_i) \end{pmatrix}$$

Polynom höheren Grades:

Die Matrix des Gleichungssystems wird in naheliegender Weise vergrößert, indem weitere Zeilen und Spalten mit höheren Potenzen dazu kommen. Die Unbekannten werden ergänzt durch a_3 usw. die rechte Seite durch $\Sigma(x_i^3\, y_i)$ usw.

Zwei-Variablen-Statistik, Vergleich

Zwei-Variablen-Statistik, **lineare, exponetielle, Potenz-, quadratisch Regression weiter unten**

Haftendorn 5/08 www.mathematik-verstehen.de

In dieser Datei werden die wichtigsten Möglichleiten der Zwei-Variabeln-Statistik gezeigt.

Die TI-Datei enthält mehrere "Probleme" -hier sind sie mit Namen versehen, sonst mit Nummern.

Diese sind untereinander Variablen-geschützt. So kann hier auf stets fast gleiche Art mit denselben Daten verschiedenes vorgeführt werden.

Will man mit den eigenen Daten experimentieren, kopiert man sich entweder die ganze Datei oder in dieser Datei ein Problem (Problemnamen in der Seitenübersicht markieren, re-Maus Kopieren, re-Maus Einfügen).

Im ersten Problem hier wird die Arbeit mit der **eingebauten twoVar-Statistik** gezeigt.

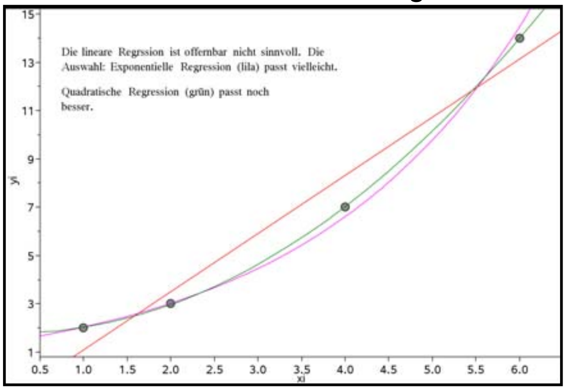
In den nachfolgenden Problemen geht es um Regressionen. Dort wird auch der eigene Umgang mit den Tabellenspalten gezeigt.

Die Definition der Daten kann in Mathezellen (strg m) so erfolgen $x:=\{1,2,4,6\}$.... oder als Einträge in einem List&Spreadsheet-Fenster. So ist es hier in Blatt 3 gemacht.

Blatt 2 zeigt das Data&Statistics-Fenster. Unten in der Mitte klickt man, es erscheinen Vorschläge, man wählt xi, links in der Mitte wählt man yi und es werden die Datenpunkte gezeichnet. Die Regressionskurven erhält man mit der Werkzeugpalette, Aktionen, Regression,... Das wird in den anderen Problemen ausführlich gemacht. Blatt 3 rechts, Blatt4 und Blatt5 zeigen, wie man mit dem eingebauten Befehl twovar umgeht. Katalog, twovar suchen, Assistenten einschalten, xi,yi eintragen.....

1.1

Zwei-Variablen-Statistik, Vergleich



1.2

Zwei-Variablen-Statistik, Vergleich

	A i	B xi	C yi	D	E zw	F	G	H	I	J	K
•					=twovar(xi,yi,1)						
1	1	1	2	Titel	Statistiken mit zw...						
2	2	2	3	$\bar{x}$	3.25			MinX	0.9798		
3	3	4	7	Σx	13.			Q_1X	1.		
4	4	6	14	Σx²	57.			MedianX	1.5		
5				sx := $s_{n-1}x$	2.21736			Q_3X	3.		
6				σx := $\sigma_n x$	1.92029			MaxX	5.		
7				n	4.			MinY	6.		
8				$\bar{y}$	6.5			Q_1Y	2.		
9				Σy	26.			MedianY	2.5		
10				Σy²	258.			Q_3Y	5.		
11				sy := $s_{n-1}y$	5.44671			MaxY	10.5		
12				σy := $\sigma_n y$	4.71699			SSX := Σ(x−x̄)²...	14.		
13				Σxy	120.			SSY := Σ(y−ȳ)²...	14.75		
14				MinX	0.9798				89.		
15				Q_1X	1.						
16				MedianX	1.5						
17				Q_3X	3.						
18				MaxX	5.						

B7

1.3

Zwei-Variablen-Statistik, Vergleich

Die eingebaute Zwei-Variablen-Statistik

Sie ist besonders nützlich, wenn man irgendwo die Zwischenwerte braucht. Wieder ist es günstig, die Eingabemaske des Assistenten zu verwenden.

TwoVar **xi**,**yi**,1: **stat.results** ▸

"Titel"	"Statistiken mit zwei Variablen"
"$\bar{x}$"	3.25
"Σx"	13.
"Σx²"	57.
"sx := $s_{n-1}x$"	2.21736
"σx := $\sigma_n x$"	1.92029
"n"	4.
"$\bar{y}$"	6.5
"Σy"	26.
"Σy²"	258.
"sy := $s_{n-1}y$"	5.44671
"σy := $\sigma_n y$"	4.71699
"Σxy"	120.
"r"	0.9798
"MinX"	1.
"Q_1X"	1.5
"MedianX"	3.
"Q_3X"	5.
"MaxX"	6.
"MinY"	2.

1.4

Zwei-Variablen-Statistik, Vergleich

An die Einzelwerte kommt man so heran:

In eine Mathezelle **stat.** schreiben, dann erscheint -beim Schreiben des Punktes-

ein Pulldownmenu, aus dem man auswählen kann.

stat.MinY ▸ 2. **stat.Q_1Y** ▸ 2.5 **stat.MedianY** ▸ 5. **stat.Q_3Y** ▸ 10.5 **stat.MaxY** ▸ 14.

stat.SSX ▸ 14.75 **stat.SSY** ▸ 89.

Übrigens hat man von den beiden Standardabweichungen in der beschreibenden Statistik zu nehmen **stat.σx** ▸ 1.92029 und **stat.σy** ▸ 4.71699

Dagegen hat man in der beurteilenden Statistik (induktiven Statistik) mit **stat.sx** ▸ 2.21736 und **stat.sy** ▸ 5.44671 bessere (nämlich erwartungstreue) Schätzer für die "wahren" Statndardabweichungen der Grundgesamtheit.

1.5

Lineare Regression

Lineare Regression, **Exponetiell, Potenz, Quadratisch weiter unten**

Haftendorn 5/08 www.mathematik-verstehen.de

Im 1. Problem wird zu gegebenen Daten die Regressionsgerade $y=\mathbf{m}\cdot x+\mathbf{b}$ berechnet.

Das geschieht auf verschiedene Arten.

Achtung: nach dem Kopieren so eines Spreadsheets *muss man in jeder Spalte eine Zahl neu "abschicken".*

Blatt2. definiert die Daten und rechnet nach der Formel der Formelsammlung

$$\mathbf{m}:=\frac{\mathbf{n}\cdot \mathrm{sum}(\mathbf{xi}\cdot\mathbf{yi})-\mathrm{sum}(\mathbf{xi}\cdot\mathrm{sum}(\mathbf{yi}))}{\mathbf{n}\cdot\mathrm{sum}(\mathbf{xi}^2)-(\mathrm{sum}(\mathbf{xi}))^2}$$

In den gelben Feldern sind Variable definiert worden xq:=....

Diese sind dann im ganzen Problem dieser Datei verfügbar approx(**m**) ▸ 2.40678 .

b=**yq**−**m**·**xq** approx(**b**) ▸ −1.32203 Die Ausgleichsgerade ist $y=2.40678\cdot x-1.32203$

Blatt 3. Data&Statistics-Blatt. Unten trägt man "xi" ein links "yi" Man klickt dazu unten in der Mitte und bekommt mögliche Variablen angeboten. Dann ist die Regressionsgerade (Werkzeugpalette)eingetragen.

Blatt 4 zeigt die Verwendung der eingebauten linearen Regression

Blatt5 zeigt eine didaktische Möglichkeit mit einer freien Geraden herumzuspielen. Man ziehe an der blauen Geraden (Mitte: verschieben, außen: drehen) und beobachte die Summe der Quadrate, viesualisiert und angezeigt wird.

In Blatt 6 kann man sehen, dass man mit der blauen Geraden nicht besser wird als mit der Regressionsgeraden. Weiteres in nachfolgernden Problemen.

2.1

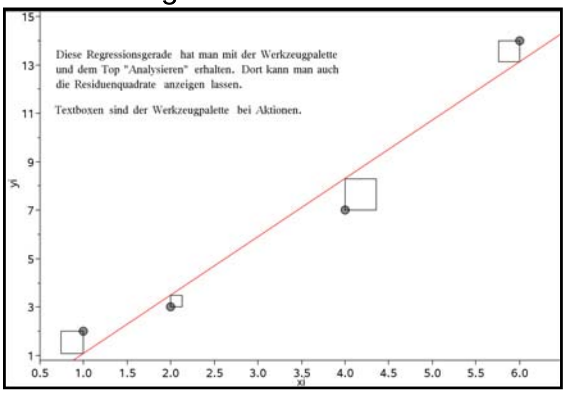
Lineare Regression

	A i	B xi	C yi	D xiyi	E xiq	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
•				=xi*yi	=xi^2										
1	1	1	2	2	1	13	26	120	57						
2	2	2	3	6	4	sum(xi)	sum(yi)	sum(xiyi)	sum(xiq)						
3	3	4	7	28	16	xq	yq	m	mm						
4	4	6	14	84	36	**13/4**	**13/2**	**142/59**	**2.40678**						
5						n		b	bb						
6						**4**		**-78/59**	**-1.32203**						
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															

A1 1

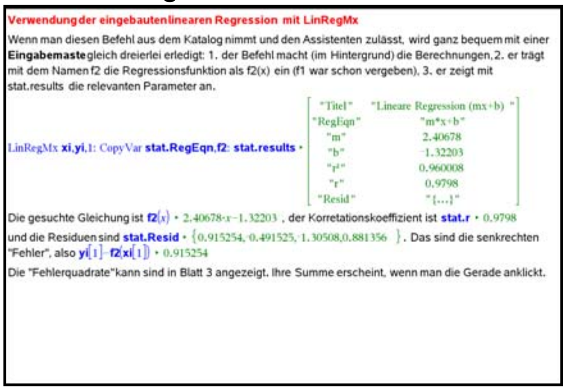
2.2

Lineare Regression



2.3

Lineare Regression



Verwendung der eingebauten linearen Regression mit LinRegMx

Wenn man diesen Befehl aus dem Katalog nimmt und den Assistenten zulässt, wird ganz bequem mit einer **Eingabemaste** gleich dreierlei erledigt: 1. der Befehl macht (im Hintergrund) die Berechnungen, 2. er trägt mit dem Namen f2 die Regressionsfunktion als f2(x) ein (f1 war schon vergeben), 3. er zeigt mit stat.results die relevanten Parameter an.

LinRegMx **xi**,**yi**,1: CopyVar **stat.RegEqn**,**f2**: **stat.results** ▸

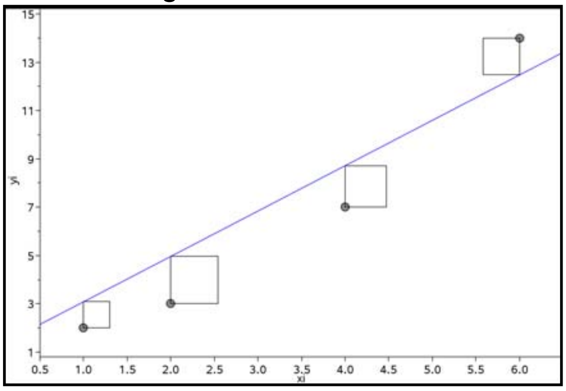
"Titel"	"Lineare Regression (mx+b) "
"RegEqn"	"m*x+b"
"m"	2.40678
"b"	-1.32203
"r²"	0.960008
"r"	0.9798
"Resid"	"{...}"

Die gesuchte Gleichung ist **f2**(x) ▸ $2.40678\cdot x-1.32203$, der Korretationskoeffizient ist **stat.r** ▸ 0.9798 und die Residuen sind **stat.Resid** ▸ {0.915254,-0.491525,-1.30508,0.881356 }. Das sind die senkrechten "Fehler", also **yi**[1]-**f2**(**xi**[1]) ▸ 0.915254

Die "Fehlerquadrate"kann sind in Blatt 3 angezeigt. Ihre Summe erscheint, wenn man die Gerade anklickt.

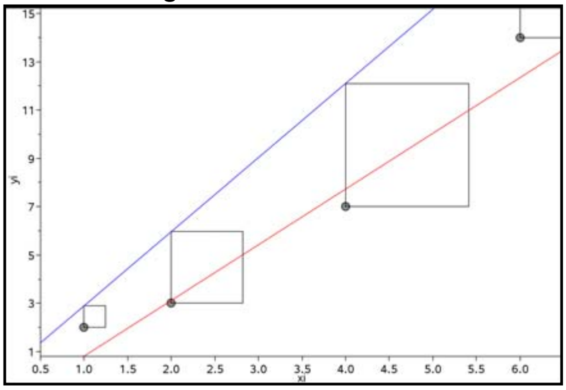
2.4

Lineare Regression



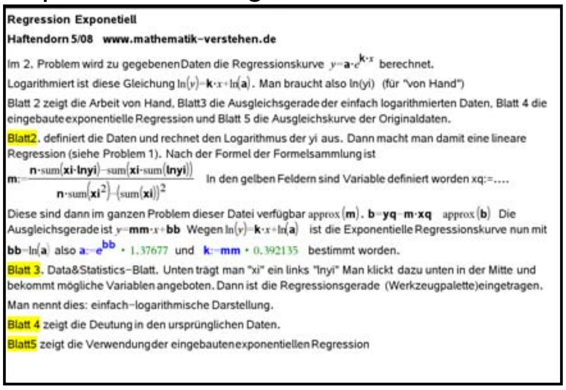
2.5

Lineare Regression



2.6

Exponentielle Regression



Regression Exponetiell

Haftendorn 5/08 www.mathematik-verstehen.de

Im 2. Problem wird zu gegebenen Daten die Regressionskurve $y=\mathbf{a}\cdot e^{\mathbf{k}\cdot x}$ berechnet.

Logarithmiert ist diese Gleichung $\ln(y)=\mathbf{k}\cdot x+\ln(\mathbf{a})$. Man braucht also ln(yi) (für "von Hand")

Blatt 2 zeigt die Arbeit von Hand, Blatt3 die Ausgleichsgerade der einfach logarithmierten Daten, Blatt 4 die eingebaute exponentielle Regression und Blatt 5 die Ausgleichskurve der Originaldaten.

Blatt2. definiert die Daten und rechnet den Logarithmus der yi aus. Dann macht man damit eine lineare Regression (siehe Problem 1). Nach der Formel der Formelsammlung ist

$\mathbf{m}:=\dfrac{\mathbf{n}\cdot \mathrm{sum}(\mathbf{xi}\cdot\mathbf{lnyi})-\mathrm{sum}(\mathbf{xi}\cdot\mathrm{sum}(\mathbf{lnyi}))}{\mathbf{n}\cdot\mathrm{sum}(\mathbf{xi}^2)-(\mathrm{sum}(\mathbf{xi}))^2}$ In den gelben Feldern sind Variable definiert worden xq:=....

Diese sind dann im ganzen Problem dieser Datei verfügbar approx(**m**). **b**=**yq**-**m**·**xq** approx(**b**) Die Ausgleichsgerade ist $y=\mathbf{mm}\cdot x+\mathbf{bb}$ Wegen $\ln(y)=\mathbf{k}\cdot x+\ln(\mathbf{a})$ ist die Exponentielle Regressionskurve nun mit $\mathbf{bb}=\ln(\mathbf{a})$ also $\mathbf{a}:=e^{\mathbf{bb}}$ ▸ 1.37677 und $\mathbf{k}:=\mathbf{mm}$ ▸ 0.392135 bestimmt worden.

Blatt 3. Data&Statistics-Blatt. Unten trägt man "xi" ein links "lnyi" Man klickt dazu unten in der Mitte und bekommt mögliche Variablen angeboten. Dann ist die Regressionsgerade (Werkzeugpalette)eingetragen.

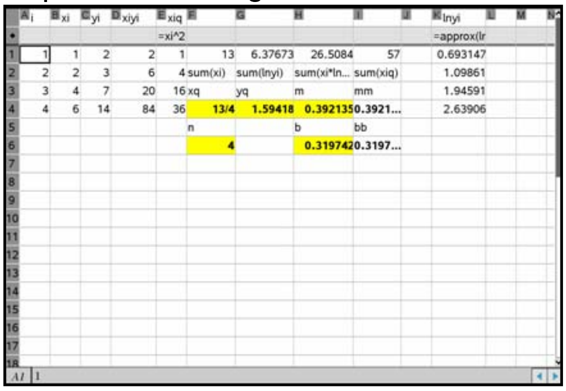
Man nennt dies: einfach-logarithmische Darstellung.

Blatt 4 zeigt die Deutung in den ursprünglichen Daten.

Blatt5 zeigt die Verwendung der eingebauten exponentiellen Regression

3.1

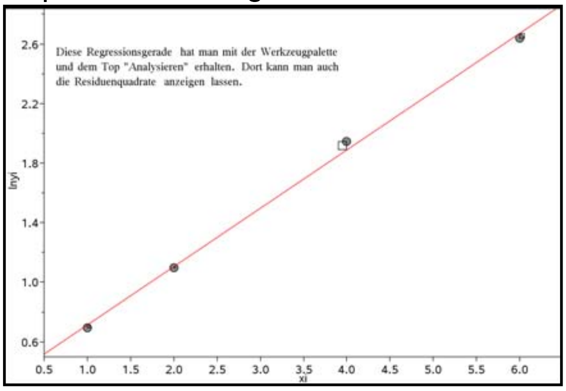
Exponentielle Regression



	A i	B xi	C yi	D xiyi	E xiq	F	G	H	I	J	K lnyi	L	M
•					=xi^2						=approx(lr		
1	1	1	2	2	1	13	6.37673	26.5084	57		0.693147		
2	2	2	3	6	4	sum(xi)	sum(lnyi)	sum(xi*ln...	sum(xiq)		1.09861		
3	3	4	7	20	16	xq	yq	m	mm		1.94591		
4	4	6	14	84	36	13/4	1.59418	0.392135	0.3921...		2.63906		
5						n		b	bb				
6						4		0.319742	0.3197...				

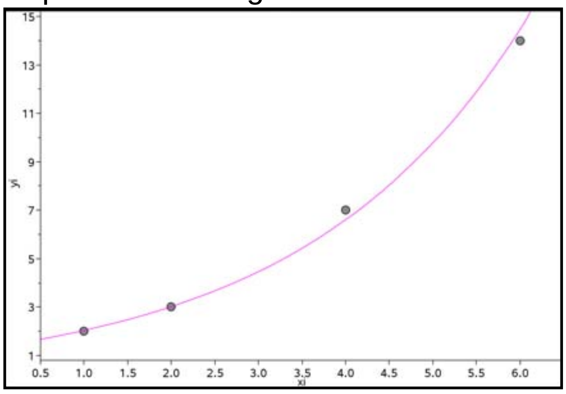
3.2

Exponentielle Regression



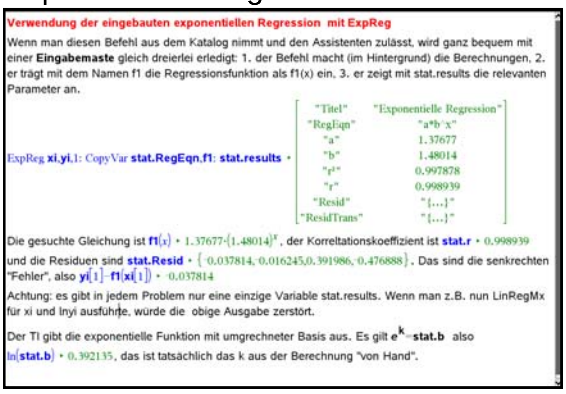
3.3

Exponentielle Regression



3.4

Exponentielle Regression



Verwendung der eingebauten exponentiellen Regression mit ExpReg

Wenn man diesen Befehl aus dem Katalog nimmt und den Assistenten zulässt, wird ganz bequem mit einer **Eingabemaste** gleich dreierlei erledigt: 1. der Befehl macht (im Hintergrund) die Berechnungen, 2. er trägt mit dem Namen f1 die Regressionsfunktion als f1(x) ein, 3. er zeigt mit stat.results die relevanten Parameter an.

ExpReg **xi**,**yi**,1: CopyVar **stat.RegEqn**,**f1**: **stat.results** ▸

"Titel"	"Exponentielle Regression"
"RegEqn"	"a*b^x"
"a"	1.37677
"b"	1.48014
"r²"	0.997878
"r"	0.998939
"Resid"	"{...}"
"ResidTrans"	"{...}"

Die gesuchte Gleichung ist **f1**(x) ▸ $1.37677\cdot(1.48014)^x$, der Korreltationskoeffizient ist **stat.r** ▸ 0.998939 und die Residuen sind **stat.Resid** ▸ {-0.037814,-0.016245,0.391986,-0.476888}. Das sind die senkrechten "Fehler", also **yi**[1]-**f1**(**xi**[1]) ▸ -0.037814

Achtung: es gibt in jedem Problem nur eine einzige Variable stat.results. Wenn man z.B. nun LinRegMx für xi und lnyi ausführte, würde die obige Ausgabe zerstört.

Der TI gibt die exponentielle Funktion mit umgrechneter Basis aus. Es gilt $e^{\mathbf{k}}=\mathbf{stat.b}$ also ln(**stat.b**) ▸ 0.392135, das ist tatsächlich das k aus der Berechnung "von Hand".

3.5

Potenz- Regression, doppellogarith.

Logarithmiert ist diese Gleichung $\ln(y)=\mathbf{k}\cdot\ln(x)+\ln(\mathbf{a})$. Man braucht also ln(xi und ln(yi) (für "von Hand")

Blatt 2 zeigt die Arbeit von Hand, Blatt3 die Ausgleichsgerade der doppelt logarithmierten Daten, Blatt 4 die eingebaute Potenz-Regression und Blatt 5 die Ausgleichskurve der Originaldaten.

Blatt2. definiert die Daten und rechnet den Logarithmus der xi und der yi aus. Dann macht man damit eine lineare Regression (siehe Problem 1). Nach der Formel der Formelsammlung ist

$\mathbf{m}:=\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathrm{sum}(\mathbf{lnxi}\cdot\mathbf{lnyi})-\mathrm{sum}(\mathbf{lnxi}\cdot\mathrm{sum}(\mathbf{lnyi}))}{\mathbf{n}\cdot\mathrm{sum}(\mathbf{lnxi}^2)-(\mathrm{sum}(\mathbf{lnxi}))^2}$ In den gelben Feldern sind Variable definiert worden lnxq:=....

$\mathbf{b}=\mathbf{lnyq}-\mathbf{m}\cdot\mathbf{lnxq}$ $\mathrm{approx}(\mathbf{b}) \cdot 0.548514$ Die Ausgleichsgerade ist $y=1.08046\cdot x+0.548514$ Wegen $\ln(y)=\mathbf{k}\cdot\ln(x)+\ln(\mathbf{a})$ ist die Potenz-Regressionskurve nun mit $\mathbf{bb}=\ln(\mathbf{a})$ also $\mathbf{a}:=e^{\mathbf{bb}} \cdot 1.73068$ und $\mathbf{k}:=\mathbf{mm} \cdot 1.08046$ bestimmt worden.

Blatt 3. Data&Statistics-Blatt. Unten trägt man "lnxi" ein links "lnyi" Man klickt dazu unten in der Mitte und bekommt mögliche Variablen angeboten. Dann ist die Regressionsgerade (Werkzeugpalette)eingetragen.

Man nennt dies: doppelt-logarithmische Darstellung.

Blatt 4 zeigt die Deutung in den ursprünglichen Daten.

Blatt5 zeigt die Verwendungder eingebautenexponentiellen Regression

Blatt 3. Data&Statistics-Blatt. Unten trägt man "xi" ein links "yi" Man klickt dazu unten in der Mitte und bekommt mögliche Variablen angeboten. Dann ist die Regressionsgerade (Werkzeugpalette)eingetragen.

Man nennt dies: einfach-logarithmische Darstellung.

Blatt 4 zeigt die Deutung in den ursprünglichen Daten.

Blatt5 zeigt die Verwendungder eingebautenexponentiellen Regression

4.1

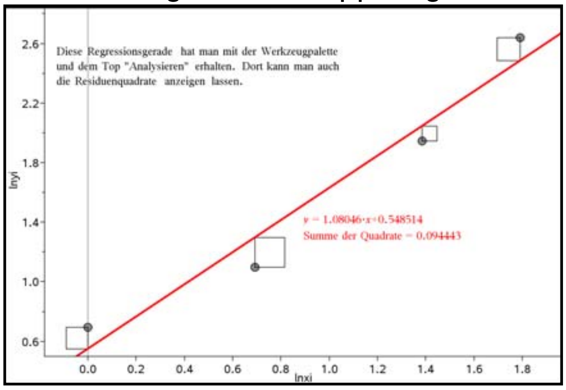
Potenz- Regression, doppellogarith.

	A i	B xi	C yi	D lnxil...	E xiq	F	G	H	I	J lnxi	K lnyi	L	M
•				=lnxi*lxy	=lnxi^					=approx	=approx(lr		
1	1	1	2	0.	0.	3.8712	6.37673	8.18766	5.61267	0.	0.693147		
2	2	2	3	0.6931...	0.4...	sum(ln...	sum(lnyi)	sum(lnxi*l...	sum(ln...	0.6931..	1.09861		
3	3	4	7	1.3862...	1.9...	lnxq	lnyq	m	mm	1.3862..	1.94591		
4	4	6	14	1.7917...	3.2...	0.9678	1.59418	1.08046	1.08046	1.7917..	2.63906		
5						n		b	bb				
6						4		0.548514	0.5485...				
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													

F7

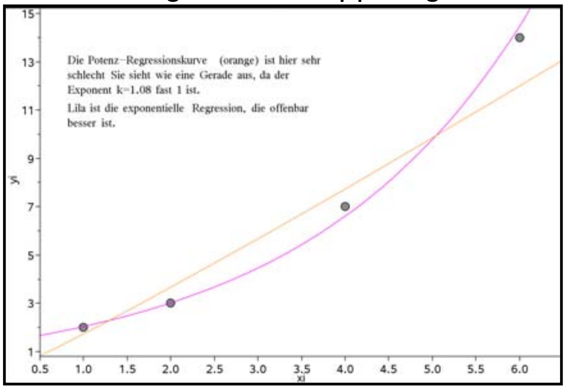
4.2

Potenz- Regression, doppellogarith.



4.3

Potenz- Regression, doppellogarith.



4.4

Potenz- Regression, doppellogarith.

Verwendung der eingebauten Potenz-Regression mit PowerReg

Wenn man diesen Befehl aus dem Katalog nimmt und den Assistenten zulässt, wird ganz bequem mit einer **Eingabemaste** gleich dreierlei erledigt: 1. der Befehl macht (im Hintergrund) die Berechnungen, 2. er trägt mit dem Namen f1 die Regressionsfunktion als f1(x) ein, 3. er zeigt mit stat.results die relevanten Parameter an.

PowerReg **xi**,**yi**,1: CopyVar **stat.RegEqn**,**f1**: **stat.results** $\cdot \begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"Potenzregression"} \\ \text{"RegEqn"} & \text{"a*x^b"} \\ \text{"a"} & 1.73068 \\ \text{"b"} & 1.08046 \\ \text{"r}^2\text{"} & 0.958449 \\ \text{"r"} & 0.979004 \\ \text{"Resid"} & \text{"\{...\}"} \\ \text{"ResidTrans"} & \text{"\{...\}"} \end{bmatrix}$

Die gesuchte Gleichung ist $\mathbf{f1}(x) \cdot 1.73068\cdot x^{1.08046}$, der Korreltationskoeffizient ist **stat.r** $\cdot$ 0.979004 , der ist sehr viel schlechter als die r aus den anderen Problemen.

Die Residuen sind **stat.Resid** $\cdot \{0.269321,-0.659881,-0.739578,2.00566\}$. Das sind die senkrechten "Fehler", also $\mathbf{yi}[1]-\mathbf{f1}(\mathbf{xi}[1]) \cdot 0.269321$

Achtung: es gibt in jedem Problem nur eine einzige Variable stat.results. Wenn man z.B. nun LinRegMx für lnxi und lnyi ausführte, würde die obige Ausgabe zerstört.

Die Werte **stat.a** $\cdot$ 1.73068 und **stat.b** $\cdot$ 1.08046 sind tatsächlich die aus der Berechnung "von Hand" auf Blatt 1

4.5

Quadratische Regression

Potenzfunktion und Quadratische Regression

Haftendorn 5/08 www.mathematik-verstehen.de

Im 4. Problem wird zu gegebenen Daten die quadratische Regressionskurve $y=a\cdot x^2+\mathbf{b}\cdot x+c$ berechnet.

Das geschieht nur noch auf die eingebaute Art. Eine Berechnungsformel verwendet eine Matrix, das ist hier intern programmiert.

Die Daten werden diesesmal hier definiert: $\mathbf{xi}:=\{1,2,4,6\}$ und $\mathbf{yi}:=\{2,3,7,14\}$

Achtung: Die Mathe-Zellen haben "Attribute" (re-Maus) Hier ist die Ausgabe unterdrückt, damit die Zahlen nicht zweimal da stehen.

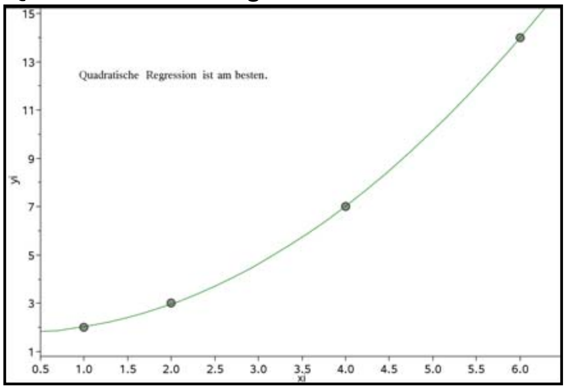
Blatt 2. Data&Statistics-Blatt. Unten trägt man "xi" ein links "yi" Man klickt dazu unten in der Mitte und bekommt mögliche Variablen angeboten. Dann ist die Regressionsgerade (Werkzeugpalette)eingetragen.

Blatt 3 zeigt die Deutung in den ursprünglichen Daten.

Blatt4 zeigt die Verwendungder eingebautenexponentiellen Regression

5.1

Quadratische Regression



5.2

Quadratische Regression

Verwendung der eingebauten quadratischen Regression mit QuadReg

Wenn man diesen Befehl aus dem Katalog nimmt und den Assistenten zulässt, wird ganz bequem mit einer **Eingabemaste** gleich dreierlei erledigt: 1. der Befehl macht (im Hintergrund) die Berechnungen, 2. er trägt mit dem Namen f1 die Regressionsfunktion als f1(x) ein, 3. er zeigt mit stat.results die relevanten Parameter an.

QuadReg **xi**,**yi**,1: CopyVar **stat.RegEqn**,**f1**: **stat.results** $\cdot \begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"Quadratische Regression "} \\ \text{"RegEqn"} & \text{"a*x^2+b*x+c"} \\ \text{"a"} & 0.363065 \\ \text{"b"} & -0.146985 \\ \text{"c"} & 1.80402 \\ \text{"R}^2\text{"} & 0.999972 \\ \text{"Resid"} & \text{"\{...\}"} \end{bmatrix}$

Die gesuchte Gleichung ist $\mathbf{f1}(x) \cdot 0.363065\cdot x^2-0.146985\cdot x+1.80402$, der Korreltaionskoeffizient ist $\sqrt{\mathbf{stat.r^2}} \cdot 0.999986$ Das ist der höchste dieser ganzen Serie. Die quadratische Regressionskurve ist also die beste Ausgleichskurve.

und die Residuen sind **stat.Resid** $\cdot \{-0.020101,0.037688,-0.025126,0.007538\}$. Das sind die senkrechten "Fehler", also $\mathbf{yi}[1]-\mathbf{f1}(\mathbf{xi}[1]) \cdot -0.020101$

Achtung: es gibt in jedem Problem nur eine einzige Variable stat.results. Wenn man nun eine andere Regression zum Vergleich ausführte, würde die obige Ausgabe zerstört.

5.3